3. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: учебное пособие / Под ред. К. А. Рыбникова. – Москва : Наука, 1982. – 368 с.

4. **Попов, И. Ю.** Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики: учебное пособие / И. Ю. Попов. – Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2008. – 214 с.

5. Справочное пособие по высшей математике: в 5 т. Т. 3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко [и др.]. – Москва: Едиториал УРСС, 2001. – 224 с.

6. Пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г. Н. Яковлева. – Москва: Наука, 1981. – 608 с.

УДК 378.091

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В. В. ИГНАТЕНКО, Е. А. ЛЕОНОВ
Белорусский государственный технологический университет
Минск, Беларусь

Теория массового обслуживания (ТМО) является одним из разделов высшей математики и достаточно широко используется в приложениях, связанных со случайными процессами. Как правило, она используется для построения стохастических моделей, когда нельзя построить детерминированные модели, т. е. когда входящие в модель параметры строго определены, например, как в линейном программировании.

Поскольку в техническом университете математика является обслуживающей дисциплиной, то и изложение ТМО ориентировано на её использование при решении прикладных задач. Здесь, при преподавании ТМО, не нужно строгое изложение с доказательствами, как в классическом университете. Очень важно, чтобы студенты усвоили основные понятия: случайный процесс; марковский процесс (показать, что, в сущности, любой процесс можно рассматривать как марковский, если все параметры из «прошлого», от которых зависит «будущее», включить в «настоящее», и привести пример); процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; размеченный граф состояний; потоки событий и их характеристики; пуассоновский и простейший потоки. Причем все примеры при изучении этих понятий должны быть из реального производства, связанного с будущей специальностью, чтобы студент сразу понимал, что это не просто теория, а пригодится в будущей работе.

Покажем, как это делается в Белорусском государственном технологическом университете для специальностей лесопромышленного комплекса «Лесная инженерия и логистическая инфраструктура лесного комплекса», «Технология деревообрабатывающих производств», «Машины и оборудование лесного комплекса».

В настоящее время в лесном комплексе задействовано очень много различных машин – это харвесторы, форвардеры, лесовозы, автощеповозы, различные манипуляторы, лесопильные и строгальные станки различных типов и моделей и целый ряд других. Их работа сильно зависит от породы и возраста древесины, состава, местоположения лесосеки, времени года и некоторых других случайных факторов.

Современному инженеру приходится анализировать работу отдельных узлов, работу всего механизма в целом, а также работу всей технологической линии. При достаточно широком выборе однотипных механизмов очень важно правильно подобрать их при построении технологической линии. Хотя каждая из вышеуказанных машин имеет заводские характеристики, однако этого недостаточно для составления высокоэффективной технологической цепочки в силу влияния случайных факторов.

Решение данных проблем практически невозможно без использования математических моделей исследуемых объектов. Как правило, это стохастические модели. При построении математической модели нужно научить студента правильно выбирать существенные состояния моделируемой системы, т. к. увеличение числа состояний ведет к усложнению математической модели, а также строить размеченный граф. Например, если мы рассматриваем работу раскряжевочной машины, то можем выделить следующие состояния: S_0 – установка осуществляет раскряжевку хлыстов; S_1 – установка исправна и простаивает из-за отсутствия хлыстов; S_2 – установка неисправна.

Тогда размеченный граф для работы раскряжевочной установки имеет следующий вид (рис. 1).

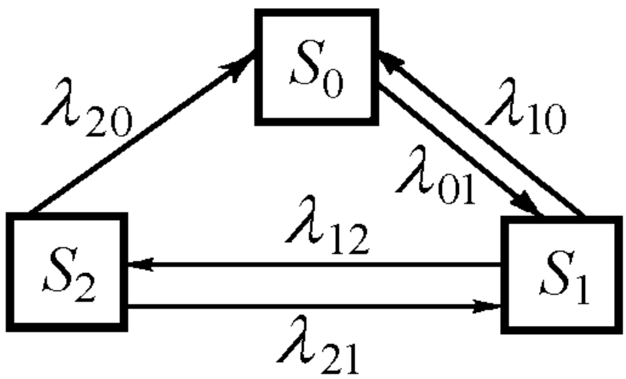

Рис. 1. Размеченный граф состояний раскряжевочной установки

Здесь $\lambda_{ij}, i,\ j = 0, 1, 2$ – интенсивности потоков, переводящих систему из состояния S_i в состояние S_j.

Показывается, как по размеченному графу состояний записывается система уравнений Колмогорова [1].

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t) + \lambda_{20}P_2(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = -(\lambda_{20} + \lambda_{21})P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t), \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $P_i(t)$ – это вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_i, причем $\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$.

При записи дифференциальных уравнений Колмогорова для состояний системы не надо строго выводить уравнения, достаточно научить пользователя мнемоническим правилам их записи.

Правило. Чтобы записать уравнение Колмогорова для i-го состояния, нужно в левой части уравнения записать производную $\dfrac{dP_i(t)}{dt}$; в правой части уравнения – сумму произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивность соответствующих потоков минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного i-го состояния.

Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими, то существуют финальные вероятности состояний, которые постоянны и не зависят от времени. Это значит, что с течением времени в системе S устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний уже не меняются. Финальная вероятность может быть истолкована как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Таким образом, финальные вероятности находятся из решения системы алгебраических уравнений, в которую преобразуется система (1).

Вернемся к работе раскряжёвочной машины. Пусть интенсивности потоков известны: $\lambda_{01} = 2$, $\lambda_{10} = 4$, $\lambda_{21} = 2$, $\lambda_{12} = 3$, $\lambda_{20} = 4$.

Тогда, для нахождения финальных вероятностей, система уравнений Колмогорова (1) преобразуется в алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} -2P_0 + 4P_1 + 4P_2 = 0, \\ 2P_0 - 7P_1 + 2P_2 = 0, \\ 3P_1 - 6P_2 = 0, \\ P_0 + P_1 + P_2 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Решая систему, имеем $P_1 = 0{,}22$, $P_2 = 0{,}11$ и $P_0 = 0{,}67$.

Вывод. При достаточно большом времени работы техническое устройство с вероятностью $P_0 = 0{,}67$ будет находиться в состоянии S_0, с вероятностью $P_1 = 0{,}22$ – в состоянии S_1 и с вероятностью $P_2 = 0{,}11$ – в состоянии S_2.

Анализируя полученное решение, мы видим, что раскряжевочная установка только 67 % времени занимается непосредственно раскряжёвкой, а остальное время (33 %) простаивает. Следовательно, нужно провести организационные мероприятия по увеличению потока древесины и уменьшению времени ремонта.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Игнатенко, В. В.** Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок: учебное пособие для студентов специальности «Лесоинженерное дело» / В. В. Игнатенко, И. В. Турлай, А. С. Федоренчик. – Минск: БГТУ, 2004. – 180 с.

УДК 512.817:004.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ JULIA НА ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЯХ В КУРСЕ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

А. Г. КОЗЛОВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Применение языка программирования Julia на лабораторных занятиях в курсе «Дискретная математика и математическое моделирование» позволяет интенсифицировать основные этапы выполнения лабораторной работы, контролировать правильность полученных результатов и проводить мониторинг выполнения задания студентами.

Язык программирования Julia – это открытый динамический компилируемый язык, ориентированный в первую очередь на производительные вычисления в научно-технических областях [1]. Julia, Python и Matlab имеют схожий синтаксис, что облегчает перенос программ с одного языка на другой. Julia легко интегрируется в Jupyter Notebook (JN), предназначенный для работы с программным кодом, данными и текстом.