О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ОДНОГО НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА, СВЯЗАННОГО С МОДИФИЦИРОВАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

Л.Д. Яроцкая
БГТУ, Минск

УДК 517.58

Аннотация: в статье для специальной функции двух переменных, представленной несобственным интегралом, получены представление в виде интеграла Меллина – Барнса и представление в виде комбинации гипергеометрических функций. Установлена связь с функцией Макдональда посредством преобразования Гильберта.

Ключевые слова: функции Бесселя, интегральные преобразования по индексу, функции гипергеометрического типа, гамма-функция Эйлера.

В работе рассматривается специальная функция двух переменных, представленная при $x,\ \tau \in R_+$ несобственным интегралом

$$K(\tau,x)=\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,u}\sin\tau u\,du. \tag{1}$$

Функция (1) является ядром интегрального преобразования, введенного в работе [1], в связи с решением интегрального уравнения второго рода с двумя ядрами типа свертки Конторовича – Лебедева.

Модифицированная функция Бесселя

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{2}$$

и функция Макдональда

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\right] \tag{3}$$

являются линейно независимыми решениями $u(z)$ дифференциального уравнения Бесселя [см., напр., 2]

$$u''+\frac{1}{z}u'-\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)u=0,$$

где z – комплексная переменная, ν – параметр (индекс), который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Это уравнение встречается при рассмотрении краевых задач теории потенциала для цилиндрических областей.

Установлено [см., напр., 2], что для функции Макдональда мнимого параметра справедливо интегральное представление вида

$$K_{i\tau}(x) = \int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,u} \cos\tau u\, du. \tag{4}$$

Функция Макдональда (4) играет важную роль в теории интегральных преобразований, поскольку является ядром преобразования Конторовича – Лебедева, простейшего в классе преобразований по индексу. Установлено [3], что все известные в литературе интегральные преобразования по индексу композиционно связаны с преобразованием Конторовича – Лебедева в силу универсальной структуры их ядер, относящимся к функциям гипергеометрического типа.

Учитывая в определенном смысле схожесть интегралов в (1) и (4), установим взаимосвязь между соответствующими функциями.

Получим представление функции (1) в виде интегралов Меллина – Барнса. Совершив замену переменной $\mathrm{sh}^2\dfrac{u}{2} = t$ в (1), находим

$$K(\tau, x) = e^{-x}\int_0^\infty e^{-2x\,\mathrm{sh}^2(u/2)} \sin\tau u\, du =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{-2xt}}{\sqrt{t}}\left(\frac{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right)^{2i\tau}}{\sqrt{t+1}} - \frac{\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)^{2i\tau}}{\sqrt{t+1}}\right)dt.$$

Выражение в скобках может быть представлено как обратное преобразование Меллина произведения гамма-функций Эйлера по формуле [4, (8.4.2.13)]. В результате получим

$$K(\tau, x) = \frac{e^{-x}}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{-2xt}}{\sqrt{t}}\frac{1}{2\pi^{3/2} i}\times$$

$$\times\int_L \Gamma(s, s+1/2)\left(\Gamma\begin{pmatrix} 1/2 - i\tau - s \\ s - i\tau + 1/2\end{pmatrix} - \Gamma\begin{pmatrix} 1/2 + i\tau - s \\ s + i\tau + 1/2\end{pmatrix}\right) t^{-s} ds\, dt, \quad 0 < \mathrm{Re}\, s < 1/2.$$

где L – некоторый контур, отделяющий левые полюсы гамма-функций в подынтегральном выражении от правых. Далее, применяя формулы дополнения для гамма-функции

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \text{ или } \Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos\pi z},$$

вычислим выражение в скобках

$$\frac{\Gamma(1/2 - i\tau - s)}{\Gamma(1/2 - i\tau + s)} - \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - s)}{\Gamma(1/2 + i\tau + s)} = \frac{\dfrac{\pi}{\cos\pi(s+i\tau)} - \dfrac{\pi}{\cos\pi(s-i\tau)}}{\Gamma(1/2 - i\tau + s)\Gamma(1/2 + i\tau + s)} =$$

$$=\frac{\dfrac{2\pi\sin(\pi i\tau)\sin\pi s}{\cos\pi(s+i\tau)\cos\pi(s-i\tau)}}{\Gamma(1/2+i\tau+s)\Gamma(1/2-i\tau+s)}=2i\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\frac{\Gamma(1/2-i\tau-s)\Gamma(1/2+i\tau-s)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}.$$

Изменив порядок интегрирования в последнем интеграле, вычислим внутренний интеграл и получим представление функции (1) в виде интеграла Меллина – Барнса

$$K(\tau,x)=\frac{e^{-x}\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{2\pi^{3/2}i}\int_L\Gamma\left(\begin{matrix}s+i\tau,s-i\tau,s,1-s\\ s+1/2\end{matrix}\right)(2x)^{-s}\,ds,\ 0<\mathrm{Re}\,s<1/2. \tag{5}$$

Далее с учетом формул [4, (8.4.23.5)] и [4, (8.4.2.6)] приведем (5) к следующему виду

$$K(\tau,x)=\frac{e^{-x}\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{2\pi^{3/2}i}\int_L\Gamma\left(\begin{matrix}s,\quad 1-s\\ 1/2+s,1/2-s\end{matrix}\right)\frac{2\sqrt{\pi}}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}\int_0^\infty e^yK_{i\tau}(y)(2y)^{s-1}dy(2x)^{-s}\,ds=$$

$$=e^{-x}\,\mathrm{th}\,\pi\tau\int_0^\infty e^yK_{i\tau}(y)\frac{dy}{y}\frac{1}{2\pi i}\int_L\Gamma\left(\begin{matrix}s,\quad 1-s\\ 1/2+s,1/2-s\end{matrix}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{-s}ds=$$

$$=\frac{e^{-x}\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty e^yK_{i\tau}(y)\frac{dy}{y\left(1-x/y\right)}.$$

Таким образом, функция (1) посредством преобразования Гильберта [5] связана с функцией Макдональда (4) формулой

$$K(\tau,x)=\frac{e^{-x}\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^yK_{i\tau}(y)}{y-x}dy. \tag{6}$$

Аналогичным образом, используя формулы [4, (8.4.23.3)] и [4, (8.4.2.5)], получим

$$K(\tau,x)=\frac{e^{-x}\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{2\pi^2 i}\int_L\Gamma(s,1-s)\int_0^\infty e^{-y}K_{i\tau}(y)(2y)^{s-1}dy(2x)^{-s}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-x}\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\int_0^\infty e^{-y}K_{i\tau}(y)\frac{dy}{y}\frac{1}{2\pi i}\int_L\Gamma(s,1-s)\left(\frac{x}{y}\right)^{-s}ds=$$

$$=\frac{e^{-x}\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty e^{-y}K_{i\tau}(y)\frac{dy}{y\left(1+x/y\right)}.$$

Имеем

$$K(\tau,x)=\frac{e^{-x}\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-y}K_{i\tau}(y)}{y+x}dy. \tag{7}$$

Вычисляя интеграл (5) по формуле [4, (8.4.51.10)] (теорема Слейтер), в результате несложных преобразований получим представление функции (1), связанной с функцией Макдональда (4), в виде линейной комбинации функций гипергеометрического типа

$$K(\tau, x) = \frac{e^{-x}}{\tau} {}_2F_2\left(1/2, 1; 1 - i\tau, 1 + i\tau; 2x\right) - \frac{\pi}{2\operatorname{sh}\left(\tau\pi\right)}\left[I_{-i\tau}\left(x\right) + I_{i\tau}\left(x\right)\right], \tag{8}$$

где ${}_2F_2$ – функция, определённая рядом

$${}_2F_2\left(1/2, 1; 1 - i\tau, 1 + i\tau; 2x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{\left(1 - i\tau\right)_k \left(1 + i\tau\right)_k} \left(2x\right)^k,$$

$$\left(a\right)_n = a\left(a+1\right)\left(a+2\right)\ldots\left(a+n-1\right) = \frac{\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(a\right)}$$ – символ Похгаммера

и $I_{i\tau}\left(x\right)$ – модифицированная функция Бесселя, определенная рядом (2).

Полученные представления (5) – (8) оказываются весьма эффективными при изучении свойств функции (1) и преобразований по индексу с этой функцией в ядре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусаревич Л. Д. Об интегральном уравнении с двумя ядрами, разрешимом с помощью преобразования Конторовича – Лебедева // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук, 1(1999), с. 37−44.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974, 296 с.

3. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore. World Scientific Publ., 1996, 252 p.

4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986, 800 с.

5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948, 334 с.