

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАКРЫТОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Закрытая транспортная задача – задача о нахождении такого плана перевозки грузов от пунктов отправления до пунктов назначения, при котором запасы перевозимых грузов равны потребностям в них, а транспортные затраты – минимальны. В качестве одного из эффективных инструментов для решения такого рода задач используется интегрированная система MathCad [1]. В общем случае, для решения задач оптимизации в MathCad используются встроенные функции Maximize, Minimize и логический блок Given. Оптимальное решение получают с использованием функций Maximize или Minimize.

Рассмотрим один из классических вариантов решения закрытой транспортной задачи на примере.

Пример. На складах предприятий a_1, a_2, a_3 сосредоточена однородная продукция в объемах 240, 180 и 260 единиц. Продукцию необходимо перевезти в пункты назначения b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 в объемах соответственно 160, 170, 120, 130 и 100 единиц. Тарифы на перевозку единицы продукции с каждого из пунктов отправления в соответствующие

пункты назначения задаются матрицей $c = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Необходимо составить такой план перевозок, при котором суммарные транспортные затраты будут минимальны.

Методика решения предполагает составление математической модели и формализации ее в синтаксисе системы (Рис. 1).

c11 := 5	c12 := 3	c13 := 4	c14 := 2	c15 := 4	Задание тарифов на перевозку в виде переменных
c21 := 8	c22 := 4	c23 := 4	c24 := 4	c25 := 5	
c31 := 9	c32 := 7	c33 := 3	c34 := 7	c35 := 2	
		a1 := 240	a2 := 180	a3 := 260	Запасы
b1 := 160	b2 := 170	b3 := 120	b4 := 130	b5 := 100	Потребности +
A := a1 + a2 + a3		B := b1 + b2 + b3 + b4 + b5		A - B = 0	Проверка на закрытость

Рисунок 1 – Листинг исходных данных в MathCad

После указания исходных данных, дается описание целевой функции и системы ограничений (Рис. 2.).

Целевая функция:						
$TZ(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}) := \begin{pmatrix} x_{11} \cdot c_{11} + x_{12} \cdot c_{12} + x_{13} \cdot c_{13} + x_{14} \cdot c_{14} + x_{15} \cdot c_{15} \dots \\ + x_{21} \cdot c_{21} + x_{22} \cdot c_{22} + x_{23} \cdot c_{23} + x_{24} \cdot c_{24} + x_{25} \cdot c_{25} \dots \\ + x_{31} \cdot c_{31} + x_{32} \cdot c_{32} + x_{33} \cdot c_{33} + x_{34} \cdot c_{34} + x_{35} \cdot c_{35} \end{pmatrix}$						
$x_{11} := 160$	$x_{12} := 80$	$x_{13} := 0$	$x_{14} := 0$	$x_{15} := 0$	Опорный план	
$x_{21} := 0$	$x_{22} := 90$	$x_{23} := 90$	$x_{24} := 0$	$x_{25} := 0$		
$x_{31} := 0$	$x_{32} := 0$	$x_{33} := 30$	$x_{34} := 130$	$x_{35} := 100$		
Given						
$x_{11} \geq 0$	$x_{12} \geq 0$	$x_{13} \geq 0$	$x_{14} \geq 0$	$x_{15} \geq 0$	Ограничения на неотрицательность решения	
$x_{21} \geq 0$	$x_{22} \geq 0$	$x_{23} \geq 0$	$x_{24} \geq 0$	$x_{25} \geq 0$		
$x_{31} \geq 0$	$x_{32} \geq 0$	$x_{33} \geq 0$	$x_{34} \geq 0$	$x_{35} \geq 0$		
$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = a_1$					$x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$	Ограничения по потребностям
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = a_2$					$x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$	
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = a_3$					$x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$	
Ограничение по вывозу грузов со складов					$x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4$	
					$x_{15} + x_{25} + x_{35} = b_5$	

Рисунок 2 – Листинг задания математической модели

Далее с использованием функции *Minimize* определяется оптимальный план перевозок и рассчитываются транспортные затраты (Рис. 3.).

$OPlan := \text{Minimize}(TZ, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35})$	
Оптимальный план перевозок:	
$OPlan^T = (120 \ 0 \ 0 \ 120 \ 0 \ 0 \ 170 \ 0 \ 10 \ 0 \ 40 \ 0 \ 120 \ 0 \ 100)$	
Транспортные затраты:	
$TZ(OPlan_0, OPlan_1, OPlan_2, OPlan_3, OPlan_4, OPlan_5, OPlan_6, OPlan_7, OPlan_8, OPlan_9, OPlan_{10}, OPlan_{11}, OPlan_{12}, OPlan_{13}, OPlan_{14}) = 2.48 \times 10^3$	

Рисунок 3 – Листинг решения

Достоинством такого подхода является простота и наглядность выполняемых действий. Основным же недостатком – с увеличением количества поставщиков продукции и потребителей, усложняется количество вводимой информации. А именно – изменение целевой функции и дополнение ограничений соответствующими уравнениями.

Предлагаемый же подход предполагает формирование исходных данных, математической модели и получение решения с помощью векторов и матриц.

Решение задачи с использованием векторов и матриц позволяет сократить ввод ограничений к целевой функции и подразумевает задание единичной матрицы размерами $k \times i$ (где k – количество пунктов назначения, i – количество пунктов отправления) (Рис. 4.).

$$c := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad A := (240 \ 180 \ 260)^T$$

$$B := (160 \ 170 \ 120 \ 130 \ 100)^T$$

$$\sum A - \sum B = 0$$

$$TZ(x) := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^4 (c_{i,j} \cdot x_{i,j})$$

$$x := \begin{pmatrix} 160 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 130 & 100 \end{pmatrix}$$

Given

$$x \geq 0 \quad i := 0..2 \quad k := 0..4 \quad m_{k,i} := 1$$

$$(x \cdot m)^{\langle 0 \rangle} = A \quad \text{Ограничение по вывозу грузов со складов}$$

$$[(m \cdot x)^T]^{\langle 0 \rangle} = B \quad \text{Ограничения по потребностям}$$

$$OPlan := \text{Minimize}(TZ, x) \quad OPlan = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 170 & 0 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 120 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$TZ(OPlan) = 2.48 \times 10^3$$

Рисунок 4 – Листинг решения с использование матричного исчисления

Таким образом, предлагаемый подход позволяет сократить объем вводимой информации и упростить расчеты, а также анализ полученных результатов при увеличении размерности задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лащенко, А. П. Методика изучения транспортной задачи математического программирования при подготовке студентов экономических специальностей / А. П. Лащенко, Р. О. Короленя // Проблемы преподавания высшей математики и информатики в условиях новой образовательной парадигмы : Материалы Международной научно-практической конференции, Минск, 14–15 апреля 2022 года / Редколлегия: С.А. Самаль (отв. ред.) [и др.]. – Минск: Белорусский государственный университет, 2022. – С. 61-64.