В.М. Собин, А.И. Ершов

О ЗАТУХАНИИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В ТРУБАХ

Закрутка потоков жидкости и газа позволяет интенсифицировать процессы тепло- и массообмена. При этом степень интенсификации определяется абсолютным значением и характером распределения тангенциальной скорости по радиусу и длине трубы. Величина тангенциальной скорости также сильно влияет на сепарацию жидкой фазы в двухфазном потоке, что является существенным для массообменных аппаратов. В связи с этим вопрос затухания тангенциальной скорости в потоке при закручивании его только на начальном участке приобретает важное теоретическое и практическое значение.

Затухание крутки тесно связано с турбулентной структурой самого закрученного потока, и вид уравнений движения зависит от привлекаемых гипотез о связи осредненных составляющих скоростей с пульсационными. В зависимости от принятых связей уравнения могут между собой несколько различаться. В настоящей работе пульсационные составляющие скорости исключены с помощью введения турбулентной вязкости. Согласно [1], в результате применения модифицированной теории переноса завихренности Тейлора и допущения об изотропности турбулентных коэффициентов переноса уравнение движения в тангенциальном направлении без учета радиальной составляющей скорости ввиду ее малости имеет вид:

$$u\,\frac{\partial w}{\partial x} = (\nu+\nu_т)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2}\right), \tag{1}$$

где u, w — соответственно осевая и тангенциальная составляющие скорости; x, r — продольная и поперечная координаты; $\nu, \nu_т$ — коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости.

С помощью уравнения (1) при известном распределении $\nu_т$ возможен расчет затухания тангенциальной скорости.

В литературе известно несколько точек зрения относительно распределения $\nu_т$ по радиусу. Если принять $\nu_т$, не зависящим от r [2,3], то для области внепограничного слоя уравнение (1) допускает аналитическое решение.

Переходя в (1) к безразмерням переменным

$$u^* = \frac{u}{u_{ср}}\;;\;\; w^* = \frac{w}{u_{ср}}\;;\;\; Re = \frac{u_{ср}\cdot R}{\nu}\;;\; r^* = \frac{r}{R}\;;\; x^* = \frac{x}{R};\; \nu_т^* = \frac{\nu_т}{\nu}$$

и пренебрегая молекулярной вязкостью по сравнению с турбулентной, получим

$$u\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\nu_T}{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2}\right) \tag{2}$$

Здесь в безразмерных переменных опущены звездочки, а в качестве масштаба для скоростей принята средняя осевая скорость $u_{ср}$ и для координат — радиус трубы R.

Решение ищем при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} w &= 0 \quad \text{при} \quad r = 0\,; \\ w &= w_0 \quad \text{при} \quad r = 1 - \delta\,; \end{aligned} \tag{3}$$

$$w = f(r) \quad \text{при } x = 0\,, \tag{4}$$

где w_0 — значение w на границе пограничного слоя; δ — безразмерная толщина пограничного слоя.

Учитывая малую толщину пограничного слоя на начальных участках трубы, будем приближенно считать, что $w = w_0$ при $r = 1$, а u не зависит от x и r и равно $u_{ср}$. Условие $u = u_{ср}$ довольно строго выполняется при закручивании тока спиральной лентой. При надобности решение можно уточнить, имея действительное распределение u.

Для решения уравнения (2) при условиях (3) и (4) используем конечное интегральное преобразование Ханкеля [4], которое определяется выражением

$$\bar{V}(p) = \int_0^1 r J_n(pr)\, V(r)\, dr\,, \tag{5}$$

где $J_n(p, r)$ — функция Бесселя первого рода порядка n; p — положительный корень уравнения;

$$J_n(p) = 0\,. \tag{6}$$

Формулой обращения для преобразования Ханкеля служит ряд

$$V(r) = 2\sum_p \frac{J_n(pr)}{J^2_{n+1}(p)}\,\bar{V}(p)\,, \tag{7}$$

в котором суммирование происходит по всем положительным корням уравнения (6).

Преобразование (5) позволяет исключить из заданного дифференциального уравнения совокупность членов вида

$$F(V) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) - \frac{n^2 V}{r^2}\,.$$

Scanned by TapScanner

В случае $n=1$, чтобы исключить переменную r из уравнения (2), воспользуемся преобразованием

$$\bar{w} = \int_0^1 r J_1(pr) w\, dr \,, \tag{8}$$

где $J_1(pr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка; p — положительный корень уравнения

$$J_1(p) = 0 \,. \tag{9}$$

Умножая правую и левую части (2) на $rJ_1(pr)$ и интегрируя по r от 0 до 1 с учетом (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{w}}{dx} = -\frac{\nu_T}{u\,Re}\left[p w_0 J_1'(p) + p^2 \bar{w}\right] . \tag{10}$$

Поскольку важно выяснить характер затухания тангенциальной скорости по длине в ядре потока, то примем для начальных участков труб в первом приближении $w_0 = const$, что, впрочем, не изменит закона затухания. Дальше вниз по потоку с хорошим приближением можно положить $w_0 = 0$.

Тогда уравнение (10) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[\bar{w} + \frac{w_0 J_1'(p)}{p}\right] = -\frac{\nu_T}{u\,Re} p^2 \left[\bar{w} + \frac{w_0 J_1'(p)}{p}\right] ,$$

решением которого будет

$$\bar{w} + \frac{w_0 J_1'(p)}{p} = C\exp\left(-\frac{\nu_T}{u\,Re} p^2 x\right) . \tag{11}$$

Для определения C воспользуемся условием (4). Из выражения (11) при x =0 получим

$$\bar{w}(p,0) + \frac{w_0 J_1'(p)}{p} = C \,. \tag{12}$$

С другой стороны граничное условие (4) можно записать

$$\bar{w}(p,0) = \int_0^1 f(r)\, r\, J_1(pr)\, dr \,. \tag{13}$$

Следовательно, выражение (12) с учетом (13) примет вид

$$C = \int_0^1 f(r)\, r J_1(pr)\, dr + \frac{w_0 J_1'(p)}{p} . \tag{14}$$

Подставив (14) в (11), будем иметь

$$\bar{w}=\left[\int_0^1 f(r)\,r J_1(pr)\,dr\right]\exp\left(-\frac{\nu_T}{uRe}p^2x\right)+\frac{w_0 J_1'(p)}{p}\left[\exp\left(-\frac{\nu_T}{uRe}p^2x\right)-1\right]. \qquad (15)$$

Применяя формулу обращения (7) и имея ввиду, что

$$J_1'(p)=-J_2(p)+\frac{J_1(p)}{p}=-J_2(p), \qquad (5)$$

окончательно получим

$$w=2\sum_p\frac{J_1(pr)}{J_2^2(p)}\left\{\left[\int_0^1 f(r)\,rJ_1(pr)\,dr\right]\exp\left(-\frac{\nu_T}{uRe}p^2x\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{w_0J_2(p)}{p}\left[\exp\left(-\frac{\nu_T}{uRe}-p^2x\right)-1\right]\right\}, \qquad (16)$$

где суммирование происходит по всем положительным корням уравнения (9), из которых первые три равны [6]:3,83; 7,02; 10,17. Ряд (16) быстро сходится, и для расчетов достаточно провести суммирование по двум корням.

При w =0 в уравнении (16) исчезнет второе слагаемое.

Во втором приближении положим w_0 =A–Bx, тогда после соответствующих преобразований будем иметь

$$w=2\sum_p\frac{J_1(pr)}{J_2^2(p)}\left\{\left[\int_0^1 f(r)\,rJ_1(pr)\,dr\right]\exp\left(-\frac{\nu_T}{uRe}p^2x\right)-\right. \qquad (17)$$

$$\left.-\frac{J_2(p)B}{p}x+\left[\frac{J_2(p)A}{p}+\frac{J_2(p)B}{\frac{\nu_T}{uRe}p^3}\right]\left[1-\exp\left(-\frac{\nu_T}{uRe}p^2x\right)\right]\right\}.$$

Более точное условие для w_0 может быть получено при совместном решении уравнений для ядра и пограничного слоя.

Значения ν_T и $f(r)$ определяются из эксперимента.

В действительности ν_T не является постоянной величиной [7] даже в области внепограничного слоя, а является, по меньшей мере, функцией градиента скорости и r. На основе гипотезы пути перемешивания Прандтля примем следующую связь между ν_T и градиентом скорости:

$$\nu_T=l^2 r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right), \qquad (18)$$

где l – путь перемешивания, являющийся функцией r.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$u\frac{\partial w}{\partial x}=l^2\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}\right). \qquad (19)$$

При кинематическом подобии тангенциальной скорости в различных сечениях по длине (3,8), ее можно представить в виде

$$w = W_m(x)\,\varphi(r) \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), будем иметь

$$u\,\varphi\frac{dW_m}{dx} = l^2 W_m^2\left(\frac{df}{dr}-\frac{f}{r}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{f}{r^2}\right), \tag{21}$$

где W_m — максимальная тангенциальная скорость в сечении.

При этом переменные разделяются

$$W_m^{-2}\frac{dW_m}{dx} = l^2\left(\frac{df}{dr}-\frac{f}{r}\right)\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{f}{r^2}\right)\Bigg|_{uf} = -\lambda^2 . \tag{22}$$

Отсюда для W_m имеем:

$$W_m = \frac{1}{\lambda^2 x + C_1} . \tag{23}$$

Из (23) видно, что затухание тангенциальной скорости происходит по гиперболе, в то время как в (16) и (17) затухание определяется экспонентой. Из выражения (16) следует зависимость

$$W_m = W_{mo}\exp(-C_2 x) , \tag{24}$$

где W_{mo} — максимальная тагнегциальная скорость в сечении при $x = 0$.

Значения постоянных λ, C_1 в (23) и W_{mo}, C_2 в (24) проще всего установить из экспериментальных данных. Нами получены опытные данные [8] , позволяющие выразить в явном виде зависимости (23) и (24), и тем самым определить скорость затухания крутки потока по длине, а также оценить применимость изложенных выше двух выражений для турбулентной вязкости. При формировании потока тангенциальными каналами для степени закрутки n =1,0, равной отношению площади тангенциальных каналов к площади сечения трубы, получены зависимости:

$$W_m = 2{,}14\exp(-0{,}016\,x) , \tag{25}$$

$$W_m = \frac{1}{0{,}0135\,x + 0{,}45} . \tag{26}$$

Постоянные в (25) и (26) найдены для труб относительной длиной $L/d = 4$. Оказалось, что обе зависимости хорошо описывают характер затухания тангенциальной скорости, поскольку максимальные отклонения не превосходят 3--4%. Представляло интерес сравнение с экспериментами Фейджа, Лэвэна и Волфа, приведенными в [1] для длинных труб. Так, по (25) затухание тангенциальной скорости до 20% от первоначального значения произойдет на длине трубы, равной 100 R, а по (26)– на 132 R. Эксперименты в длинных трубах лучше согласуются с (26), что и следовало ожидать. Зависимость (25) получена в предположении постоянства турбулентной вязкости по сечению и длине трубы. На самом деле по мере затухания крутки ν_T уменьшается, что и приводит к более быстрому затуханию. Для начальных же участков труб (16) и (25) дают вполне приемлемые результаты.

Литература

1. Рочино, Лэвэн. Тр. амер. об. инж.-мех. Прикладная механика, 3 (1969). 2. R. Deissler, M. Perlmutter. Jnt. Heat Mass Transfer, 1, (1960). 3. Ю. А. Гостинцев, В.М. Зайцев. ИФЖ, 20, 3 (1971). 4. А.В. Лыков. Теория теплопроводности. М., 1969. 5. Д.С. Кузнецов. Специальные функции. М., 1962. 6. Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций. М., 1959. 7. В.М. Собин, А.И. Ершов. Тепло-и массоперенос, т. 1. Конвективный тепло-и массоперенос, ч. 1. Минск, 1972. 8. В.М. Собин, А.И. Ершов. Изв. АН БССР, сер. физ.-энерг. наук, 3 (1972).