УДК 532.3266.021.3

В.М.Собин

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАССООБМЕНА ПРИ СТЕКАНИИ СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПО КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В данной работе рассматривается ламинарное течение пленки жидкости под действием силы тяжести по внутренней поверхности конуса с массообменом при слабом воздействии газового потока на поверхность раздела. Подобная задача возникает при обезвоздушивании вискозы [1], а также во многих других случаях.

Допустим, жидкость стекает по поверхности конуса с радиусом R в верхнем сечении и углом α от горизонтали. Известно [2], что при стабилизированном течении по вертикальной стенке под действием силы тяжести толщина пленки и профиль скоростей в ней определяются зависимостями

$$H = \sqrt[3]{\frac{3\nu Q}{2\pi R g}} \equiv H_o; \tag{1}$$

$$u = \frac{g}{2\nu}(2Hy - y^2), \tag{2}$$

где Q – объемный расход жидкости; ν и g – кинематический коэффициент вязкости и ускорение свободного падения; u, H и y – соответственно продольная составляющая скорости, толщина пленки и поперечная координата. Продольную координату x направим вдоль поверхности конуса.

При наклонном течении жидкости считаем, что скорость вдоль оси x, в соответствии с (2) является квадратичной функцией y и имеет вид

$$u(x,y) = \frac{g}{2\nu}\left[2H(x)y-y^2\right]f(x), \tag{3}$$

где $H(x)$ и $f(x)$ – неизвестные функции.

Используя уравнение расхода жидкости в интегральной форме

$$Q=\frac{g}{2\nu}\int_0^{H(x)}(2Hy-y^2)f(x)2\pi R(1-\frac{x}{R}\cos\alpha)dy \tag{4}$$

и условие постоянства средней скорости, из (3) и (4) легко получить

$$H(x) = \frac{H_o}{1-x/R\cos\alpha}; \tag{5}$$

$$u(x,y) = \frac{g}{2\nu}\left[2H(x)y-y^2\right](1-x/R\cos\alpha)^2. \tag{6}$$

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(R-x\cos\alpha)u\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(R-x\cos\alpha)v\right]=0 \tag{7}$$

можно найти поперечную скорость v. Для типичных значений R и α величина v мала и в уравнении диффузии ее можно не учитывать.

Уравнение диффузии в выбранной системе координат при обычных предположениях и с учетом малости v имеет следующий вид [1]:

$$u\frac{\partial c}{\partial x}=D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-\frac{D}{R(1-x/R\cos\alpha)}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial c}{\partial y}\sin\alpha\right), \tag{8}$$

где D – коэффициент диффузии.

Концентрация распределяемого вещества $c(x,y)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$c/_{x=0} = c_{н}; \quad \frac{\partial c}{\partial y}/_{y=0} = 0; \quad c/_{y=н} = c_{p}, \tag{9}$$

где $c_{н}$ и c_{p} – начальная и равновесная концентрации.

При сформулированных выше условиях решение уравнения диффузии для плоской стенки найдено методом Фурье в [3]. Так же как и в [3], принимаем c_p постоянной по длине.

Перейдем в (8) к новым переменным и к безразмерной концентрации по соотношениям

$$\xi = x/R; \quad \eta = y/H; \quad c^{*} = \frac{c - c_p}{c_н - c_p} . \tag{10}$$

(Для упрощения записи звездочка ниже опущена).

Уравнение (8) в переменных ξ и η с учетом (6) запишется:

$$\frac{g}{2\nu} H^2 (2\eta - \eta^2)(1-\xi\cos\alpha)^2 \cdot \left(\frac{1}{R}\frac{\partial c}{\partial \xi} - \frac{1}{R}\eta \frac{H_o \cos\alpha}{H(1-\xi\cos\alpha)}\frac{\partial c}{\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{D}{H^2}\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} - \frac{D}{R(1-\xi\cos\alpha)}\left[\cos\alpha\left(\frac{1}{R}\frac{\partial c}{\partial \xi} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{R}\eta \frac{H_o\cos\alpha}{H(1-\xi\cos\alpha)} \cdot \frac{\partial c}{\partial \eta}\right) + \frac{\sin\alpha}{H}\frac{\partial c}{\partial \eta}\right] . \tag{11}$$

Вводя безразмерные величины

$$h = H/R; \quad h_o = H_o/R; \quad A = \frac{2D\nu}{gR^3}; \quad \theta = 1-\xi\cos\alpha, \tag{12}$$

из (11) будем иметь

$$(2\eta - \eta^2)\left(\frac{\partial c}{\partial \xi} - \eta\frac{n_o\cos\alpha}{n\theta^2}\cdot\frac{\partial c}{\partial \eta}\right) = \frac{A}{n^4\theta^2}\cdot\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} -$$

$$- \frac{A}{n^2\theta^3}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial c}{\partial \xi} - \eta\frac{n_o\cos\alpha}{n\theta^2}\cdot\frac{\partial c}{\partial \eta}\right) + \frac{\sin\alpha}{n}\frac{\partial c}{\partial \eta}\right] . \tag{13}$$

Scanned by TapScanner

Преобразование условий (9) приводит к

$$c\big/_{\xi=0}=1;\quad \frac{\partial c}{\partial \eta}\bigg/_{\eta=0}=0;\quad c\big/_{\eta=1}=0. \tag{14}$$

Решение (13) с условиями (14) ищем в виде

$$c(\xi,\eta)=f_o(\xi)+f_1(\xi)\eta+f_2(\xi)\eta^2+f_3(\xi)\eta^3. \tag{15}$$

Второе условие в (14) дает

$$f_1\equiv 0.$$

Из уравнения (13) при $\eta=0$ имеем

$$f_2=\frac{n^2\cos\alpha}{2\theta}f_o'. \tag{16}$$

Штрих означает дифференцирование по ξ. Удовлетворяя третьему условию в (14), получим

$$f_o+f_2+f_3=0. \tag{17}$$

Из уравнения диффузии (13) при $\eta=1$, пренебрегая первым слагаемым в квадратных скобках, имеем

$$(f_o'+f_2'+f_3')-\frac{n_o\cos\alpha}{n\theta^2}(2f_2+3f_3)=$$
$$=\frac{A}{n^4\theta^2}(2f_2+6f_3)-\frac{A\sin\alpha}{n^3\theta^3}(2f_2+3f_3). \tag{18}$$

Выражая f_2 и f_3 с помощью (16), (17) и имея в виду (5), после преобразований из (18) находим

$$f_o'+\frac{6}{n_o^2\cos\alpha}\cdot\frac{2A\theta^6-An_o\sin\alpha\,\theta^4+n_o^4\cos\alpha\cdot\theta^3}{4A\theta^3-An_o\sin\alpha\,\theta+n_o^4\cos\alpha}f_o=0. \tag{19}$$

После преобразований и интегрирования из (19) имеем

$$f_o = B_1 \exp\left(\frac{6}{n_o^2 \cos^2\alpha} S\right), \tag{20}$$

где B_1 – постоянная интегрирования;

$$S = \left\{ 1/8\,\theta^4 - \frac{n_o \sin\alpha}{16}\theta^2 + \frac{n_o^4 \cos\alpha}{8A}\theta - \frac{1}{4A}\left[M_1 \ln|\theta - m| + \right.\right.$$
$$+ \frac{M_2}{2} \ln\left|\theta^2 + p\theta + q\right| + \left(M_3 - \frac{M_2 p}{2}\right) \frac{1}{(q - p^2/4)^{1/2}} \times$$
$$\left.\left. \times \operatorname{arctg} \frac{\theta + p/2}{(q - p^2/4)^{1/2}} \right]\right\}. \tag{21}$$

В (21) M_1, M_2, M_3 – коэффициенты в разложении правильной дроби на простейшие после выделения целой части из коэффициента при f_o в (19); m – действительный корень знаменателя при f_o в (19) и

$$\theta^3 - \frac{n_o \sin\alpha}{4}\theta + \frac{n_o^4 \cos\alpha}{4A} = (\theta - m)(\theta^2 + p\theta + q).$$

Учитывая (20), подставим выражения для f_2 и f_3 из (16), (17) в (15). В результате получим

$$c(\xi,\eta) = B_1 \exp\left(\frac{6}{n_o^2 \cos^2\alpha} S\right)\left[1 + \frac{3}{\cos\alpha\,\theta^3} S'\eta^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{3}{\cos\alpha \cdot \theta^3} S' + 1\right)\eta^3\right]. \tag{22}$$

Для определения постоянной в (22) найдем среднюю концентрацию по толщине слоя жидкости

$$\bar{c}(\xi) = 1/Q \int_0^H u(x,y)\,c(\xi,\eta)\, 2\pi R\,\theta\, dy. \tag{23}$$

После вычисления интеграла находим

$$\bar{c}(\xi) = \frac{3}{20} B_1 \frac{n^3(13\cos\alpha\,\theta^3 + 6S')}{n_o^3 \cos\alpha} \exp\left(\frac{6}{n_o^2 \cos^2\alpha} S\right). \tag{24}$$

При $\xi = 0$ имеем $\bar{c} = 1$,

т.е. $$B_1 = \frac{20}{3} \cdot \frac{\cos\alpha}{(13\cos\alpha + 6S'(0)}\exp\left[-\frac{6}{n_0^2\cos^2\alpha}S'(0)\right]. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (22), окончательно получаем

$$c(\xi,\eta) = \frac{20}{3}\frac{\cos\alpha}{(13\cos\alpha + 6S'(0))}\exp\left[-\frac{6}{n_0^2\cos^2\alpha}S(0) - S)\right]B_2; \quad (26)$$

$$B_2 = 1 + \frac{3}{\cos\alpha\cdot\theta^3}S'\eta^2 - (1 + \frac{3}{\cos\alpha\cdot\theta^3}S')\cdot\eta^3. \quad (27)$$

С помощью (26) легко может быть найден также коэффициент массоотдачи в жидкости.

Вывод. Найдено решение уравнения конвективной диффузии для стекающего слоя жидкости по конической поверхности.

Литература

1. Собин В.М., Устинов М.Д., Семенов А.С. Задача массообмена при обезвоздушивании вискозы в стекающем слое. – В сб.: Химия и химическая технология. Минск, вып. 13,1978, с. 89. 2. Воронцов Е.Г., Тананайко Ю.М. Теплообмен в жидкостных пленках. Киев, 1972, с. 16. 3. Горшков А.С., Цирлин А.М., Семенов П.А. Решение уравнения конвективной диффузии для восходящего течения тонкого слоя жидкости при степенном законе изменения скорости. – ТОХТ, 1970, в. 5, с. 631.