

7. Авдеев Н. Я. Об аналитическом методе расчета седиментометрического анализа / Н. Я. Авдеев. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов, гос. универ., 1964. – 202 с.

8. Шифрин К. С. О вычислении радиационных свойств облаков // Труды ГГО им. А.И. Воейкова. – 1955. – Вып. 46 (108). – С. 5–33

9. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statistics. 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.

10. Кудрявцев А. А. О представлении гамма-экспоненциального и обобщенного отрицательного биномиального распределений // Информатика и ее применения. – 2019. – Т. 13. – Вып. 4. – С. 76–80.

11. Королев В. Ю., Крылов В. А., Кузьмин В. Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров // Информатика и ее применения. – 2011. – Т. 5. – Вып. 1. – С. 31–38.

12. Кудрявцев А. А. Априорное обобщенное гамма-распределение в байесовских моделях баланса // Информатика и ее применения. – 2019. – Т. 13. – Вып. 3. – С. 27–33.

13. Левданский Э. И., Волк А. М., Плехов И. М. О законе распределения частиц при дроблении // ТОХТ. – 1986. – № 5. – С. 672–677.

14. Волк А. М. Обобщенное гамма-распределение // Актуальные проблемы информатики: Сб. трудов VI Междун. науч. конф. (26–30 окт. 1998 г., Минск): В 3 ч. Ч.2. – Мн.: БГУ, 1998. – С. 426–432.

15. Волк А. М. Статистическая оценка параметров обобщенного гамма-распределения // Труды БГТУ. – 2016. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 10–13.

УДК 535+539.196.5+517.925

Проф. В.А. Савва; асп. С.А. Банжак  
(БГТУ, г. Минск)

## **ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НАСЕЛЕННОСТЕЙ УРОВНЕЙ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ КОГЕРЕНТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ**

Предложенный алгоритм использует два пространства: энергия – время, где записаны динамические уравнения для искомым функций  $a_n(t)$ , и спектральное пространство Фурье этих функций. Алгоритм приводят к точному аналитическому решению, к дискретному вероятностному распределению частиц по энергетическим уровням и пока-

зывает, что в режиме когерентного возбуждения колебания населенностей уровней квантовых систем могут быть и непериодическими.

Динамические уравнения в безразмерных переменных

$$-i \frac{da_n(t)}{dt} = f_{n+1} e^{-i\varepsilon_{n+1}t} a_{n+1}(t) + f_n e^{+i\varepsilon_n t} a_{n-1}(t); \quad a_n(t=0) = \delta_{n,0}; \quad n = \overline{0, N}; \quad (1)$$

описывают возбуждение  $N + 1$ -уровневой квантовой системы,  $N$  переходов которой взаимодействуют с излучением. Коэффициенты  $f_n, \varepsilon_n$  уравнений определяют физические характеристики частиц:  $f_n$  – дипольные моменты переходов, описывающие «силу» взаимодействия  $n$ -го перехода с излучением,  $\varepsilon_n$  – отстройку собственной частоты перехода от частоты возбуждающего излучения. В другом, дискретном Фурье пространстве формируются Фурье спектры  $F_n(x)$  искомым амплитуд  $a_n(t)$  вероятности найти квантовую частицу на уровне с энергией  $E_n$  в момент времени  $t$ .

Первый шаг алгоритма состоит в построении пространства Фурье и оснащении его необходимыми структурами. Пространство полностью характеризуется задаваемой дискретной функцией  $\sigma(x)$ , где  $x$  – ее безразмерный дискретный спектральный аргумент, представляющий её Фурье частоты. Если квантовая система имеет три уровня с двумя радиационными переходами  $E_0 \leftrightarrow E_1 \leftrightarrow E_2$ , на которые действует излучение, можно, например, сформировать такое Фурье пространство:

$$x = \{0, 1, \sqrt{7}\}; \quad \sigma \left\{ \frac{1}{2} - a, a, \frac{1}{2} \right\}; \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Три значения дискретной функции содержат дополнительный параметр  $a$ , что приводит к решению не для единственной квантовой системы, но для однопараметрического  $a$ - семейства разнообразных квантовых частиц. Пространство Фурье (2) неоднородно, т. е. спектральный аргумент  $x$  имеет неравномерную «сетку». Кроме того, Фурье частоты здесь взаимно несоизмеримы, что должно проявиться в непериодических колебаниях населенностей уровней таких систем.

Далее, используя  $\sigma(x)$  в качестве весовой функции, строим в пространстве Фурье классическим методом Грама-Шмидта последовательность дискретных ортогональных нормированных полиномов

$$\hat{p}_0(x) \equiv 1, \quad \hat{p}_1(x) = \frac{1}{d_1} \left( x - a - \frac{\sqrt{7}}{2} \right), \quad (3)$$

$$\hat{p}_2(x) = \frac{1}{d_2} \left( \begin{array}{l} \frac{1}{4}(7 - 4a(-1 + \sqrt{7} + a))x^2 + \\ + \frac{1}{4}(-7\sqrt{7} + 2a(5 + \sqrt{7} + 2a))x + \\ + (4\sqrt{7} - 7) \end{array} \right)$$

с нормами

$$d_1 = \sqrt{\frac{7}{4} + a(1 - \sqrt{7} - a)} \quad (4)$$

$$d_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2} a(1 - 2a)(7(4 - \sqrt{7}) + 4(11 - 5\sqrt{7})a - 4(4 - \sqrt{7})a^2)}.$$

Спектры Фурье  $F_n(x)$  выражаются через  $\sigma(x)$  и ортонормированные полиномы (3):

$$F_n(x) = \sigma(x) \hat{p}_0 \hat{p}_n(x); \quad n = \{0, 1, 2\}; \quad x = \{0, 1, \sqrt{7}\}. \quad (5)$$

Алгоритм использует кроме того трехчленные рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют ортогональные полиномы:

$$\bar{f}_{n+1} \hat{p}_{n+1}(x) + \bar{f}_n \hat{p}_{n-1}(x) = [rx + s_n] \hat{p}_n(x); \quad n = \{0, 1, 2\}; \quad \bar{f}_1 = 1. \quad (6)$$

Коэффициенты  $\bar{f}_n(a)$ ,  $r(a)$ ,  $s_n(a)$  этих соотношений легко найти для конечной последовательности  $N+1$  полиномов. Приведем их для частного случая квантовой системы с параметром  $a = 1/\sqrt{7}$ :

$$\bar{f}_2 = \frac{28 \cdot 7^{1/4} \sqrt{6(98 - 29\sqrt{7})}}{(17 + 4\sqrt{7})^2} \approx 0.6763; \quad r = \frac{1}{\sqrt{\frac{17}{28} + \frac{1}{\sqrt{7}}}} \approx 1.00753, \quad (7)$$

$$s_0 = r \left( -\frac{9}{2\sqrt{7}} \right); \quad s_1 = r \left( \frac{1}{826} (6524 - 2899\sqrt{7}) \right); \quad s_2 = r \left( \frac{3}{59} \right) (-175 + 62\sqrt{7})$$

Роль коэффициентов рекуррентных соотношений в дискретном алгоритме очень важна – они обеспечивают связи между функциями в обоих пространствах, как будет показано ниже. Построением дискретной функции  $\sigma(x)$ , а также определяемых ею дискретных полиномов  $\{\hat{p}_n(x)\}_{n=0}^N$  как и коэффициентов рекуррентных соотношений завершается формирование и оснащение спектрального пространства Фурье.

Второй шаг алгоритма это нахождение искоемых амплитуд  $a_n(t)$  вероятности в пространстве энергия-время. Амплитуды выражаются через дискретное Фурье преобразование, связывающее функции  $a_n(t)$  с их Фурье образами – спектрами  $F_n(x)$ :

$$a_n(t) = e^{is_n t} \sum_{x=0}^2 F_n(x) e^{ir_x t}. \quad (8)$$

Фурье преобразование содержит как спектры, так и коэффициенты рекуррентных соотношений, оно представляет собой конечную сумму, ее вычисление не встречает принципиальных трудностей. Амплитуды  $a_n(t)$  находятся без интегрирования.

Полученное решение описывает возбуждение квантовых систем, обладающих построенным пространством Фурье. Естествен вопрос: какие физические характеристики имеют эти квантовые системы? Ответ дают коэффициенты рекуррентных соотношений. Подставив решение в систему динамических уравнений (1), получаем, что уравнения удовлетворяются, если их коэффициенты таковы:

$$f_n = \bar{f}_n; \quad \varepsilon_n = s_n - s_{n-1}. \quad (9)$$

Это взаимно-однозначное соответствие между коэффициентами уравнений (слева) и известными коэффициентами рекуррентных соотношений (справа), принадлежащими пространству Фурье. Построив первоначально пространство Фурье, спектры, решение уравнений, теперь мы знаем, каким квантовым системам принадлежит решение. Это частицы с  $f_1 = 1$ ;  $f_2 \approx 0.676$ ;  $\varepsilon_1 \approx 0.316$ ;  $\varepsilon_2 \approx 0.836$ . Системы имеют не эквидистантно расположенные энергетические уровни. Это более реалистичная модель молекулы. Решение для не эквидистантных моделей не удавалось ранее получить методами высшей (непрерывной) математики, в том числе используя известные ортогональные полиномы.

Третий шаг алгоритма состоит в получении дискретного вероятностного распределения частиц по уровням энергии. Амплитуды вероятности не являются наблюдаемыми величинами, но определяют экспериментально измеряемую величину – вероятностное распределение

$$\rho_n(t) = a_n^*(t) a_n(t) \quad (10)$$

частиц по уровням. Оно описывает колебания населенностей. Точное распределение представлено ниже, а также на рисунке, и показывает

непериодические колебания населенностей вследствие несоизмеримости частот  $\omega_0 = r$ ,  $\omega_1 = r\sqrt{7}$ ,  $\omega_2 = r(1 - \sqrt{7})$ :

$$\rho_0(t) = \frac{1}{14} \left\{ 11 - 2\sqrt{7} - (4 - 2\sqrt{7}) \cos \omega_0 t + (7 - 2\sqrt{7}) \cos \omega_1 t + 2\sqrt{7} \cos \omega_2 t \right\},$$

$$\rho_1(t) = \frac{1}{2478} \left\{ 19319 - 6982\sqrt{7} - 18(908 - 349\sqrt{7}) \cos \omega_0 t - 45(175 - 62\sqrt{7}) \cos \omega_1 t + 10(490 - 209\sqrt{7}) \cos \omega_2 t \right\}, \quad (11)$$

$$\rho_2(t) = \frac{-2}{177} \left\{ 671 - 262\sqrt{7} - (609 - 237\sqrt{7}) \cos \omega_0 t + 87\sqrt{7} \cos \omega_1 t + (175 - 62\sqrt{7}) \cos \omega_2 t \right\}.$$

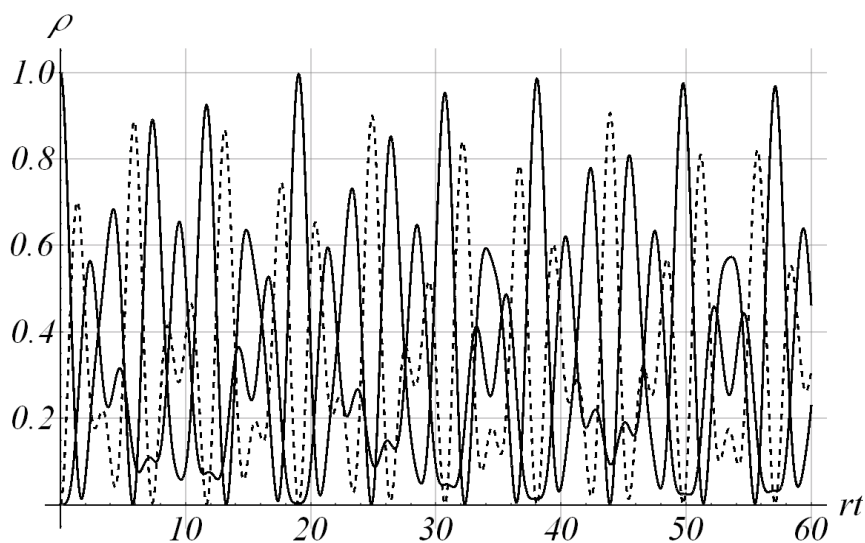


Рисунок 1 – Непериодические колебания населенностей уровней

УДК 004.023

Преп. К.В. Керус  
(филиал УО БГТУ ГПК, г. Гомель)

## МЕТОДЫ И СРЕДСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ ДЛЯ ЗАДАЧ ЭНЕРГЕТИКИ

С учетом технического прогресса и новейших разработок в сфере автоматизации электроснабжения, острыми становятся вопросы не только обеспечения потребителей электроэнергией должного качества, но и так же вопросы устойчивости электроэнергетических систем к различного вида авариям. Ранее использовавшийся расчетный метод состояния ЭЭС устарел и сейчас происходит переход к активному управлению режимами работы энергосистемы с помощью ком-