ских функций переносятся и на почти периодические.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарева С.В., Пыжкова О.Н. К вопросу о дробных производных Вейля./ Материалы 85-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 1-13 февраля 2021 г.– Минск: БГТУ, 2021. С. 143 – 145.

2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

3. Oldham, K. and Spanier, J. The Fractional Calculus – Publisher: Academic Press, 1974. – 234 p.

УДК 517.444

Доц. Г. С. Ромащенко
(БГУ, г. Минск)

О ПОДОБИИ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В работе описаны достаточные условия подобия вольтеррового оператора вида

$$K : f \rightarrow \int_0^x K(x,t)f(t)dt, \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \quad (1)$$

оператору $J \otimes B$ в пространствах Соболева вектор-функций

$W_p^k[0,1] \otimes C^n$, где $J : f \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ – оператор интегрирования, а B – невырожденная $n \times n$ -матрица.

Подобие операторов такого вида в пространствах $L_2[0,1] \otimes C^n$ изучалось в работах Сахновича [1], Хилла [2] и Маламуда [3]. Именно, Л. А. Сахнович [1] нашел достаточные условия подобия K и $J \otimes B$ с $B = (I_{n_1}, -I_{n_2})$. Л. Т. Хилл получил достаточные условия подобия оператора свертки $K : f \rightarrow \int_0^x K(x-t)f(t)dt$ оператору $J \otimes B$ с $B = I_n$.

М. М. Маламуд в [3] получил достаточное условие подобия K вида (1) и $J \otimes B$ для произвольной $B = B^* = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$. Здесь мы обобщаем этот результат на случай пространства Соболева.

Напомним, что $W_p^k[0,1] \otimes C^n$ ($k \in Z_+, 1 \leq p \leq +\infty$) обозначает пространство вектор-функций $f(x)$, имеющих обобщенные производные до порядка k , которые принадлежат $L_p[0,1] \otimes C^n$.

Теорема 1. Пусть $n \times n$ -матричное ядро $K(x,t)$ оператора K удовлетворяет следующим условиям:

1. $B = K(x,x)$ – постоянная невырожденная матрица с действительным спектром и простыми элементарными делителями;
2. $K(x,t)$ – абсолютно непрерывно по x для почти всех $t \in [0,1]$ и $K_1(x,t) = D_x K(x,t) \in L_\infty(\Omega) \otimes C^{n \times n}$;
3. $K(x,t)$ – абсолютно непрерывно по t для почти всех $x \in [0,1]$ и $D_t K_1(x,t) = D_t D_x K(x,t) \in W_\infty^k(\Omega) \otimes C^{n \times n}$, где $\Omega = \{0 \leq t \leq x \leq 1\}$.

Тогда оператор K подобен оператору $J \otimes B$ в $W_p^k[0,1] \otimes C^n$ ($k \in Z_+, 1 \leq p \leq +\infty$).

Набросок доказательства. Мы следуем доказательству теоремы 3.1 в [3]. В силу условия 1, матрица B диагонализуема, поэтому мы можем предполагать, что матрица B^{-1} в (2) диагональна и $B = B^* = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$ – невырожденная диагональная матрица с различными собственными значениями $\lambda_j = \bar{\lambda}_j$ с кратностями n_j ($1 \leq j \leq r$).

В [3] было показано, что оператор K^{-1} с естественной областью определения $D(K^{-1}) = W_{p,0}^1[0,1] \otimes C^n$ подобен в $L_p[0,1] \otimes C^n$ оператору

$$L_0 : f \rightarrow B^{-1} \frac{df}{dx} + Q(x)f(x) - \int_0^x M(x,t)f(t)dt, D(L_0) = W_{p,0}^1[0,1] \otimes C^n,$$

где $Q(x)$ имеет вид: $Q(x) = (Q_{ij}(x))_{i,j=1}^r$, $Q_{ii} = 0 \quad \forall x \in [0,1]$ ($1 \leq i \leq r$).

Здесь $W_{p,0}^1[0,1]$ обозначает подпространство соболевского пространства $W_p^1[0,1]$: $W_{p,0}^1[0,1] = \{f(x) : f(x) \in W_p^1[0,1], f(0) = 0\}$.

Далее, в [4] было установлено существование в пространстве $L_p[0,1] \otimes C^n$ треугольного оператора

$$I + R : f(x) \rightarrow f(x) + \int_0^x R(x,t)f(t)dt \text{ с } n \times n\text{-матричным ядром } R(x,t),$$

сплетающего операторы L_0 и $B^{-1} \otimes D_0$, где D_0 – сужение оператора $D = \frac{d}{dx}$ на $W_{p,0}^1[0,1]$. Именно, ядро $R(x,t)$ является решением системы

$$\begin{aligned} \lambda_i R_{ij}(x,t) = & \frac{\lambda_i Q_{ij}(\xi_{ij}(x,t))}{\lambda_i - \lambda_j} + \int_{\xi_{ij}(x,t)}^x \sum_{s=1}^r Q_{is}(\xi) R_{sj}(\xi, (\xi-x)k_{ij} + t) d\xi + \\ & + \int_{\xi_{ij}(x,t)}^x M_{ij}(\xi, (\xi-x)k_{ij} + t) d\xi + \sum_{s=1}^r \int_{\xi_{ij}(x,t)}^x (M_{is} * R_{sj})(\xi, (\xi-x)k_{ij} + t) d\xi \end{aligned} \quad (2)$$

в треугольнике ΔABC , образованном линиями

$$AC: x-1 = t/k_{\min}, \quad AB: x=t, \quad BC: x-1 = tk_{\min}.$$

Здесь $k_{ij} = \lambda_i \lambda_j^{-1}$, $(i, j \in \{1, \dots, r\})$, $k_{\min} = \max\{k_{ij} : k_{ij} \in (0,1), 1 \leq i, j \leq r\}$,

$$a = k_{\min} / (k_{\min} - 1), \quad b = 1 + |a|, \quad \xi_{ij}(x,t) = \begin{cases} (\lambda_j x - \lambda_i t)(\lambda_j - \lambda_i)^{-1} & i \neq j; \\ a + (1-a)(x-t) & i = j. \end{cases}$$

В (3) мы предположили, что $\lambda_i Q_{ij}(\xi_{ij}(x,t))(\lambda_i - \lambda_j)^{-1} = 0$ при $i = j$ и использовали обозначение $(M_{is} * R_{sj})(x,t) = \int_t^x M_{is}(x,\beta) R_{sj}(\beta,t) d\beta$. Для доказательства разрешимости (2) мы используем метод математической индукции и неравенство Гронуолла.

Следствие 2. Пусть $n \times n$ -матричное ядро имеет вид $K(x,t) = I_n + \sum_{j=1}^N \Phi_j(x) \Psi_j(x-t)$. Здесь $\Phi_j(x)$, $\Psi_j(x)$ – $n \times n$ -матричные функции со значениями из $W_{\infty}^{k+2}[0,1]$ и такие, что $\sum_{j=1}^N \Phi_j(x) \Psi_j(0) = 0, x \in [0,1]$. Тогда ядро $K(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы, и, следовательно, K подобен оператору $J \otimes I_n$ в $W_p^k[0,1] \otimes C^n$.

Напомним, что кратность спектра линейного ограниченного оператора $T(\in [X])$ определяется как число (или символ ∞) $\mu_T := \inf \dim E$, где инфимум берется по всем порождающим подпространствам $E \subseteq X$. Теорема 1 позволяет нам подсчитать кратность μ_K для K , подобного $J \otimes B$:

Следствие 3. Предположим, что число положительных собственных значений матрицы $B = K(x,x)$ равно p , а число отрицательных собственных значений равно q . Тогда кратность μ_K оператора

K в $W_{p,0}^k[0,1] \otimes C^n = \{f \in W_p^k[0,1] \otimes C^n : f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$ равна $\max\{p, q\}$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda_j > 0$ при $1 \leq j \leq p$ и $\lambda_j < 0$ при $p+1 \leq j \leq p+q$. Положим $B_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ и $B_2 = \text{diag}(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q})$. В этом случае И. Ю. Домановым в [4] показано, что решетка $\text{Lat } A$ инвариантных подпространств оператора $A = J \otimes B$ распадается в пространстве $W_{p,0}^k[0,1] \otimes C^n : \text{Lat } A = (\text{Lat } J \otimes B_1) \oplus (\text{Lat } J \otimes B_2)$ и $\mu_A = \max\{p, q\}$. Утверждение следствия следует из теоремы 1, если принять во внимание вид оператора преобразования.

Следствие 4. Предположим, что в условиях теоремы 1 $n = 2$ и $\sigma(B) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, где $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Тогда решетка $\text{Lat } K$ оператора K в соболевском пространстве $W_{p,0}^k[0,1] \otimes C^n$ имеет вид: $\text{Lat } K = \left\{ \bigoplus_{i=1}^2 \chi_{[a_i, 1]} W_{p,0}^k[0,1] : 0 \leq a_i \leq 1 \right\}$, и, следовательно, изоморфна квадрату.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахнович Л. А. О приведении вольтерровых операторов к простейшему виду в пространствах вектор-функций. // Укр. мат. журнал. 1962. Т. 14. С. 114 – 126.
2. Hill L. T. Spectral analysis of finite convolution operators with matrix kernels. // Integral Equations and Operator Theory. 1980. V. 3/1. P. 62 – 96.
3. Маламуд М. М. Вопросы единственности в обратных задачах для систем дифференциальных уравнений на конечном интервале. // Москва: УРСС, Труды Моск. мат. об-ва. 1999. Т. 60. С. 199 – 258.
4. Domanov I. Yu. On Cyclic and Invariant Subspace of an Operator $J \otimes B$ in the Sobolev Spaces of Vector Function. // Methods of Functional Analysis and Topology. 1999. V. 5, №1, P. 1-12.