ЦЭМИ РАН. – 2020 – № 3. – С. 4 – 27.
2. Проневич, А.Ф. Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу / А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич // Вестник института экономики НАН Беларуси. – 2021. – Вып. 2. – С. 105 – 120.
3. Курзенев, В. Экономический рост / В. Курзенев, В. Матвеенко. – СПб.: Питер, 2018. – 608 с.
4. Проневич, А.Ф. Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение / А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич // Белорусский экономический журнал. – 2020. – № 3. – С. 87 – 105.
5. Хацкевич, Г.А. Классификация Сато – Беккмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение / Г.А. Хацкевич, А.Ф. Проневич // Журнал Белорусского государственного университета. Экономика. – 2020. – № 2. – С. 4 – 17.
6. Проневич, А.Ф. Динамические производственные функции для моделирования производственных процессов, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу и Харроду научно-технический прогресс / А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич // Вестник института экономики НАН Беларуси. – 2022. – Вып. 5. – С. 9 – 2.
7. Хацкевич, Г.А. Двухфакторные ПФ с заданной предельной нормой замещения/Г.А.Хацкевич, А.Ф.Проневич, М.В.Чайковский// Экономическая наука сегодня. – 2019. – Вып.10. – С.171-182.

УДК 336.781.5

Доц. М.В. Чайковский[1]; проф. Г.А. Хацкевич[2];
доц. А.Ф. Проневич[3]
([1]БГТУ, г. Минск; [2]Институт бизнеса БГУ, г. Минск; [3]ГрГУ, г. Гродно)

ЭЛАСТИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ КАК ХАРАКТЕРИСТИКА ОТДАЧИ ОТ МАСШТАБА

В работе [1] проиллюстрировано применение дифференциального исчисления функции одной переменной как инструмента финансового анализа. В случае функции двух и более независимых переменных математическая составляющая такого анализа усложняется. В данной работе проведен анализ эластичности функции двух переменных и получен ее экономический смысл.

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух независимых аргументов. Графиком такой функции является некоторая поверхность, которая не может быть изображена на плоскости без искажений. Посему для изучения поведения функций двух переменных можно пользоваться либо сечениями (фиксировать одну из переменных и строить график полученной функции одной переменной), либо изучать линии уровня этой функции. Линиями уровня функции двух переменных называют линию, в каждой точке которой функция принимает одно и тоже постоянное значение. Для построения линий уровня требуется разрешить уравнение $f(x,y)=const$. Линия уровня – это функция, связывающая только две переменные, поэтому ее можно изобразить на плоскости. Изменяя значения постоянной, получим на плоскости семейство кривых уровня. Далее можно анализировать поведение этих линии посредством дифференциального исчисления функции одной переменной. Довольно часто при этом предполагают, что одна из переменных является зависимой от другой (например, что $y=y(x)$). Другими словами предполагают, что уравнение $f(x,y)=const$ неявным образом задает функцию $y=y(x)$. В экономике линии уровня имеют достаточно много названий (линии равного выпуска, изокванты и т.д.), но математический смысл у них у всех одинаков: линия уровня $f(x,y)=C$ состоит из точек (x,y) соответствующих одному и тому же значению функции C. Влияние же относительного изменения одного из аргументов функции двух переменных на конечное значение функции, представленное в относительной форме, характеризуется частной эластичностью

$$e_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{x}{f(x,y)} \text{ и } e_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{y}{f(x,y)}$$

по соответствующей переменной. Очевидно, что частная эластичность равна отношению предельного значения функции по данной переменной к средней величине по этой переменной. Сумма всех частных эластичностей некоторой функции называется ее полной эластичностью

$$E = e_x + e_y.$$

Проясним смысл полной эластичности функции двух переменных. Рассмотрим частный случай, когда частная эластичность по переменной, например x, является величиной постоянной. Можно доказать, что тогда этот аргумент входит в функцию в виде степенного множителя, то есть

$$z = f(x,y) = x^{e_x}\phi(y).$$

Если по отношению к исходным значениям аргумента x,y аргумент x изменится в λ раз, а аргумент y останется прежним, то

$$f(\lambda x, y) = (\lambda x)^{e_x}\phi(y) = \lambda^{e_x}x^{e_x}\phi(y) = \lambda^{e_x}f(x,y).$$

В общем случае, когда частная эластичность является переменной величиной, последнее равенство выполняется приближенно при значениях λ близких к единице. Пусть, далее, оба аргумента увеличились пропорционально в λ раз. Применяя предыдущие рассуждения для второго аргумента, можно убедиться в том, что

$$f(\lambda x, \lambda y) \approx \lambda^{e_x + e_y} f(x, y)$$

для $\lambda \approx 1$. Или используя понятие полной эластичности,

$$f(\lambda x, \lambda y) \approx \lambda^{E} f(x, y).$$

Полученное равенство показывает, что полная эластичность функции позволяет дать отдаче от масштаба числовое выражение. Пусть оба аргумента немного увеличатся с сохранением пропорций (то есть $\lambda \approx 1$, $\lambda > 1$). Тогда, если полная эластичность E>1, то значение функции увеличится более чем в λ раз

$$f(\lambda x, \lambda y) > \lambda f(x, y)$$

(возрастающая отдача от масштаба). Если E<1, то значение функции увеличится менее чем в λ раз

$$f(\lambda x, \lambda y) < \lambda f(x, y)$$

(убывающая отдача от масштаба). При E=1 значение функции изменится в той же пропорции, что и аргументы

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$$

(постоянная отдача от масштаба). Другими словами, полная эластичность функции характеризует влияние изменения масштаба аргументов на изменение масштаба (при малых изменениях масштаба).

Если равенство $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$ выполняется при любых значениях λ и любых значениях аргументов (x,y), то функция является однородной функцией, а число α называется степенью однородности функции. Можно доказать, что однородная функция удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = \alpha f.$$

Разделив обе части этого уравнения на $f(x, y)$, получим $E = \alpha$. Таким образом, полная эластичность однородной функции – постоянная величина, численно равная степени однородности функции. При этом эластичности по каждому аргументу могут быть переменными. Экономически, степень однородности α является характеристикой отдачи от масштаба:

$\alpha < 1$ – убывающая отдача;

$\alpha > 1$ – возрастающая отдача;

$\alpha = 1$ – постоянная отдача,

причем при любых изменениях масштаба аргументов, а не только при малых, как общая эластичность функции.

Коэффициенты наращения по простым и сложным процентам, к сожалению, не являются однородными функциями, поэтому полученные далее результаты будут иметь смысл только для малых колебаний переменных i и T. Для начисления простых процентов эластичность численно равна

$$E^{пр} = \frac{2iT}{1+iT}$$

достаточно незатейливой функции, что не скажешь об эластичности коэффициента наращения для случая сложных процентов

$$E^{сл} = \frac{iT}{1+i} + T\ln(1+i).$$

Анализ отдачи от масштаба с этими функциями выглядит довольно пугающим, однако, привлекая аппарат линий уровня, можно получить некоторые результаты. В частности, для случая простых процентов несложно получить уравнение линии уровня нейтральной эластичности. Другими словами, получить уравнение линии для каждой точки, которой (то есть для набора (T,i)) характерна ситуация, когда увеличение на один процент параметра приведет к изменению на один процент коэффициента наращения. Для уравнения такой линии имеем $E^{пр} = 1$ или, подставляя конкретное значение,

$$\frac{2iT}{1+iT} = 1.$$

Преобразовывая последнее уравнение, получим искомую кривую второго порядка, а именно гиперболу (точнее, ее ветвь с учетом положительности переменных)

$$i = \frac{1}{T}.$$

Получим, далее, уравнение линии уровня нейтральной эластичности для случая коэффициента наращения сложных процентов. Чтобы получить уравнение примем $E^{сл} = 1$. Подставляя значение коэффициента наращения, имеем

$$1 = \frac{iT}{1+i} + T\ln(1+i).$$

Отсюда несложно прийти к равенству

$$\frac{1}{T} = \frac{i}{1+i} + \ln(1+i) \text{ или } \frac{1}{T} = \frac{i + \left(1+i\right)\ln(1+i)}{1+i}$$

из которого непосредственно и следует уравнение линии нейтральной эластичности для случая наращения сложных процентов

$$T = \frac{1+i}{i+\left(1+i\right)\ln(1+i)} \;.$$

Понятно, что это более сложное уравнение, чем некоторая из линий второго порядка, однако используя компьютерные графические системы, можно убедиться, что линия сильно напоминает, с учетом положительности обоих аргументов, ветвь гиперболы. Следует также помнить, что эти коэффициенты не являются однородными функциями и рассматривается случай, когда оба аргумента (T,i) немного увеличатся с сохранением пропорций (то есть случай $\lambda \approx 1, \lambda > 1$). Для больших изменений эти выводы не совсем корректны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чайковский, М. В. Дифференциальное исчисление как один из инструментов финансового анализа / М. В. Чайковский // Информационные технологии: материалы докладов 84-й научно-технической конференции, посвященной 90-летнему юбилею БГТУ и Дню белорусской науки (с международным участием), Минск, 03-14 февраля 2020 г. – Минск : БГТУ, 2020. – С. 157-160.

УДК 517.948

Доц. С.В. Пономарева[1]; зав. каф. О.Н. Пыжкова[2]
([1]БГУ, г. Минск; [2]БГТУ, г. Минск)

РАЗНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Данная работа продолжает обсуждение темы дробного интегро-дифференцирования периодических функций (см [1]).

Конструкция Г. Вейля (см [2]) для периодических функций кажется наиболее подходящей из всех известных авторам видов обобщения производных на нецелые порядки дифференцирования (Римана-Лиувилля, Адамара, Грюнвальда-Летникова, Вейля, Чженя, Капуто-Герасимова и др.), т. к. сохраняет важнейшее свойство таких функций – их периодичность.

Однако с точки зрения удобства в приближенных вычислениях часто используется еще другой подход к дробному интегродифференцированию – разностный. Этот подход широко известен в теории дифференциальных уравнений целого порядка дифференцирования для функций, имеющих сложное аналитическое представление.

Для производных нецелого порядка вычисление с помощью конечных разностей было предложено еще А. Грюнвальдом и А.В. Лет-