УДК 330.4

Доц. А. Ф. Проневич[1]; проф. Г. А. Хацкевич[2];
доц. М. В. Чайковский[3]
([1]ГрГУ, г. Гродно; [2]Ин-т бизнеса БГУ, г. Минск; [3]БГТУ, г. Минск)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ НТП

Рассмотрим многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x,t), \tag{1}$$

где y – выпуск продукции, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть вектор затрат производственных ресурсов, t – параметр времени из полуоткрытого числового луча $T = [0; +\infty),$ каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на $D = G \times T,$ экономическая область $G \subset \mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}.$

В статье [1] были установлены аналитические критерии учета в задании динамической двухфакторной $(n = 2)$ ПФ (1) продуктоувеличивающего НТП, капиталодобавляющего НТП, трудодобавляющего НТП, капитало- и трудодобавляющего НТП. Позднее [2] эти результаты были использованы для установления соответствия между концепцией автономного экзогенного НТП и концепцией нейтральности НТП [3, с. 72–75], а именно, были выявлены [4 – 7] аналитические связи между понятиями продуктоувеличивающий НТП и нейтральный по Хиксу НТП, трудодобавляющий НТП и нейтральный по Харроду НТП, капиталодобавляющий НТП и нейтральный по Солоу НТП. Данная статья продолжает эти исследования: получены критерии учета автономного экзогенного НТП в задании многофакторной ПФ (1).

Для учета автономного экзогенного НТП в задании динамической многофакторной ПФ (1) будем использовать следующее понятие: НТП назовем *добавляющим по факторам производства* $x_1, \ldots, x_k,$ $k \leq n,$ если ПФ (1) можно представить в аналитическом виде

$$f(x,t) = \tilde{f}(\alpha_1(t)x_1, \ldots, \alpha_k(t)x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n), \tag{2}$$

где строго возрастающие функции $\alpha_i(t),$ $i = 1, \ldots, n,$ такие, что $\alpha_1(0) = \ldots = \alpha_n(0) = 1,$ представляют собой индексы НТП по факторам производства $x_1, \ldots, x_n,$ соответственно, а неотрицательная функция $\tilde{f}$ является дважды непрерывно дифференцируемой на области $G.$

Основной результат работы выражает следующее утверждение.

Теорема 1. *Многофакторная ПФ* (1) *учитывает добавляющий по факторам производства* $x_1, \ldots, x_k,$ $k \leq n,$ *НТП тогда и только то-*

гда, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по факторам $x_1,\ldots,x_k,\ k\le n,$ *т.е.*

$$\partial_{x_i}\ln f(x,t)=\sum_{i=1}^{k}\beta_i(t)E_{x_i}(f), \tag{3}$$

где $\beta_i,\ i=1,\ldots,k,$ *– некоторые функции, зависящие только от параметра НТП* t, *а* $E_{x_i}(f)=\dfrac{x_i}{f(t,x)}\cdot\partial_{x_i}f(t,x)$ *есть эластичности выпуска продукции по факторам производства* $x_i,\ i=1,\ldots,k,$ *соответственно.*

Доказательство. *Необходимость*. Если ПФ (1) учитывает добавляющий по факторам производства $x_1,\ldots,x_k,\ k\le n,$ НТП, то, на основании представления (2), находим темп прироста по параметру НТП

$$\partial_t\ln f(x,t)=\frac{\partial_t f(x,t)}{f(x,t)}=\frac{\partial_t\tilde f(\alpha_1(t)x_1,\ldots,\alpha_k(t)x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)}{\tilde f(\alpha_1(t)x_1,\ldots,\alpha_k(t)x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)}=$$

$$=\frac{1}{f(x,t)}\sum_{i=1}^{k}\partial_{\xi_i}\tilde f(\xi_1,\ldots,\xi_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\Big|_{\substack{\xi_j=\alpha_j(t),\\ j=1,\ldots,k}}\cdot\partial_t(\alpha_i(t)x_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i'(t)\cdot\frac{x_i}{f(x,t)}\partial_{\xi_i}\tilde f(\xi_1,\ldots,\xi_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\Big|_{\substack{\xi_j=\alpha_j(t),\\ j=1,\ldots,k}}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i'(t)\cdot E_{x_i}(f),$$

т.е. имеет место тождество (3) при функциях $\beta_i(t)=\alpha_i'(t),\ i=1,\ldots,k.$

Достаточность. Пусть ПФ (1) удовлетворяет тождеству (3). Тогда она будет решением дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\partial_t f-\sum_{i=1}^{k}\beta_i(t)x_i\,\partial_{x_i}f=0. \tag{4}$$

Для уравнения (4) запишем характеристическую систему

$$\frac{dx_1}{-\beta_1(t)x_1}=\ldots=\frac{dx_k}{-\beta_k(t)x_k}=\frac{dx_{k+1}}{0}=\ldots=\frac{dx_n}{0}=\frac{dt}{1}. \tag{5}$$

Из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{-\beta_i(t)x_i}=\frac{dt}{1},\quad i=1,\ldots,k,$$

разделяя переменные, находим первые интегралы системы (5)

$$\ln x_i+\int\beta_i(t)\,dt=\tilde C_i,\ i=1,\ldots,k,$$

или

$$x_i\exp\int\beta_i(t)\,dt=C_i,\quad i=1,\ldots,k, \tag{6}$$

где $C_i=\exp\tilde C_i$, а $\tilde C_i,\ i=1,\ldots,k,$ есть произвольные вещественные постоянные. Функции (6) являются функционально независимыми первыми интегралами дифференциальной системы (5).

Из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{0} = \frac{dt}{1}, \quad i = k+1, \ldots, n,$$

находим функционально независимые первые интегралы системы (5)

$$x_i = C_i, \quad i = k+1, \ldots, n, \tag{7}$$

где C_i, $i = k+1, \ldots, n$, есть произвольные вещественные постоянные.

Первые интегралы (6) и (7), будучи функционально независимыми, образуют интегральный базис дифференциальной системы (5). Тогда общее решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (4) имеет аналитический вид (2), где $\tilde{f}$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция от n переменных, а индексы НТП по факторам производства x_i равны

$$\alpha_i(t) = \exp \int \beta_i(t)\, dt, \ i = 1, \ldots, k.$$

Следовательно, на основании (2) получаем, что ПФ (1) учитывает добавляющий по факторам производства $x_1, \ldots, x_k$, $k \le n$, НТП.

В случае, когда индексы НТП по факторам $x_1, \ldots, x_k$, $k \le n$, равны между собой, т.е. $\alpha_1(t) \equiv \ldots \equiv \alpha_k(t)$, из Теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Динамическая многофакторная ПФ* (1) *учитывает добавляющий по факторам* $x_1, \ldots, x_k$, $k \le n$, *НТП с равными индексами НТП, если и только если верно тождество*

$$\frac{\partial_t f(x,t)}{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \partial_{x_i} f(x,t)} = \alpha_1(t),$$

где α_1 *есть некоторая функция, зависящая только от НТП.*

Из теоремы 1 при $k = 1$ получаем

Следствие 2. *Динамическая многофакторная ПФ* (1) *учитывает добавляющий по фактору производства* x_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, *НТП, если и только если имеет место тождество*

$$\frac{\partial_t f(x,t)}{x_k \cdot \partial_{x_k} f(x,t)} = \alpha(t),$$

где α *есть некоторая скалярная функция, которая зависит только от параметра НТП.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Проневич, А.Ф. Продуктоувеличивающий научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу / А.Ф. Проневич // Вестник

ЦЭМИ РАН. – 2020 – № 3. – С. 4 – 27.

2. Проневич, А.Ф. Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу / А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич // Вестник института экономики НАН Беларуси. – 2021. – Вып. 2. – С. 105 – 120.

3. Курзенев, В. Экономический рост / В. Курзенев, В. Матвеенко. – СПб.: Питер, 2018. – 608 с.

4. Проневич, А.Ф. Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение / А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич // Белорусский экономический журнал. – 2020. – № 3. – С. 87 – 105.

5. Хацкевич, Г.А. Классификация Сато – Беккмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение / Г.А. Хацкевич, А.Ф. Проневич // Журнал Белорусского государственного университета. Экономика. – 2020. – № 2. – С. 4 – 17.

6. Проневич, А.Ф. Динамические производственные функции для моделирования производственных процессов, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу и Харроду научно-технический прогресс / А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич // Вестник института экономики НАН Беларуси. – 2022. – Вып. 5. – С. 9 – 2.

7. Хацкевич, Г.А. Двухфакторные ПФ с заданной предельной нормой замещения/Г.А.Хацкевич, А.Ф.Проневич, М.В.Чайковский// Экономическая наука сегодня. – 2019. – Вып.10. – С.171-182.

УДК 336.781.5

Доц. М.В. Чайковский[1]; проф. Г.А. Хацкевич[2];
доц. А.Ф. Проневич[3]
([1]БГТУ, г. Минск; [2]Институт бизнеса БГУ, г. Минск; [3]ГрГУ, г. Гродно)

ЭЛАСТИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ КАК ХАРАКТЕРИСТИКА ОТДАЧИ ОТ МАСШТАБА

В работе [1] проиллюстрировано применение дифференциального исчисления функции одной переменной как инструмента финансового анализа. В случае функции двух и более независимых переменных математическая составляющая такого анализа усложняется. В данной работе проведен анализ эластичности функции двух переменных и получен ее экономический смысл.

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух независимых аргументов. Графиком такой функции является некоторая поверхность, которая не может быть изображена на плоскости без искажений. Посему для изу-