$$\dot{x}_1(t,k) = (a_{11} + b_1 q_1)x_1(t,k) + (a_{12} + b_1 q_2)x_2(t,k),$$
$$x_2(t,k+1) = (a_{21} + b_2 q_1)x_1(t,k) + (a_{22} + b_2 q_2)x_2(t,k).$$

Для выполнения первого условия теоремы 1 возможны следующие способы выбора регулятора (5):

$$1)\ q_2 = -\frac{a_{12}}{b_1}; \quad 2)\ q_1 = -\frac{a_{21}}{b_2}.$$

Тогда в первом случае при условии $\left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1$ коэффициент q_1 можно выбрать следующим образом:

$$\text{при } b_1 > 0: \quad q_1 < -\frac{a_{11}}{b_1}, \quad \text{при } b_1 < 0: \quad q_1 > -\frac{a_{11}}{b_1}.$$

Во втором случае при условии $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0$ коэффициент q_2 будем выбирать так, чтобы $|a_{22} + b_2 q_2| < 1$.

Полученный регулятор обеспечит согласно теореме 1 сильную асимптотическую устойчивость замкнутой системы (3), (4), (5). Таким образом, достаточное условие стабилизируемости можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Для того, чтобы система (3), (4) была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (5), достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1; \quad 2)\ a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

Аналогично проводится построение стабилизирующего регулятора для обеспечения (α,γ)-устойчивости системы.

УДК 519.624

Доц. И.Ф. Соловьева
(БГТУ, г. Минск)

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ ПЕРЕХОДНЫМИ СЛОЯМИ

Использование в механике жидкости и газа потоков бесконечно, ведь это и железные дороги, самолеты, электростанции, паровые и газовые турбины и т. д. Во всех этих явлениях пограничный слой играет далеко не последнюю роль. Явления потоков были описаны дифференциальными уравнениями в частных производных Навье-Стокса.

Основные проблемы решения задач такого рода заключаются в наличии у них малого параметра $\varepsilon > 0,$ стоящего возле производной высшего порядка уравнения, вследствие чего в граничной задаче возникают пограничные или внутренние переходные слои. Решение и его градиент неограниченно возрастают, особенно вблизи конечной точки заданного отрезка [1].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с пограничным слоем и проанализируем при этом действие малого параметра ε:

$$\varepsilon y'' = p(x)\, y + f(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0, \quad p(x) > 0$. Данное уравнение может возникать в случае смешанной граничной задачи для уравнения теплопроводности. Коэффициент $\varepsilon > 0$ – малый параметр при старшей производной. Численное решение уравнения (1) является неблагоприятным в вычислительном отношении, т. к. решение соответствующего однородного уравнения $\varepsilon z'' = p(x)\, z$ будет резко возрастать при приближении к правому концу отрезка. Его поведение при этом будет сравнимо с поведением функции $e^{\int_0^x \sqrt{\frac{p(t)}{\varepsilon}}dt}$. Примером такого рода задач служат задачи магнитной гидродинамики с большими числами Хартмана.

Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, имеющую постоянную матрицу A.

$$\begin{cases} y'(t) = A\, y(t) + f(t), \quad t > 0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $A = \left(a_{ij}\right)_1^n, \quad f(t) = (f_1(t),\ f_2(t), \dots, f_n(t))^T, \quad y_0 \in R^n$.

К таким задачам можно отнести задачи, описывающие всевозможные диффузионно-конвективные процессы, например, о вычислении сопротивления трения корабля и множество других подобных задач. Это достаточно трудные в численном решении задачи. Как правило, они имеют один или несколько пограничных или внутренних переходных слоев, и до сих пор вызывают к себе повышенный интерес. Это происходит из-за быстрого развития науки и техники, и полученных вследствие этого многочисленных приложений.

Методы для решения такого рода задач должны обладать гибкими вычислительными свойствами, имеющими возможность обойти трудности решения систем линейных алгебраических уравнений достаточно высокого порядка, регулировать вопросы, связанные с организацией итерационных процессов, и обеспечивать их устойчивость и сходимость.

Для решения этих задач предлагается модификация метода множественной двусторонней пристрелки, при которой ослабляются условия на локализацию начальных приближений; уменьшается число неизвестных, что ведет к некоторому упрощению решения.

Рассмотрим систему нелинейных о. д. у. первого порядка с малым параметром при производной, приведенную к нормализованному виду:

$$y' = f(t, y, \varepsilon),\quad a \le t \le b \tag{3}$$

с присоединенным к ней двухточечным граничным условием

$$g(y(a),\ y(b)) = 0, \tag{4}$$

где $y:[a,b] \to R^n$, $y:[a,b] \to R^n \times R \to R^n$, $\varepsilon > 0$, $g: R^n \times R^n \to R$.

Предполагаем, что отображения f и g такие, что задача (3)–(4) имеет единственное решение и обладает необходимой гладкостью.

Используем модификацию метода множественной двухсторонней пристрелки.

Строим пристрелочные задачи Коши в прямом для нахождения функций $u(t, y_{2j-1}),\ y_{2j-1} \in R^n$ в прямом и функций $v(t, y_{2j-1}),\ y_{2j-1} \in R^n$ в обратном направлениях:

$$\begin{cases} u' = f(t,u),\ t \in J_{2j-1}^{(+)} = \left\{ t_{2j-1} \le t \le t_{2j} \right\}, \\ u(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in R^n, \end{cases} \quad \begin{cases} v' = f(t,v), \quad t \in J_{2j-1}^{(-)} = \{t_{2j-1} \ge t \ge t_{2j-2}\}, \\ v(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1},\ y_{2j-1} \in R^n,\ j = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где t_{2j-1} – точки пристрелки; t_{2j} – точки сшива решений; y_{2j-1} – параметры пристрелки.

Для полученных пристрелочных задач Коши составляем замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} u(t_{2j}, y_{2j-1}) - v(t_{2j}, y_{2j+1}) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ g(v(t_0, y_1), u(t_{2m}, y_{2m-1})) = 0. \end{cases}$$

Для решения задач Коши использовали метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности с автоматическим выбором шага h=10^{-4}.

Искомое решение $y(t)$ представлено в виде:

$$\underset{a \le t \le b}{y(t)} = \begin{cases} v(t,\ y_{2j-1}^*),\ t \in J_{2j-1}^{(-)}, \\ u(t,\ y_{2j-1}^*),\ t \in J_{2j-1}^{(+)},\ j = \overline{1, m} \end{cases} \tag{5}$$

Функция $u(t,\ y_{2j-1}^*)$ – решение задачи Коши в прямом направлении, а функция $v(t,\ y_{2j-1}^*)$ – в обратном направлении.

Для решения замыкающей системы

$$u(t_{2j}, y_{2j-1}) - v(t_{2j}, y_{2j+1}) = 0, \;\; j = \overline{1, m-1}, \qquad (6)$$
$$g(v(t_0, y_1),\; u(t_{2m}, y_{2m-1})) = 0$$

использовался модифицированный метод Ньютона.

Замыкающую систему вида представим в операторной форме

$$H(z) = 0,$$

где $H : R^N \times R^N, \quad N = mn, \quad z = (y_1^T, y_2^T, ..., y_{2m-1}^T)^T.$

Свойства замыкающих систем уравнений зависят от правой части *f* исходного уравнения, формы граничных условий, области интегрирования [*a, b*], точек пристрелки $u(t, y_{2j-1})$ и траекторий пристрелки $u(t, y_{2j-1}), v(t, y_{2j-1})$. Эти свойства характеризуются матрицами Якоби для соответствующих отображений *H*.

При решении исходной системы граничная задача заменяется задачами Коши, благоприятными в вычислительном отношении. К ним можно отнести методы Рунге-Кутта, а также методы, обладающие B или D-устойчивостью [2]. Параметры пристрелки определяются как решения замыкающей системы (6).

Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной вида [3]

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1. \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Задачи вида (7), (8) являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов. Они называются сингулярно возмущенными. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. опять получаем пограничный слой. Причина трудностей решения задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости данного численного процесса.

Для численного решения граничных задач с пограничным слоем вида (7), (8) в этом случае предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки, сводящий исходную граничную задачу к совокупности задач Коши. Этот метод позволяет применить единый подход к решению граничных задач с одним и двумя пограничными слоями.

Рассмотрим систему линейных о. д. у. второго порядка с малым параметром при старшей производной и с пограничным слоем

$$\varepsilon\, y''(x) + A(x)\, y'(x) + B\,(x)\, y(x) = f(x), \quad \alpha \le x \le \beta, \quad \varepsilon > 0 \qquad (9)$$

с присоединенным к ней двухточечным граничным условием

$$\begin{aligned} A_1\, y'(\alpha) + A_2\, y(\alpha) = a, \\ B_1\, y'(\beta) + B_2\, y(\beta) = b, \end{aligned} \qquad (10)$$

где $A(x), B(x)$ –произвольные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, элементы которых кусочно-непрерывные функции, зависящие от x, $f:[\alpha,\beta] \to C^n$, A_1, A_2, B_1, B_2 – известные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, причем такие, что прямоугольные матрицы (A_1, A_2) и (B_1, B_2) имеют ранги: $rang[A_1, A_2] = n$, $rang[B_1, B_2] = n$, $\varepsilon > 0$ – фиксированный малый параметр при старшей производной. Требуется определить $y:[\alpha,\beta] \to C^n$ так, чтобы выполнялись заданные условия (9) - (10).

Решение данной системы получаем с помощью метода унитарной прогонки, также предусматривающего переход исходной граничной задачи к совокупности трех задач Коши, к решению которых опять применяем метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974. 712 с.

2. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 200 с.

3. Соловьева И. Ф. Влияние пограничных слоев на решение граничных задач с малым параметром при старшей производной // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информат. С. 12 – 14.

УДК 519.71

Доц. И.К. Асмыкович
(БГТУ, г. Минск)

О НУЛЕВОЙ ДИНАМИКЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В последние годы наблюдается некоторый ренессанс по рассмотрению задач качественной теории управления для обыкновенных линейных систем [1]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \qquad (1)$$

с выходом

$$y(t) = Cx(t) \qquad (2)$$

где $x(t)$ – n-вектор состояния, $u(t)$ – r-вектор управляющих воздействий, y – m-вектор выхода или наблюдаемых координат, A, B, C – по-