УДК 517.977

Доц. И.М. Борковская
(БГТУ, г. Минск)

О ВОЗМОЖНОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящее время особую актуальность приобрело исследование математических моделей динамических процессов, природа которых носит неоднородный характер. Получаемые при этом динамические системы часто называют гибридными. Виды гибридных систем многообразны. Это могут быть дискретно-непрерывные (ГДН) системы, часть переменных в которых являются непрерывными, а часть – дискретными. Также рассматривают дифференциально-разностные (ГДР) системы, в которых наряду с дифференциальными присутствуют и алгебраические зависимости. Среди гибридных систем выделяют и так называемые системы с «многомерным временем», содержащие непрерывную и дискретную компоненты. Таким образом, гибридные системы – это математические модели реальных систем управления, в которых непрерывная динамика находится в комбинации с дискретной, либо наряду с динамическими связями имеют место и алгебраические зависимости. Гибридные системы широко используются в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях. Математическая модель гибридной системы возникает каждый раз, когда необходимо исследовать взаимодействие среды, непрерывно изменяющейся в соответствии с некоторыми физическими законами, и управляющих элементов, срабатывающих в дискретные моменты времени. Исследование гибридных систем и решение различных задач управления для них позволяет расширить область применения математической теории управления. Для гибридных систем могут быть сформулированы различные известные задачи оптимального управления, достижимости и верификации, исследования на устойчивость, задачи стабилизации, идентификации и другие. Важнейшими являются вопросы представления решений гибридных систем, относительной управляемости, модального управления и другие.

Важнейшим свойством реальной системы управления является свойство устойчивости. В связи с этим задача стабилизации занимает одно из центральных мест в качественной теории управления динамическими системами. С помощью воздействия регулятора, построенного по принципу обратной связи, необходимо обеспечить устойчивость замкнутой системы. Интерес представляет исследование возможности стабилизации гибридных динамических систем вида

$$\dot{x}_1(t,k) = A_{11}x_1(t,k) + A_{12}x_2(t,k) + B_1u(t,k),\ t \in [0,+\infty), \tag{1}$$
$$x_2(t,k+1) = A_{21}x_1(t,k) + A_{22}x_2(t,k) + B_2u(t,k),\ k = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$
состоящей из непрерывной и дискретной составляющих, где
$$\dot{x}_1(t,k) = \frac{\partial x_1(t,k)}{\partial t};\ x_1(t,k) \in R^{n_1};\quad x_2(t,k) \in R^{n_2};\quad x_1(t,k), x_2(t,k)\ ,-$$
n_1- и n_2-векторы состояния системы; $u(t,k) \in R^r$ – вектор управляющего воздействия, $t \ge 0, k = 0,1,2,\ldots;$ $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – постоянные матрицы соответствующих размеров с граничными (начальными) условиями
$$x_1(0,k) = x_1(k),\ k = 0,1,2,...;$$
$$x_2(t,0) = x_2(t), t \in [0,+\infty).$$

В докладе предлагаются способы выбора регулятора, обеспечивающего устойчивость гибридной дискретно-непрерывной системы (1), (2).

Для скалярного случая, когда система принимает вид
$$\dot{x}_1(t,k) = a_{11}x_1(t,k) + a_{12}x_2(t,k) + b_1u(t,k),\ t \in [0,+\infty), \tag{3}$$
$$x_2(t,k+1) = a_{21}x_1(t,k) + a_{22}x_2(t,k) + b_2u(t,k),\ k = 0,1,2,\ldots \tag{4}$$
проводится построение стабилизирующего регулятора, не выводящего систему за пределы рассматриваемого класса:
$$u(t,k) = q_1x_1(t,k) + q_2x_2(t,k). \tag{5}$$

Рассмотрим задачу стабилизации в смысле сильной асимптотической устойчивости и других видов устойчивости системы (3), (4) регулятором (5).

Характеристическим уравнением системы (1), (2) назовем уравнение вида
$$\det\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \mu I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

Можно показать, что выполнение условий
$$\operatorname{Re}\lambda < 0 \text{ и } |\mu| < 1$$
на корни характеристического уравнения является необходимым, а в скалярном случае и достаточным для сильной асимптотической устойчивости системы.

Теорема 1. Для того, чтобы система (3), (4) скалярных уравнений была сильно асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:
$$1)\ a_{12}a_{21} = 0;\ \ 2)\ |a_{22}| < 1,\ a_{11} < 0.$$

Замкнутая система уравнений (3), (4), (5) имеет вид:

$$\dot{x}_1(t,k) = (a_{11} + b_1 q_1) x_1(t,k) + (a_{12} + b_1 q_2) x_2(t,k),$$
$$x_2(t,k+1) = (a_{21} + b_2 q_1) x_1(t,k) + (a_{22} + b_2 q_2) x_2(t,k).$$

Для выполнения первого условия теоремы 1 возможны следующие способы выбора регулятора (5):

$$1)\ q_2 = -\frac{a_{12}}{b_1};\quad 2)\ q_1 = -\frac{a_{21}}{b_2}.$$

Тогда в первом случае при условии $\left|a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < 1$ коэффициент q_1 можно выбрать следующим образом:

$$\text{при } b_1 > 0:\quad q_1 < -\frac{a_{11}}{b_1},\quad \text{при } b_1 < 0:\quad q_1 > -\frac{a_{11}}{b_1}.$$

Во втором случае при условии $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0$ коэффициент q_2 будем выбирать так, чтобы $\left|a_{22} + b_2 q_2\right| < 1$.

Полученный регулятор обеспечит согласно теореме 1 сильную асимптотическую устойчивость замкнутой системы (3), (4), (5). Таким образом, достаточное условие стабилизируемости можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Для того, чтобы система (3), (4) была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (5), достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$1)\left|a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < 1;\quad 2)\ a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

Аналогично проводится построение стабилизирующего регулятора для обеспечения (α,γ)-устойчивости системы.

УДК 519.624

Доц. И.Ф. Соловьева
(БГТУ, г. Минск)

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ ПЕРЕХОДНЫМИ СЛОЯМИ

Использование в механике жидкости и газа потоков бесконечно, ведь это и железные дороги, самолеты, электростанции, паровые и газовые турбины и т. д. Во всех этих явлениях пограничный слой играет