УДК 532.5:532.135

Л.М.ДАВИДОВИЧ, ассист. (БТИ),
И.Ф.КУЗЬМИЦКИЙ, канд.техн.наук, доц. (БТИ),
В.П.САВЧУК, канд.физ.-мат.наук, доц. (БГУ)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА КАЛАНДРОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Теоретическому изучению процесса каландрования вязкоупругих сред различных моделей посвящено большое число работ [1–4], в которых исследования проводятся на основании приближенных уравнений движения и граничных условий, что не позволяет уточнять полученные решения. В настоящей работе даются общая постановка и метод решения задачи о течении вязкоупругой жидкости Максвелла в зазоре каландра.

Рассматривается установившееся течение вязкоупругой жидкости в зазоре между двумя вращающимися в противоположные стороны с одинаковой угловой скоростью круговыми цилиндрическими валками. Проведем плоскость перпендикулярно осям валков и будем рассматривать движение жидкости в этой плоскости. Ось x_2 направим по линии центров сечений валков, ось x_1 – перпендикулярно ей в сторону движения жидкости в зазоре, начало координат выберем в середине минимального зазора между валками. Пренебрегая массовой силой, уравнения движения вязкоупругой жидкости Максвелла запишем так [5]:

$$\rho\left(\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial u_\kappa}{\partial x_2}u_2\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial p_{\kappa 1}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{\kappa 2}}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0,\ p_{\kappa i} + t_o\left(\frac{\partial p_{\kappa i}}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial p_{\kappa i}}{\partial x_2}u_2\right) = \mu\left(\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_\kappa}\right). \qquad \kappa, i = 1, 2. \qquad (1)$$

Здесь u_1, u_2 – составляющие скорости жидкости в направлении осей x_1, x_2; ρ, μ – плотность и коэффициент вязкости жидкости; $p_{\kappa i}$ – компоненты тензора напряжений; t_o – время релаксации.

Установим граничные условия. Считая, что жидкость прилипает к валкам, имеет на поверхности валка $x_2 = f(x_1)$ такие условия:

$$x_2 = f(x_1):\ u_2 - u_1 f' = 0,\ u_1 + u_2 f' = u\sqrt{1 + (f')^2}, \qquad (2)$$

где $f = \frac{df}{dx}$, U – скорость точки поверхности валка. В силу симметрии течения

$$u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0. \qquad (3)$$

В точке отрыва $x_1 = a_1, x_2 = f(a_1)$ слоя жидкости от поверхности валка нормальные и касательные напряжения считаем отсутствующими, т.е.

$$f'(p_{22} - p_{11}) + [1 - (f')^2]p_{12} = 0,$$

$$p + p_{22} - f'p_{12} = 0 \quad \text{при } x_1 = a_1,\ x_2 = f(a_1). \tag{4}$$

В точке захвата жидкости вращающимся валком нормальное напряжение обращается в нуль:

$$p + p_{22} - f'p_{12} = 0 \quad \text{при } x_1 = a_2,\ x_2 = f(a_2). \tag{5}$$

a_2 считаем заданным.

Ограничимся рассмотрением жидкости в области $a_2 \leqslant x_1 \leqslant a_1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant f(x_1)$. Из уравнений (1) с условиями (2)–(4) искомые функции выразятся через заданные величины и координату a_1 точки отрыва слоя жидкости; a_1 определится из условия (5).

Перейдем к безразмерным величинам по формулам:

$$u_1 = Uw,\ u_2 = Uv\frac{h_o}{R_1},\ p = \rho U^2 P\frac{R_1}{h_o},\ p_{11} = \rho U^2 p_{xx};$$

$$p_{12} = \rho U^2 p_{xy},\ x_1 = R_1 x,\ x_2 = h_o y,\ P_{22} = \rho U^2 p_{yy};$$

$$f = h_o h,\quad \varepsilon = \frac{h_o}{R_1},\ \alpha = \frac{t_o U}{h_o},\ a_1 = R_1 a,\ a_2 = R_1 b,\ R = \frac{\rho U h_o}{\mu},$$

где $2h_o$ – минимальный зазор между валками; R_1 – радиус валка. В практически интересных случаях $\frac{h_o}{R_1} = \varepsilon \ll 1$, поэтому решение уравнений (1) с условиями (2)–(4) будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε

$$w = w_o + \varepsilon w_1 + \ldots,\quad v = v_o + \varepsilon w_1 + \ldots,\ P = p_o + \varepsilon p_1 + \ldots,$$

$$p_{xx} = p_{xx}^o + \varepsilon p_{xx}^1 + \ldots,\ p_{xy} = p_{xy}^o + \varepsilon p_{xy}^1 + \ldots,\ p_{yy} = p_{yy}^o + \varepsilon p_{yy}^1 + \ldots$$

Удерживая в (1)–(4) лишь члены с ε^o, получим задачу

$$\frac{\partial p_{xy}^o}{\partial y} = \frac{\partial p_o}{\partial x},\ \frac{\partial p_o}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial w_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} = 0;$$

$$p_{xy}^o = \frac{1}{R}\ \frac{\partial w_o}{\partial y},\ p_{xx}^o = p_{yy}^o = 0; \tag{6}$$

$$y = h(x):\ w_o = 1,\ v_o = h';\ y = 0:\ \frac{\partial w_o}{\partial y} = v_o = 0;$$

$$y = h\ , x = a:\ p^{o}_{xy} = p_o = 0. \tag{7}$$

Заметим, что (6) совпадают с уравнениями, использованными С.М. Таргом [6] для изучения процесса прокатки металла, моделируемого вязкой жидкостью. Параметр α, характеризующий упругие свойства жидкости, в (6), (7) не входит.

Решая уравнения (6) с условиями (7), получим:

$$w_o = \frac{3}{2}(y^2 - h^2)\frac{h - h_1}{h^3} + 1\ , p^{o}_{xy} = \frac{3y}{Rh^3}\ (h - h_1)\ ;$$

$$v_o = \frac{yh'}{2}\left(\frac{2h - 3h_1}{h^4}y^2 + \frac{3h_1}{h^2}\right)\ ; \tag{8}$$

$$p_o = \frac{3}{R}\int_a^x \frac{h - h_1}{h^3}dx\ ;\ \ h_1 = h\ (a)\ .$$

Приравняем теперь в (1) – (4) коэффициенты при первых степенях. В результате придем к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial w_o}{\partial x}w_o + \frac{\partial w_o}{\partial y}v_o = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p^{1}_{xy}}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0\ ;$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0\ ,\ \ p^{1}_{xx} = \frac{2}{R}\ \frac{\partial w_o}{\partial x}\ ,\ \ p^{1}_{yy} = \frac{2}{R}\ \frac{\partial v_o}{\partial y}\ ; \tag{9}$$

$$p^{1}_{xy} + \alpha\left(\frac{\partial p^{o}_{xy}}{\partial x}w_o + \frac{\partial p^{o}_{xy}}{\partial y}v_o\right) = \frac{1}{R}\ \frac{\partial w_1}{\partial y}\ ;$$

$$y = 0:\ v_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0:\ \ y = h\ :\ v_1 = w_1 = 0\ ; \tag{10}$$

$$y = h\ ,\ x = \alpha:\ p^{1}_{xy} = p_1 = 0.$$

Из уравнений (9) с условиями (10) определим:

$$w_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x}(y^2 - h^2)\frac{R}{2} + f_1(x,y) - f_1(x,h)\ ;$$

$$p_1 = F(x) - F(a) + h'(a)\,\frac{3}{R}\left(\alpha - h_1^2\,\frac{R}{15}\right)\int_a^x \frac{dx}{h^3}\ ; \tag{11}$$

$$f_1(x,y) = R^2\Big[\frac{1}{360}\ y^6\Lambda' AR + \frac{1}{24}\ y^4(\Lambda' + \Lambda^2 Rhh' + 2\alpha\ A\Lambda') - \frac{1}{2}\ y^2\Big(1 -$$

$$- \frac{AR}{2} h^2\Big)\Big(\frac{1}{2}\ \Lambda' h^2 + \Lambda hh'\Big) + \frac{\alpha}{2}\ y^2\Big(\frac{\Lambda'}{R} + \Lambda^2 hh'\Big)\Big]\ ;$$

$$A(x) = -\frac{3}{Rh^3}(h - h_1);$$

$$F(x) = \frac{3}{70} + \frac{6}{35}\frac{h_1}{h} - \frac{27}{35}\frac{h_1^2}{h^2} - \frac{6}{35}\ln h - \frac{\alpha}{10Rh^2}(3 - 9\frac{h_1^2}{h^2}).$$

Аналогично могут быть найдены w_2, p_2, v_2 и т.д. Если в выражении для р ограничиться членами с первой степенью ε, то условие (5) запишется так:

$$x = b: \qquad p_o + \varepsilon p_1 = 0.$$

Подставим сюда p_o и p_1 из (8), (11).

$$\frac{3}{R}\int_a^b \frac{h - h_1 + \varepsilon h'(a)(\alpha - h_1^2\frac{R}{15})}{h^3}dx + \varepsilon\,[F(b) - F(a)] = 0. \qquad (12)$$

Из уравнения (12), в котором

$$h(x) = 1 + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1 - x^2},$$

определится искомая координата a точки отрыва слоя жидкости от поверхности валка.

Предполагая $a \ll 1$, $-b \ll 1$, удержим в (12) лишь члены не выше третьего порядка малости. Тогда (12) приближенно запишется так:

$$a^2 - a(\frac{b}{2} + \frac{2}{5}R\varepsilon + \frac{3}{2}\alpha\varepsilon) - \frac{b}{2} - b(\frac{3}{5}R\varepsilon - \frac{3}{2}\alpha\varepsilon) = 0. \qquad (13)$$

Из этого квадратного уравнения определяется a как функция b и остальных параметров задачи. Если положить $\varepsilon = 0$, то из (13) получим $a = -\frac{b}{2}$, что в данном приближении совпадает с результатом, полученным для вязкой жидкости в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. – М., 1977, с.461. 2. Скробин Ю.Б., Тябин Н.В. Движение аномально-вязкой жидкости в валковом зазоре каландра. – Изв. АН УССР, 1969, № 5, вып. 5, с. 130. 3. Об аналитическом решении задачи течения псевдопластичной жидкости между двумя вращающимися цилиндрами/ В.В.Литвинов, Н.Г. Бекин, В.В. Петрушанский и др. – В сб.: Машины и технология переработки каучуков, полимеров и резиновых смесей. Ярославль, 1974, с.9. 4. Мак-Келви Д.М. Переработка полимеров. – М., 1965, с. 442. 5. Шульман З.П., Берковский Б.М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. – Минск, 1966, с. 239. 6. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М., 1951, с. 420.

Scanned by TapScanner