УДК 536.24.01:517.946

В. М. Собин, канд. техн. наук (БТИ)

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТЕОРИИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Постановка задачи. Приближенный метод решения. Рассмотрим в области $\Omega = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi < \infty, \ 0 \leq \eta \leq 1\}$ краевую задачу

$$\varphi(\eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[f(\eta) \frac{\partial u}{\partial \eta}\right], \tag{1}$$

$u(0, \eta) = 0$, $u(\xi, 0) = 1$ или $\partial u(\xi, 0)/\partial \eta = -1$, $\partial u(\xi, 1)/\partial \eta = 0$.

Функции $\varphi(\eta)$, $f(\eta)$ считаются ограниченными.

В безразмерных переменных к (1) приводятся задачи нестационарной теплопроводности [1], конвективного тепломассообмена при ламинарном [2] и турбулентном [3] течениях жидкости и др. При аналитическом решении задачи (1) возникают серьезные математические трудности, и до настоящего времени известно только несколько точных решений для простейших функций $\varphi(\eta)$ и $f(\eta)$ [2, 3]. Обычно же задачу (1) решают численными методами.

Сущность приближенного метода, используемого для решения задачи (1), сводится к аппроксимированию профиля температур, концентраций функцией с двумя обобщенными координатами. По сравнению с известными основной особенностью метода является то, что параметр профиля заранее не назначается, а находится из законов сохранения, непосредственно следующих из дифференциального уравнения процесса. Это позволяет существенно повысить точность решения и расширить возможности применения метода.

По длине тепломассообменной поверхности выделим два участка. На собственно начальном участке происходит развитие теплового или диффузионного пограничного слоя, и профиль функции будем искать в виде

$$u = [1 - \eta / q(\xi)]^{n_1}, \tag{2}$$

где $q(\xi)$ – толщина соответствующего пограничного слоя. Начальный участок заканчивается при достижении толщины пограничного слоя $q = 1$.

На участке стабилизированного тепломассообмена осуществляется изменение температуры или концентрации u_1 на границе $\eta = 1$. Профиль искомой функции зададим в виде

$$u = (1 - u_1)(1 - \eta)^{n_2} + u_1. \tag{3}$$

В (2), (3) n_1 и n_2 – параметры профилей.

Для определения неизвестных функций q, u_1 и параметров n_1, n_2 необходимо иметь по два уравнения на каждом участке. Одно из уравнений находится из первого интеграла (1), второе – из (1) умножением на u и интегрированием его в пределах существования поля.

Интегрирование полученных уравнений с учетом начальных условий для q и u_1 и их сопоставление приводят к соотношениям для определения неизвестных параметров и функций.

Заметим, что выбор второго уравнения в данном методе до некоторой степени произволен. Однако если считать поле u полем температур, то выбранное уравнение представляет собой закон сохранения мощности тепловой энергии и является наилучшим в смысле метода Галеркина. Из всех интегральных законов, полученных по моменту k-го порядка относительно u, оно обеспечивает наиболее высокую точность приближенного решения. Последнее подтверждается поведением параметров, которые, например при $\varphi = f = 1$, находятся из уравнений $(k + 1)n_1^2 - (k + 2)n_1 - 1 = 0$; $(k + 1)n_2^2 - kn_2 - 3 = 0$. При этом параметры профилей изменяются от значения $n_1 = 1{,}781$, $n_2 = 1{,}5$ при $k = 1$ до $n_1 = n_2 = 1$ при $k \to \infty$. Наконец, подобное уравнение используется в методе [4]. На этом, собственно, и заканчивается сходство методов.

Таким образом, предлагаемый метод относится к интегральным. В известных интегральных методах большое значение имеет удачный выбор аппроксимирующей функции, и в частности степени аппроксимирующего полинома. Здесь многое зависит от искусства исследователя и его опыта. Обычно используются полиномы 2 – 4-й степени, что приводит к удовлетворительным результатам только для ряда задач теплопроводности, конвективного тепломассообмена и в теории ламинарного пограничного слоя [5]. Попытки применения интегральных методов к процессам тепломассообмена при турбулентном течении жидкости, как правило, не ведут к успеху. Это не является неожиданным, так как при турбулентном течении возникают очень большие градиенты температур, концентраций, удовлетворительное описание которых не представляется возможным даже с помощью полиномов двадцатой-тридцатой степени. В связи с этим, например, известный метод интегрального теплового баланса [6] оказывается непригодным для таких задач.

Эффективность же данного метода доказана на решении ряда разнообразных задач [7 – 12], и, очевидно, область его применения далеко не исчерпывается рассмотренными задачами. В предложенном методе устраняется произвольность в выборе степени аппроксимирующего полинома. Тем самым оказывается возможным его использование и к задачам тепломассообмена при турбулентном течении жидкости. Так, в [10 – 12] установлено, что формально степень полинома может достигать нескольких сотен. Это согласуется с имеющимися численными решениями и с опытом. Отсюда и следует невозможность использования обычных интегральных методов для расчета тепломассообмена при турбулентном течении жидкости.

К сожалению, для данного метода, так же, как и для любого другого интегрального метода, весьма затруднительно указать какой-либо общий путь оценки точности. Поэтому приходится ограничиваться сравнением с известными решениями.

В процессе использования метода выявились его некоторые особенности. Строго говоря, параметр n_1 на начальном участке оказывается функцией q или ξ. В одних случаях зависимость является слабой [7, 9], в других – довольно сильной [10-12].

Наиболее просто можно учесть изменение n_1 от q, если считать профиль (2) справедливым в локальном смысле. Это подтверждается результатами [10], когда в пределах начального участка n_1 изменяется в несколько сот раз. Такое предположение не ведет к значительной ошибке в определении n_1 и q, так как появляющиеся в левой и правой частях уравнений дополнительные слагаемые, связанные с производными по ξ, близки между собой.

При слабой зависимости практически можно из диапазона изменения n_1 выбрать любое постоянное значение, что не оказывает большого влияния на числа Нуссельта. Дело в том, что при одинаковых ξ бо́льшим n_1 соответствуют бо́льшие q, и наоборот. Но n_1 и q совместно входят в виде отношения, что и уменьшает погрешность (см. ниже).

На участке стабилизированного тепломассообмена параметр n_2 не зависит от ξ.

Как установлено, профиль температур или концентраций по (2) и (3) в точке $q = 1$ имеет небольшой разрыв первого рода, так как $n_1 \neq n_2$. Для устранения этого разрыва применяется простой метод сращивания по локальным числам Нуссельта [10]. При этом полагается, что начальный участок заканчивается тогда, когда параметр профиля равен n_2, а в небольшой переходной области изменение параметра от n_1 до n_2 осуществляется по прямой линии.

Конечная форма решения существенно зависит от вида $\varphi(\eta)$ и $f(\eta)$. Поэтому изложим метод детально еще на одной задаче.

Рассмотрим уравнение (1) при

$$f = 1, \quad \varphi = 1 - \lambda\eta^2. \tag{4}$$

Задача (1), (4) при $\lambda = 1$ описывает массообмен в стекающей пленке жидкости по вертикальной поверхности с параболическим профилем скорости [13], а при $\lambda = 0$ – массообмен с постоянным профилем скорости или нестационарную теплопроводность пластины единичной толщины с одной теплоизолированной стороной. Здесь $\xi = x/(\delta Pe)$; $\eta = y/\delta$; x, y – продольная и поперечная координаты с началом, помещенным на свободной поверхности пленки; δ – толщина пленки; u – безразмерная концентрация распределяемого вещества; $Pe = v_1\delta/D$ – число Пекле; v_1 – скорость на свободной поверхности пленки; D – коэффициент диффузии.

В [13] для постоянной концентрации на свободной поверхности пленки получено приближенное решение в виде ряда, для которого найдены лишь три первых члена. В результате полученное решение оказывается справедливым для значений $\xi \geq 0,01$. При $\xi < 0,01$ решение получено по модели слоя бесконечной глубины с постоянной скоростью, равной скорости жидкости на свободной поверхности пленки.

В работе [14], также для постоянной концентрации на свободной поверхности пленки, найдено численное решение.

Для приближенного решения задач (1), (4) воспользуемся профилями концентраций в виде (2), (3). В результате для диффузионного начального участка получим уравнения

$$\frac{n_1}{q} = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{q}{n_1+1} - \frac{2\lambda q^3}{(n_1+1)(n_1+2)(n_1+3)}\right], \quad (5)$$

$$\frac{2n_1(n_1-1)}{2n_1-1}\,\frac{1}{q} = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{q}{2n_1+1} - \frac{\lambda q^3}{(n_1+1)(2n_1+1)(2n_1+3)}\right]. \quad (6)$$

Интегрирование уравнений (5) и (6) с учетом начального условия $q(0) = 0$ дает

$$n_1\xi = \frac{1}{2(n_1+1)}q^2 - \frac{3\lambda}{2(n_1+1)(n_1+2)(n_1+3)}q^4, \quad (7)$$

$$\frac{2n_1(n_1-1)}{2n_1-1}\xi = \frac{1}{2(2n_1+1)}q^2 - \frac{3\lambda}{4(n_1+1)(2n_1+1)(2n_1+3)}q^4. \quad (8)$$

Из (7) получено следующее явное приближенное выражение для толщины диффузионного пограничного слоя:

$$q = (A_1\xi)^{1/2} + \frac{3\lambda}{2(n_1+2)(n_1+3)}(A_1\xi)^{3/2}, \quad A_1 = 2n_1(n_1+1). \quad (9)$$

При $\lambda = 0$ (9) – точное решение уравнения (7). Исключая из (7) и (8) ξ, приходим к соотношению, из которого следует, что при $\lambda = 0$ имеем $n_1 = 1,7808$, а при $\lambda = 1$ величина n_1 медленно возрастает с увеличением q от 1,7808 до 1,96 при $q = 1$.

Для участка стабилизированного массообмена имеем

$$n_2(1-u_1) = \frac{d}{d\xi}\left\{\left[\frac{1-\lambda}{n_2+1} + \frac{(n_2+4)\lambda}{(n_2+1)(n_2+3)}\right](1-u_1) + \frac{3-\lambda}{3}u_1\right\}, \quad (10)$$

$$n_2(1-u_1)\left[1 - \frac{n_2(1-u_1)}{2n_2-1}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\xi}\left\{\left[\frac{1-\lambda}{2n_2+1} + \frac{(n_2+2)\lambda}{(n_2+1)(2n_2+3)}\right](1-u_1)^2 + \left[\frac{1-\lambda}{n_2+1} + \frac{(n_2+4)\lambda}{(n_2+2)(n_2+3)}\right]2u_1(1-u_1) + \frac{3-\lambda}{3}u_1^2\right\}. \quad (11)$$

Сравнивая уравнения (10) и (11), получаем уравнение относительно n_2, положительные корни которого $n_2 = 1,5$ и $n_2 = 1,8$ при $\lambda = 0$ и 1 соответственно.

Решение уравнения (10) имеет вид

$$u_1 = 1 - \exp[-A_2(\xi - \xi_1)],$$

$$\lambda = 0,\ A_2 = n_2 + 1; \quad \lambda = 1,\ A_2 = \frac{3(n_2 + 2)(n_2 + 3)}{2n_2 + 7},$$

где ξ_1 - значение ξ при $q = 1$.

Определим локальные и средние числа Нуссельта соотношениями

$$Nu = \frac{\beta\delta}{D} = -\frac{1}{1 - u_2}\,\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \eta}, \quad \overline{Nu} = \frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} Nu\,d\xi. \qquad (12)$$

Здесь β - коэффициент массоотдачи; u_2 - средняя концентрация на расстоянии ξ.

Из (12) после соответствующих подстановок и преобразований находим следующие зависимости:

для начального участка

$$Nu = \frac{n_1}{q}\left[1 - \frac{3}{(3-\lambda)(n_1 + 1)}q + \frac{3\lambda}{(n_1+1)(n_1+2)(n_1+3)}q^3\right]^{-1}, \qquad (13)$$

$$\overline{Nu} = -\frac{3-\lambda}{3\xi}\ln\left[1 - \frac{3}{(3-\lambda)(n_1+1)}q + \frac{3\lambda}{(n_1+1)(n_1+2)(n_2+3)}q^3\right]; \qquad (14)$$

для участка стабилизированного массообмена

$$Nu = \overline{Nu} = \begin{cases} 2{,}5, & \lambda = 0 \\ 3{,}4417, & \lambda = 1 \end{cases}. \qquad (15)$$

В табл. 1 представлено сопоставление расчетных данных по (14) и (15) при $\lambda = 1$ с данными [13, 14] и при $\lambda = 0$ - с точным решением Хатта [1].

В первой строке даны вычисления при $n_1 = 1{,}7808$, во второй - вычисления с учетом изменения n_1 от q в предположении справедливости (2) на отдельном участке. В данном случае начальный участок разбивался на четыре меньших участка с соответствующими постоянными значениями n_1. В третьей строке представлены расчеты при $n = 1{,}96$. Во всех расчетах величина q определялась по (9).

Видно, что расчет по предлагаемому методу хорошо согласуется с известными данными. При $\lambda = 1$ несколько лучшее согласование наблюдается для данных, указанных в первых двух строках.

Для уточнения метода решения на начальном участке представим параметр профиля n_1 в (2) в виде зависимости

$$n_1 = n_0 + a\xi + b\xi^2 + \dots, \qquad (16)$$

где n_0 определяется при $\xi = 0$ ($q = 0$), а коэффициенты a, b ... - при промежуточных значениях ξ. В результате коэффици-

Табл. 1. Сравнение средних чисел Нуссельта $\overline{Nu}$

ξ	$6{,}67\cdot10^{-4}$	$1{,}33\cdot10^{-3}$	0,01	0,1	1	10	∞
	44,8	32,0	12,4	4,78	3,58	3,46	3,44
Данный метод	44,8	32,0	12,4	4,94	3,59	3,46	3,44
	46,6	33,4	12,8	4,98	3,60	3,46	3,44
Приближенный метод [13]	44,6	31,9	12,4	4,85	3,56	3,43	3,41
Численное решение [14]	42,8	30,9	12,0	5,05	-	-	3,63
Данный метод ($\lambda=0$)	44,5	31,6	12,0	4,43	2,70	2,52	2,50
Точное решение Хатта [1] ($\lambda=0$)	44,3	31,6	12,0	4,41	2,68	2,49	2,47

енты a, b... находятся из системы нелинейных алгебраических уравнений. При этом решение задачи несколько усложняется, но расширяются возможности применения метода. В таком варианте метод может быть применен к уравнению (1) при наличии источников и стоков тепла или массы. В ряде случаев, представляющих интерес в (16), можно с хорошим приближением ограничиться линейной или квадратичной зависимостью. Этот вопрос заслуживает специального обсуждения.

В заключение отметим, что метод может быть использован для решения нелинейных задач, описываемых уравнениями подобного типа [8].

Литература

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М., 1967. - 599 с. 2. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. - М., 1967. - 411 с. 3. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. - Новосибирск, 1970. - 659 с. 4. Цянь. Приближенный расчет неустановившегося теплового потока. - Ракетная техника и космонавтика, 1976, № 3, с. 140-142. 5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М., 1969. - 742 с. 6. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена. - В кн.: Проблемы теплообмена. М., 1967, с. 41-97. 7. Собин В.М. Теплообмен в стекающей пленке жидкости на термическом начальном участке. - ИФЖ, 1980, 39, № 4, с. 592-596. 8. Собин В.М. Теплообмен при ламинарном стекании пленки жидкости на термическом начальном участке с учетом температурного изменения вязкости. - ИФЖ,

1981, 40, № 6, с. 1101–1102. 9. Собин В.М. Теплообмен при ламинарном стекании пленки жидкости на термическом начальном участке и граничных условиях первого рода. – В сб.: Химия и химическая технология. Минск, 1981, вып. 16, с. 97–101. 10. Собин В.М. Массообмен на диффузионном начальном участке при турбулентном стекании пленки жидкости. – Изв. АН БССР. Сер. физ.-энергет. наук, 1982, № 1, с. 108–111. 11. Собин В.М., Щербаков Л.А. Теплообмен при турбулентном стекании пленки жидкости на термическом начальном участке. – ИФЖ, 1982, 41, № 1, с. 141–142. 12. Собин В.М., Щербаков Л.А. Теплообмен при турбулентном стекании пленки жидкости на термическом начальном участке и граничных условиях второго рода. – В сб.: Химия и химическая технология. Минск, 1982, вып. 17, с. 117–122. 13. Вязовов В.В. Теория абсорбции малорастворимых газов жидкими пленками. – ЖТФ, 1940, т. 10, вып. 18, с. 1519–1532. 14. Seban R.A., Faghri A. Wave effects on the transport to falling laminar liquid films. – Trans. ASME J. Heat Transfer, 1978, 100, N 1, p. 143–147.