УДК 532.5:532.135

Л.М.Давидович, И.Ф.Кузьмицкий, канд. техн. наук (БТИ), В.П.Савчук, канд. физ.-мат. наук (БГУ)

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ЛИСТА ПОСЛЕ ВЫХОДА ИЗ ЗАЗОРА КАЛАНДРА

В работах [1, 2] приводились исследования, в результате которых получено уравнение, позволяющее определить координату точки отрыва каландруемого листа, а следовательно, и толщину листа на выходе из зазора каландра. Для разработки системы автоматического регулирования толщины листа представляло интерес поведение материала после отрыва от валков.

Движение материала считаем стационарным относительно системы координат, ось ох которой совпадает с осью симметрии листа, а ось оу проходит через точку отрыва листа от валка (рис. 1). Так как лист тонок и ограничен свободными поверхностями $y = \pm f(x)$, давление p можно считать постоянным и равным 0.

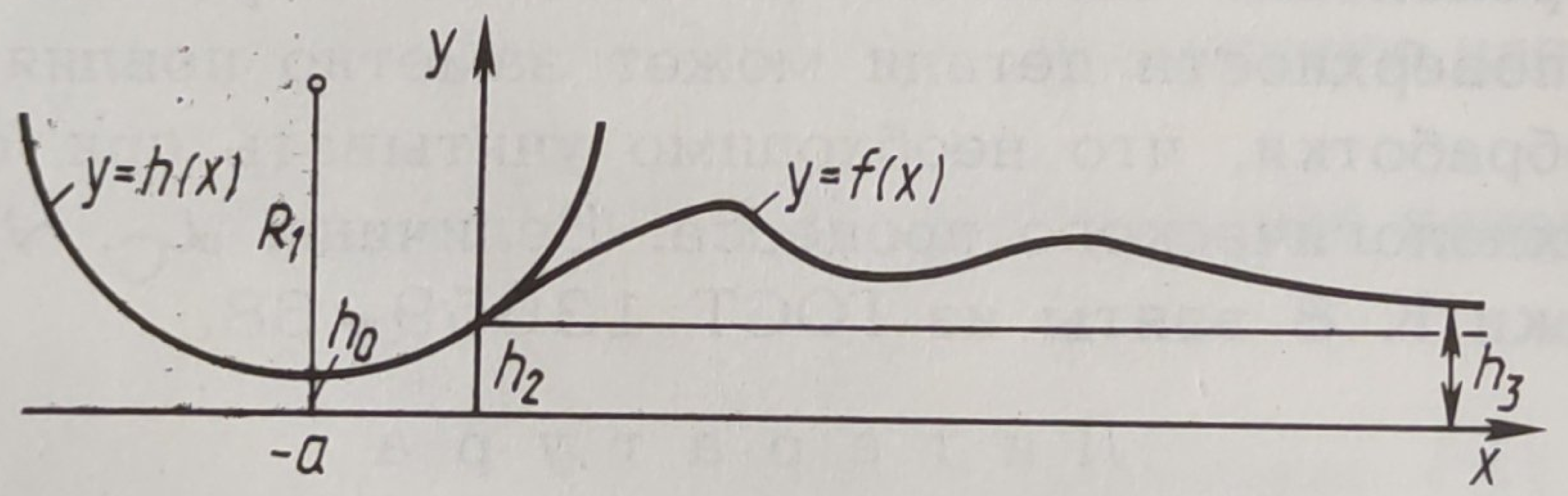

Рис. 1. Изменение толщины листа после выхода из зазора каландра.

Кроме того, составляющая u скорости точек листа вдоль оси будет мало отличаться от U, т. е. от скорости, с которой лист выходит из зазора между валками. Форма поверхности f(x) будет определяться прежде всего величиной поперечной составляющей скорости точек листа v. На основании сказанного для описания движения листа воспользуемся следующими уравнениями:

$$U\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$p_{xy} + t_0 U \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad (1)$$

$$p_{yy} + t_0 U \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Уравнения (1) получены из соответствующих точных уравнений [1] после следующих упрощений:

1) в первом уравнении отброшен в силу его малости член $v\frac{\partial v}{\partial y}$, а член $u\frac{\partial v}{\partial x}$ заменен приближенным значением $U\frac{\partial v}{\partial x}$;

2) в последних двух уравнениях отброшены члены $t_0 v\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}$, $t_0 v\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}$, а оставшиеся нелинейные члены $t_0 u\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}$, $t_0 u\frac{\partial p_{yy}}{\partial x}$ заменены их приближенными значениями $t_0 U\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}$, $t_0 U\frac{\partial p_{yy}}{\partial x}$ соответственно. Граничные условия для (1) будут следующими. На оси симметрии листа: $v = 0$ при $y = 0$ (2).

Направление нормали к поверхности листа будет мало отличаться от направления оси оу. Давление внутри и вне листа одинаково и равно нулю.

Поэтому $p_{yy} = 0$ при $y = f(x)$. (3)

Нормальная составляющая скорости среды на свободной поверхности должна равняться нулю, т. е., используя результат [1],

$$v - u\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{при } y = f(x),$$

или приближенно

$$v = U\frac{df}{dx} \quad \text{при } y = f(x). \qquad (4)$$

Из этого условия после нахождения $v(x, y)$ определяется $f(x)$.

На выходе из зазора, т. е. при $x = 0$, v имеет некоторое отличное от нуля значение, которое может быть определено следующим образом. Так как $v = 0$ при $y = 0$ и $v = U\frac{dh}{dx}$ при $y = h(x)$, то приближенно можно записать:

$$v = yU\frac{dh}{dx}\cdot\frac{1}{h^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = yU\frac{d^2h}{dx^2}\cdot\frac{1}{h^2} \quad \text{при } x = 0. \qquad (5)$$

Так как $h \approx h_0 + \frac{(x+a)^2}{2R_1}$ и $x + a \approx \sqrt{2R_1(h - h_0)}$,

то $\frac{dh}{dx} = \frac{x+a}{R_1} = \sqrt{\frac{2(h-h_0)}{R_1}}$, а $\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{1}{R_1}$.

Тогда (5) запишется следующим образом:

$$v = \frac{yU}{h^2}\sqrt{\frac{2(h_2 - h_0)}{R_1}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{U}{R_1 h_2} \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Условия (3) и (4) заданы на кривой, уравнение которой зависит от x. Это обстоятельство значительно затрудняет решение задачи. Поэтому воспользуемся известным приемом, применяемым при приближенном решении задач механики сплошной среды [3], который состоит в "снесении" граничных условий на невозмущенную поверхность, т. е. указанные выше условия можно считать выполненными при $y = h_2$. Далее, перейдя в уравнениях и граничных условиях к безразмерным величинам, после соответствующих преобразований получим

$$R\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(b - 1) - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$b = \frac{t_0 U^2 \rho}{\mu}, \quad R = \frac{h^2 U\rho}{\mu}, \quad A = \sqrt{\frac{2(h_2 - h_0)}{R_1}},$$

где t_0, ρ, μ – параметры перерабатываемого материала. Тип уравнения (6), а следовательно, и метод решения зависит от знака коэффициента $b - 1$. Так, при $b - 1 > 0$ оно имеет гиперболический тип, а при $b - 1 = 0$ – параболический. Применяя интегральное преобразование Лапласа [4], получаем уравнение кривой $y = f(x)$, которое имеет достаточно сложный вид. Анализ полученного уравнения позволил сделать вывод, что $f(x)$ состоит из бесконечного множества затухающих гармоник. При достаточно больших значениях x

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{3}\left[AR + (b - 1)\frac{h_2}{h_1}\right]. \tag{7}$$

Если вернуться в этом равенстве к размерным величинам, то окончательная толщина листа материала будет определяться по формуле

$$h_3 = h_2 + \frac{1}{3}\left[\frac{h_2^2 U\rho}{\mu}\sqrt{\frac{2(h_2 - h_0)}{R_1}} + \left(\frac{t_0 U^2 \rho}{\mu} - 1\right)\frac{h_2^2}{R_1}\right]. \tag{8}$$

Из уравнения (8) можно достаточно просто определить расстояние от выхода из каландра, на котором толщина листа отличается от h_3 не более чем на 1 %.

$$L = \frac{4Rh_2}{\pi^2}\ln(100\ B), \tag{9}$$

$$где \quad B = \frac{\frac{AR}{2} + (b - 1)(\frac{h^2}{R_1} + Aa_1)}{1 + \frac{1}{3}[AR + (b - 1)\frac{h_2}{R_1}]} \cdot \frac{32}{\pi^4}.$$

Из равенства

$$T_1 = \frac{L}{U} \qquad (10)$$

можно определить время, по истечении которого толщина листа, вышедшего из зазора, отличается от h_3 меньше чем на 1 %.

Полученные результаты дают возможность правильно определить место установки датчиков контроля толщины, прогнозировать толщину ленты в зависимости от технологических факторов и характеристик сырья при управлении процессом с помощью ЭВМ.

Литература

1. Давидович Л.М., Кузьмицкий И.Ф., Савчук В.П. Исследование процесса каландрования вязкоупругого материала. – В сб.: Химия и химическая технология. Минск, 1982, вып. 18, с. 110–113. 2. Давидович Л.М., Кузьмицкий И.Ф., Савчук В.П. Нестационарное течение вязкоупругого материала в зазоре каландра. – В сб.: Химия и химическая технология. Минск, 1982, вып. 18, с. 129. 3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М., 1969. – 742 с. 4. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М., 1971. – 288 с.