

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ЕЕ КОЭФФИЦИЕНТА

Проблема решения нелинейных задач тепломассообмена вообще и задач теплопроводности в частности представляет научный и практический интерес. Однако при решении таких задач возникают большие математические трудности, которые, за исключением некоторых предельных случаев, не могут быть преодолены строгими аналитическими методами. По этой причине до сих пор известно немного аналитически решенных нелинейных задач [1, 2]. Таким образом, разработка приближенных аналитических методов решения нелинейных задач является актуальной.

Рассмотрим нестационарное одномерное уравнение теплопроводности с линейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 + \beta \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (1)$$

с условиями

$$\theta(\zeta, 0) = 0, \theta(0, \zeta) = 1, \partial \theta(1, \zeta) / \partial \eta = 0. \quad (2)$$

Здесь $\theta = (t - t_0) / (t_c - t_0)$ — безразмерная температура; t_c, t_0 — соответственно, температура стенки и начальная; $\eta = x/l, \eta = a_0 \tau / l^2$ — безразмерные переменные; $a_0 = \lambda_0 / (\rho c_p)$ — коэффициент температуропроводности; λ_0 — коэффициент теплопроводности при $t = t_0$; β — коэффициент температурного изменения теплопроводности; l, ρ, c_p — толщина, плотность и теплоемкость пластины.

В работе [3] задача (1), (2) решена численным методом, а в [4] предложен итерационный метод. Для приближенного аналитического решения краевой задачи (1), (2) используем интегральный метод, подробно описанный, например, в литературе [5–8].

Разделим тепловой процесс на две фазы. В первой происходит прогрев пластины по толщине. Профиль температур аппроксимируем соотношением

$$\theta = [1 - \eta / q(\zeta)]^{n_1}, \quad (3)$$

в котором q — безразмерная толщина прогретого слоя, удовлетворяющая условию $q \leq 1$. Первая фаза заканчивается при $q = 1$ и $\zeta = \zeta_1$.

Во второй фазе, соответствующей безразмерному интервалу времени $\zeta > \zeta_1$, происходит повышение температуры θ_1 на границе $\eta = 1$. Здесь профиль температур может быть представлен в виде

$$\theta = (1 - \theta_1) (1 - \eta)^{n_2} + \theta_1. \quad (4)$$

В (3), (4) параметры профилей температуры n_1 и n_2 , а также функции $q(\xi)$ и $\theta_1(\xi)$ находятся в процессе решения задачи.

В первой фазе имеем следующие уравнения. Находя первый интеграл (1) с учетом (3), получим:

$$(1 + \beta) \frac{n_1}{q} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{q}{n_1 + 1} \right), \quad (5)$$

интегрирование которого с начальным условием $q(0) = 0$ дает

$$q = [2n_1(n_1 + 1)(1 + \beta)\xi]^{1/2}. \quad (6)$$

Умножая (1) на θ и интегрируя в пределах прогретого слоя с учетом (3), находим

$$\frac{n_1}{q} \left[\frac{n_1 - 1}{2n_1 - 1} + \frac{\beta(2n_1 - 1)}{3n_1 - 1} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{q}{2n_1 + 1} \right). \quad (7)$$

Интегрирование уравнения (7) приводит ко второму выражению для толщины прогретого слоя:

$$q = \left\{ 4n_1(2n_1 + 1) \left[\frac{n_1 - 1}{2n_1 - 1} + \frac{\beta(2n_1 - 1)}{3n_1 - 1} \right] \xi \right\}^{1/2}. \quad (8)$$

Сопоставление соотношений (6) и (8) позволяет получить уравнение для определения параметра профиля n_1 в первой фазе:

$$(n_1 + 1)(1 + \beta) = 2(2n_1 + 1) \left[\frac{n_1 - 1}{2n_1 - 1} + \frac{\beta(2n_1 - 1)}{3n_1 - 1} \right]. \quad (9)$$

Во второй фазе находим соответственно следующие уравнения:

$$n_2(1 + \beta)(1 - \theta_1) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1 + n_2\theta_1}{n_2 + 1} \right), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} n_2(1 + \beta)(1 - \theta_1) - \frac{n_2^2(1 - \theta_1)^2}{2n_2 - 1} - \frac{\beta n_2^2(1 - \theta_1)^2(2n_2 - 1 + n_2\theta_1)}{(2n_2 - 1)(3n_2 - 1)} \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{(1 - \theta_1)^2}{2n_2 + 1} + \frac{2\theta_1(1 - \theta_1)}{n_2 + 1} + \theta_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Сопоставление (10) и (11) приводит к уравнению для нахождения параметра профиля n_2 :

$$\frac{2(1 + \beta)}{2n_2 + 1} - \frac{1}{2n_2 - 1} - \frac{\beta}{3n_2 - 1} = 0, \quad (12)$$

а интегрирование уравнения (10) с начальным условием $\theta_1(\xi_1) = 0$ дает зависимость:

$$\theta_2 = 1 - \exp[-A(\xi - \xi_1)], A = (n_2 + 1)(1 + \beta). \quad (13)$$

Для оценки точности и применимости полученного решения проведены расчеты при двух значениях $\beta = 0,5$ и $-0,5$, для которых возможно сопоставление с численным [3] и итерационным [4] решениями.

Из уравнений (9) и (12) для $\beta = 0,5$ находим $n_1 = 1,332$; $n_2 = 1,235$, а для $\beta = -0,5$ — $n_1 = 6,488$; $n_2 = 2,735$. Видно, что при переходе из первой фазы во вторую наблюдается разрыв первого рода: $n_1 > n_2$, наиболее существенный для второго случая. Для его устранения параметры профилей и температуры сращиваются [7, 8]. При этом протяженность первой фазы определяется из уравнения (6) или (8) по значению параметра профиля n_2 , а в переходной области изменение параметра от n_1 до n_2 принимается линейным. В связи с принятыми допущениями в переходной области можно ожидать несколько большей погрешности результатов.

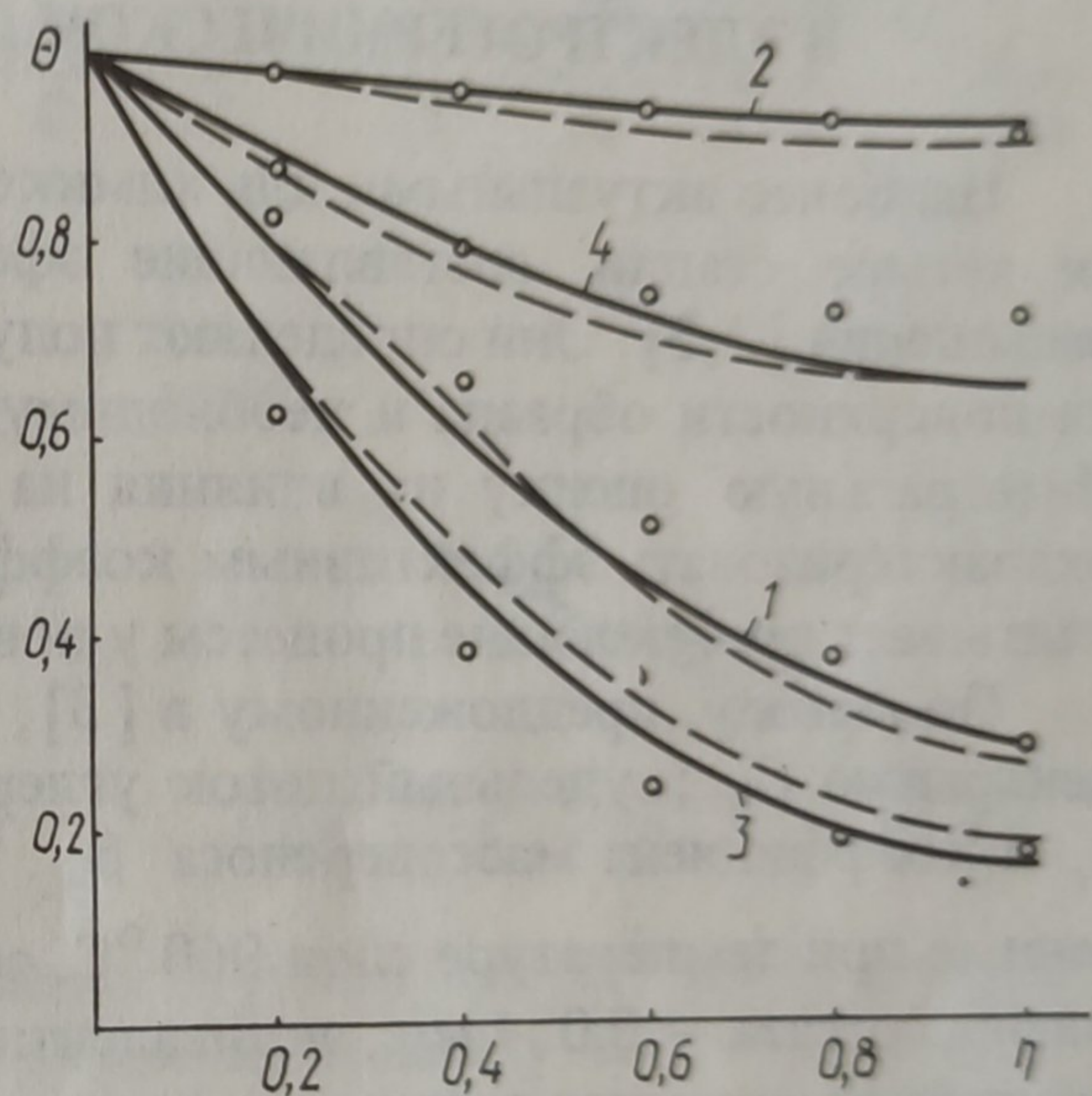


Рис. 1. Сравнение безразмерных температур θ по данному приближенному решению с известными: 1 — $\beta = 0,5$; $\xi = 0,2$; 2 — $0,5$; $0,8$; 3 — $\beta = -0,5$; $\xi = 0,2$; 4 — $-0,5$; $0,8$. — численное решение [3]; - - - итерационное [4]; 0 — данное.

На рис. 1 представлены результаты сравнения полученного приближенного аналитического решения с известными из литературы для двух значений β и безразмерного времени ξ . Как следует из рисунка, для случая $\beta = 0,5$ наблюдается хорошее согласование данного решения с численным, а для случая $\beta = -0,5$ — удовлетворительное. Заметим, что при необходимости полученное решение для $\beta = -0,5$ можно уточнить, подставляя его в левую часть (1) в качестве приближения и интегрируя дважды. Как установлено, уже первое уточненное решение практически совпадает с численным.

Таким образом, полученное приближенное аналитическое решение может быть использовано в инженерных расчетах. Положительная сторона решения — его эффективность и простота.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. — М., 1967. — 600 с. 2. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. — М., 1975. — 210 с. 3. Mastah K. On the numerical solution of phase change problems in transient non-linear heat conduction. — Int. Journal of Numerical Methods in Engineering, 1976, vol. 10, p. 833. 4. Мехта К вопросу о решении задачи нестационарной теплопроводности при зависящем от темпе-

ратуры коэффициенте теплопроводности. – Теплопередача, 1977, № 1, с. 143. 5. С о б и н В.М. Теплообмен в стекающей пленке жидкости на термическом начальном участке. – ИФЖ, 1980, т. 39, № 4, с. 592. 6. С о б и н В.М. Теплообмен на термическом начальном участке при восходящем течении тонкого слоя жидкости. – Докл. АН БССР, 1982, № 10, с. 896. 7. С о б и н В.М. Массообмен на диффузионном начальном участке при турбулентном стекании пленки жидкости. – Изв. АН БССР. Сер. физ.-энергет. наук, 1982, № 1, с. 108. 8. С о б и н В.М. Приближенный метод решения дифференциального уравнения параболического типа в теории тепломассообмена. – В сб.: Химия и химическая технология, 1983, вып. 18, с. 109–116.