УДК 532.72:66.03.2

В.М.СОБИН, канд. техн. наук (БТИ)

МАССООБМЕН НА ДИФФУЗИОННОМ НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПРИ ВОСХОДЯЩЕМ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ПЛЕНКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Процессы тепломассообмена в пленках жидкости находят все большее практическое применение в различных отраслях промышленности. В последние годы в СССР и за рубежом наблюдается их особенно интенсивное исследование.

В настоящее время наибольшее развитие получили исследования в ньютоновских пленках жидкости. В первую очередь это относится к процессам теплообмена. Процессы тепломассообмена в пленках неньютоновских жидкостей изучены недостаточно.

Для приложений в технологии полимеров, биохимии, биореологии большое значение имеют процессы абсорбции газа. В работе [1] дается решение задачи массообмена при абсорбции газа стекающими пленками, описываемой степенным уравнением, с постоянным профилем скорости. В литературе [2] методом Фурье найдено решение аналогичной задачи с учетом действительного профиля скорости в стекающей пленке неньютоновской жидкости. При этом задача Штурма—Лиувилля решалась численно (для нескольких значений показателя приведены таблицы для первых десяти собственных значений и собственных функций, даны графики для средней объемной концентрации).

Таким образом, даже для случая массообмена в стекающей пленке неньютоновской жидкости отсутствует аналитическое решение, справедливое для всего диапазона изменений безразмерной продольной координаты и удобное в практических расчетах. Последнее является особенно важным для точных расчетов коэффициента диффузии газа в жидкости.

Дальнейшей интенсификации процессов тепломассообмена можно достигнуть при течении пленок жидкости под действием газа.

В настоящей работе получено приближенное аналитическое решение задачи массообмена на диффузионном начальном участке при абсорбции малорастворимого газа восходящими ламинарными пленками жидкости, описываемой степенным уравнением. Решение справедливо для всех значений продольной координаты и включает множество частных решений, соответствующих различным профилям скорости в пленке: постоянному, линейному, минимального гидравлического сопротивления, а также случаю стекания пленки.

Рассмотрим стабилизированное течение в пленке. Тогда уравнение движения жидкости принимает вид

$$\frac{d\tau}{dy_1} - (\rho g - \psi) = 0, \ \tau = k\left(\frac{du}{dy_1}\right)^s, \tag{1}$$

где τ, ψ — касательное напряжение и градиент давления; y_1 — поперечная координата, отсчитываемая от твердой стенки; ρ, s, k — плотность, степень неньютоновского поведения и мера консистенции жидкости; u — скорость; g — ускорение свободного падения.

Интегрируя первое уравнение (1) дважды, находим

$$u = \frac{k}{t(\rho g - \psi)}\left[B_1 + \frac{(\rho g - \psi)}{k} y_1\right]^t + B_2, \ t = \frac{s+1}{s}. \tag{2}$$

Постоянные интегрирования B_1 и B_2 находим из граничных условий $y_1 = 0$, $u = 0$; $y_1 = \delta$, $\tau = \tau_0$, где δ и τ_0 — толщина пленки жидкости и касательное напряжение на свободной поверхности пленки.

В результате имеем выражение (3)

$$B_1 = [\tau_0 - (\rho g - \psi)\delta]/k; \ B_2 = -\frac{k}{t(\rho g - \psi)} B_1^t. \tag{3}$$

С учетом (3) профиль (2) приобретает вид

$$u^+ = u/u_1 = A[(r - a\eta)^t - 1]; \ \eta = 1 - y_1/\delta; \tag{4}$$

$$A = \left\{\left[\frac{\tau_0}{\tau_0 - (\rho g - \psi)\delta}\right]^t - 1\right\}^{-1}; \ a = \frac{(\rho g - \psi)\delta}{\tau_0 - (\rho g - \psi)\delta}; \ r = 1 + a;$$

$$u_1 = \frac{k}{t(\rho g - \psi)} B_1^t A^{-1}; \ u^+_{ср} = \frac{A}{a}\left(\frac{r^{t+1} - 1}{t+1} - a\right). \tag{5}$$

Профиль скорости (4) включает ряд частных случаев. Например, при s = 1 он переходит в профиль при восходящем течении ньютоновской пленки [3]. При $\tau_0 = (\rho g - \psi)\delta$ наблюдается режим минимального гидравлического сопротивления и $A = 0$, $a \to \infty$ профиль принимает вид

$$u^+ = (1 - \eta)^t. \tag{6}$$

В случае $\tau_0 \to \infty$, соответствующем высоким скоростям газа, $A \to \infty$, $a \to 0$

$$u^+ = 1 - \eta. \tag{7}$$

Наконец, специальный случай $A = a = -1$ соответствует стеканию пленки жидкости

$$u^+ = 1 - \eta^t. \tag{8}$$

Для приведенных ниже расчетов общего случая профиль (4) представлялся в виде степенного ряда

$$u^+ = I_0 - I_1\eta + I_2\eta^2 - I_3\eta^3 + I_4\eta^4 - I_5\eta^5; \tag{9}$$

$$I_0 = A(r^t - 1); \ I_1 = Aar^{t-1}t, \ I_2 = \frac{1}{2}t(t-1)Aa^2r^{t-2}; \ I_3 = \frac{1}{6}t(t-1) \times$$

$\times (t-2)\, Aa^3 r^{t-3}$; $l_4 = \frac{1}{24} t\,(t-1)\,(t-2)\,(t-3)\, Aa^4 r^{t-4}$; $l_5 =$
$= \frac{1}{120}\, t\,(t-1)\,(t-2)\,(t-3)\,(t-4)\, Aa^5 r^{t-5}$.

Дифференциальное уравнение конвективной диффузии в приближении пограничного слоя и краевые условия для данного течения записываются:

$$u^+ \frac{\partial C^+}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 C^+}{\partial \eta^2}; \tag{10}$$

$$C^+(0, \eta) = 0; \; C^+(\xi, 0) = 1; \; \partial C^+(\xi, 1)/\partial \eta = 0. \tag{11}$$

Здесь C^+ — безразмерная концентрация; $\xi = xD/(\delta^2 u_1)$ — безразмерная продольная координата; D — коэффициент диффузии; u_1 — скорость на свободной поверхности пленки.

В такой постановке задача (10), (11) с профилем скорости (4) ранее не рассматривалась и ее аналитическое решение традиционными методами вызывает непреодолимые трудности. Для приближенного аналитического решения краевой задачи (10), (11) используется двухпараметрический интегральный метод [4–6], по которому для диффузионного начального и стабилизированного участков массообмена получаются самостоятельные решения.

Диффузионный начальный участок. На этом участке профиль концентрацией ищется в виде

$$C^+ = (1 - \eta/q)^{n_1}, \tag{12}$$

где n_1, $q(\xi)$ — соответственно параметр профиля и безразмерная толщина диффузионного пограничного слоя.

В результате для определения n_1 и q найдены следующие соотношения:

$$\left[\frac{1}{2} l_0 - \frac{2 l_1 q}{3(n_1+2)} + \frac{3 l_3 q^2}{2(n_1+2)(n_1+3)} - \frac{24 l_3 q^3}{5(n_1+2)\cdots(n_1+4)} + \frac{20 l_4 q^4}{(n_1+2)\ldots(n_1+5)} - \frac{720 l_5 q^5}{7(n_1+2)\cdots(n_1+6)}\right] \frac{(n_1-1)(2n_1+1)}{(n_1+1)(2n_1-1)} = \frac{1}{4} l_0 - \frac{l_1 q}{2n_1+2} + \frac{3 l_2 q^2}{4(2n_1+2)(2n_1+3)} - \frac{12 l_3 q^3}{5(2n_1+2)\cdots(2n_1+4)} + \frac{10 l_4 q^4}{(2n_1+2)\ldots(2n_1+5)} - \frac{360 l_5 q^5}{7(2n_1+2)\ldots(2n_1+6)}; \tag{13}$$

$$n_1(n_1+1)\,\xi = \frac{1}{2} l_0 q^2 - \frac{2}{3}\frac{l_1}{n_1+2} q^3 + \frac{3 l_2}{2(n_1+2)(n_1+3)} q^4 - \frac{24 l_3}{5(n_1+2)\ldots(n_1+4)} q^5 + \frac{20 l_4 q^6}{(n_1+2)\ldots(n_1+5)} - \frac{720 l_5}{7(n_1+2)\ldots(n_1+6)} q^7. \tag{14}$$

Средняя безразмерная концентрация находится по уравнению

$$C^+_{cp} = q\left[\frac{l_0}{n_1+1} - \frac{l_1 q}{(n_1+1)(n_1+2)} + \frac{2! l_2 q^2}{(n_1+1)\ldots(n_1+3)} - \frac{3! l_3 q^3}{(n_1+1)\ldots(n_1+4)}\right. \tag{15}$$

Чтобы получить из (13) – (15) частные случаи для (6) и (7), необходимо в коэффициентах l_i положить: $A(r^t - 1) = Aar^{t-1} = \ldots = 1$ для (6); $A(r^t - 1) = Aar^{t-1} = 1$, $Aa^2r^{t-2} = \ldots = 0$ для (7).

Для случая (8), соответственно, имеем

$$\frac{1}{2(n_1+1)} - \frac{(t+1)(n_1-1)}{(t+2)(2n_1-1)} B_3 q^t = \Big[\frac{1}{4(2n_1+1)} -$$

$$- \frac{t+1}{2(t+2)} q^t \sum_{i=1}^{i=6} (-1)^{i+1} \frac{l_{i-1}}{2n_1+i}\Big]; \qquad (16)$$

$$n_1 \xi = \frac{1}{2(n_1+1)} q^2 - \frac{t+1}{t+2} B_3 q^{t+2}, \quad B_3 = \sum_{i=1}^{i=6} (-1)^{i+1} \frac{l_{i-1}}{n_1+i}; \qquad (17)$$

$$C^+_{cp} = \frac{t+1}{t} \left(\frac{q}{n_1+1} - B_3 q^{t+1} \right). \qquad (18)$$

При этом l_i в (16) – (18) следуют из (9), если в последних положить $A(r^t - 1) = Aar^{t-1} = \ldots = 1$.

Локальные и средние диффузионные числа на начальном участке числа Нуссельта определяются по зависимостям:

$$Nu_g = \beta\delta/D = n_1 [q(1 - C^+_{cp})]^{-1};$$

$$\overline{Nu}_g = \overline{\beta}\delta/D = \frac{1}{\xi} \int_0^\xi Nu_g \, d\xi = -\frac{1}{\xi} \ln(1 - C^+_{cp}),$$

где $\beta, \overline{\beta}$ – локальный и средний коэффициент массоотдачи.

Стабилизированный участок массообмена. На этом участке профиль аппроксимируется

$$C^+ = (1 - C_1^+)(1-\eta)^{n_2} \sim + C_1^+,$$

где n_2 и C_1^+ – параметр профиля и безразмерная концентрация на твердой стенке $\eta = 1$.

В результате для определения n_2 и $C_1^+(\xi)$ имеем следующие соотношения:

$$u^+_{cp} - B_4 = \frac{n_2(2n_2-1)(2n_2+1)(2n_2+3)}{n_2^2 - 1} \Big[l_0(2n_2+3) - \frac{3l_1(2n_2+3)}{2(n_2+2)} +$$

$$+ \frac{l_2(7n_2+11)}{(n_2+2)(n_2+3)} - \frac{15 l_3(3n_2+5)}{2(n_2+2)\ldots(n_2+4)} + \frac{6 l_4(31n_2^2+132n_2+137)}{(n_2+2)\ldots(n_2+5)(2n_2+5)} -$$

$$- \frac{45 l_5(21n_2^2+91n_2+98)}{(n_2+2)\ldots(n_2+6)(2n_2+5)} \Big];$$

$$B_4 = \frac{I_0}{n_2+1} - \frac{I_1}{(n_2+1)\,(n_2+2)} + \frac{2!I_2}{(n_2+1)\ldots(n_2+3)} - \frac{3!I_3}{(n_2+1)\ldots(n_2+4)} +$$

$$+ \frac{4!I_4}{(n_2+1)\ldots(n_2+5)} - \frac{5!I_5}{(n_2+1)\ldots(n_2+6)};$$

$$C_1^+ = 1-\exp[-n_2(U_{cp}^+ - B_4)^{-1}(\xi-\xi_1)],\; C_{cp}^+ = C_1^+ + (1-C_1^+)\,B_4/u_{cp}^+,$$

где ξ_1 — безразмерная длина диффузионного начального участка.

Для случая (8) находим

$$\frac{t}{t+1} = \frac{3n_2-2}{n_2-1}\,B_5 - \frac{2n_2-1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{i=5}(-1)^{i+1}\frac{I_i}{2n_2+(i+1)};$$

$$C_1^+ = 1-\exp[-n_2(\frac{t}{t+1} - B_5)^{-1}(\xi-\xi_1)];\; C_{cp}^+ = C_1^+ + \frac{t+1}{t}B_5\,(1-C_1^+);\quad (25)$$

$$B_5 = \sum_{i=1}^{i=5}(-1)^{i+1}\frac{I_i}{n_2+(i+1)}.$$

Локальные и средние числа Нуссельта на этом участке определяются по зависимостям

$$Nu_g = n_2\,(1-B_4/u_{cp}^+) = Nu_{g\,2} = \text{const};$$

$$\overline{Nu}_g = [\overline{Nu}_{g\,1}\cdot\xi_1 + Nu_{g\,2}\,(\xi-\xi_1)]\,\xi^{-1},$$

где $Nu_{g\,1}$ — среднее число Нуссельта в конце диффузионного начального участка.

Полученное здесь приближенное аналитическое решение для стекающей пленки при s = 0; 1; ∞ сопоставлено с решением [2]; максимальные отклонения в C_{cp}^+ составляют несколько процентов, однако оно оказывается значительно удобнее известного решения в конкретных расчетах. Заметим, что в случае восходящего течения при s =1 решение переходит в ранее полученное [6].

Представленное решение может быть использовано в инженерных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульман З.П., Байков В.И. Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях. — Минск, 1979. — 295 с. 2. Yih S.M., Huang P.G. Gas absorption with or without chemical reaction in laminar non — Newtonian falling liguid films. — Chem. Eng. Sci., 1981, 36, № 2, p. 387—397. 3. Семенов П.А. Течение тонких слоев жидкости. — ЖТФ, 1944, 14, № 7—8, с. 427—437. 4. Собин В.М. Приближенный метод решения дифференциального уравнения параболического типа в теории тепломассообмена. — В кн.: Химия и химическая технология. Минск, вып. 18, 1983, с. 109—116. 5. Собин В.М. Теплообмен в стекающей пленке жидкости на термическом начальном участке. — ИФЖ, 1980, 39, № 4, с. 592—596. 6. Собин В.М. Массообмен на диффузионном начальном участке при восходящем течении тонкого слоя жидкости. — Изв. АН БССР. Сер. ФЭН, 1983, № 3, с. 113.