ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. В. И. ЛЕНИНА. СЕРИЯ I, 1969, № 2

УДК 625.72:55

С. И. ГАЙДУК, И. И. ЛЕОНОВИЧ, Л. А. ПРОКОПЧИК

ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОСАДОК ВЯЗКО-УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

В зависимости от вида материала, влажности, температуры и других физических свойств дорожные конструкции под воздействием внешней нагрузки ведут себя по-разному. Когда дорожная конструкция обладает достаточным запасом прочности, а нагрузка имеет сравнительно небольшую величину, тогда работа ее протекает в пределах упругих деформаций.

В других случаях под воздействием колес подвижного состава дорога деформируется не мгновенно, а постепенно: деформации растут во времени и зависят не только от величины внешней нагрузки, но и от продолжительности ее приложения. Можно сказать, что в этом случае в дорожной конструкции протекают вязко-упругие деформации.

Иногда под действием колес подвижного состава в покрытии возникают и накапливаются пластические необратимые деформации.

Работа конструкций в упругой стадии исследована достаточно полно. Разработана стройная теория упругости, которая широко применяется для решения многих практических задач, включая задачи расчета прочности капитальных и усовершенствованных одежд автомобильных дорог.

Пластические деформации могут возникать при движении автомобилей по целине, естественным грунтам, а также по временным автомобильным дорогам. С точки зрения дорожной практики этот случай является предельным и не может быть положен в основу расчета дорог на прочность.

Вязко-упругие деформации являются наиболее распространенными в дорожных конструкциях, построенных с применением различных вязко-упругих материалов.

Как известно [1], величины смещений точек вязко-упругого тела при малых деформациях удовлетворяют линеализированной системе уравнений Навье — Стокса — Ламе, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\rho\left(F_x-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+D\,\Delta u+\eta\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+(D+\alpha)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+(\eta+\mu)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial t}=0;\\
&\rho\left(F_y-\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\right)+D\Delta v+\eta\Delta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)+(D+\alpha)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+(\eta+\mu)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y\partial t}=0; \qquad (1)\\
&\rho\left(F_z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+D\,\Delta w+\eta\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)+(D+\alpha)\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+(\eta+\mu)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z\partial t}=0,
\end{aligned}$$

где ρ — плотность материала; F_x, F_y, F_z — проекции вектора внешней силы $\vec{F}$ на координатные оси $0x$, $0y$, $0z$ соответственно; $u\,(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ — проекции вектора смещения $\vec{v}$ на координатные оси $0x$, $0y$, $0z$ соответственно; D, α—упругие постоянные; η, μ — вязкие постоянные,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \ \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

При исследовании вязко-упругих деформаций в дорожной конструкции предположим, что она аппроксимирована в виде однородного слоя ограниченных размеров ($-l \leqslant x \leqslant l$, $-l \leqslant y \leqslant l$, $0 \leqslant z \leqslant H$), названного основанием, который загружается нормальным давлением $P(x, y, t)$ при закрепленных точках боковой поверхности основания ($x = -l$, $x = l$, $y = -l$, $y = l$) и закрепленных точках нижней горизонтальной грани основания ($z = H$).

В этом случае $F_x = F_y = 0$, $u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) = 0$ и система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z \partial t} = 0, \\
& a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + b \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z \partial t} = 0, \qquad (2) \\
& B \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial t} + D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + K_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

где $B = 2D + \alpha$, $\gamma = 2\eta + \mu$, $a = B - D$, $b = \gamma - \eta$, $K_z = \rho F$.

Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид [2]:

$$\left.\begin{aligned}
& w/_{x=-l} = 0, \ w/_{x=l} = 0, \ w/_{y=-l} = 0, \ w/_{y=l} = 0, \\
& B \frac{\partial w}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \Big/_{z=0} = -P(x, y, t), \ w/_{z=H} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Полагая, что $K_z = \rho F_z = A e^{-\frac{a}{b} t}$ и $P(x, y, t) = \Phi(x, y) e^{-\frac{a}{b} t}$, решение системы (2) при условиях (3) будем искать в виде

$$w(x, y, z, t) = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{A}{\rho} + W(x, y, z)\right] e^{-\frac{a}{b} t}, \qquad (4)$$

где $W(x, y, z)$— некоторая функция, которую предстоит определить.

Подставляя (4) в систему (2), получаем, что первых ее два уравнения удовлетворяются при любой функции $W(x, y, z)$, а из третьего уравнения системы получаем новое уравнение для определения функции $W(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - q W = 0, \qquad (5)$$

где $q = \frac{\rho (B - D)^2}{(\gamma - \eta)(D\gamma - B\eta)}$ (считаем для определенности, что $q > 0$).

Из граничных условий (3) получаем следующие граничные условия для функции $W(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
& W/_{x=\pm l} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{A}{\rho}; \\
& W/_{y=\pm l} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{A}{\rho}; \qquad (6) \\
& W/_{z=H} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big/_{z=0} = -\varkappa \Phi(x, y),
\end{aligned}$$

где $\varkappa = \frac{\eta - \gamma}{B\eta - D\gamma}$.

Задачу решения уравнения (5) при условиях (6) разобьем на следующие три задачи:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2}-qW_1=0; \qquad (7)$$

$$W_1/_{x=\pm l}=-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{A}{\rho}; \qquad (8)$$

$$W_1/_{y=\pm l}=0; \qquad (9)$$

$$W_1/_{z=H}=0,\ \frac{\partial W_1}{\partial z}\Big/_{z=0}=0; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W_2}{\partial z^2}-qW_2=0; \qquad (11)$$

$$W_2/_{x=\pm l}=0,\ W_2/_{y=\pm l}=-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{A}{\rho},\ W_2/_{z=H}=0,\ \frac{\partial W_2}{\partial z}\Big/_{z=0}=0;$$

$$\frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W_3}{\partial z^2}-qW_3=0; \qquad (12)$$

$$W_3/_{x=\pm l}=0,\ W_3/_{y=\pm l}=0,\ W_3/_{z=H}=-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{A}{\rho},\ \frac{\partial W_3}{\partial z}\Big/_{z=0}=-\varkappa\Phi(x,y).$$

Решение каждой из трех сформулированных задач можно построить методом Фурье [3, 4].

Решение первоначальной задачи (5), (6) будет представлять собой сумму решений задач (7) — (10), (11) и (12). Построим, например, решение задач (7)—(10). Полагая, что $W_1(x,y,z)=У(y)U(x,z)$, из уравнения (7) и условий (9), (10) получаем уравнение

$$У''+\lambda У=0 \qquad (13)$$

с дополнительными условиями

$$У(-l)=0,\ У(l)=0 \qquad (14)$$

и уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-(q+\lambda)U=0 \qquad (15)$$

с дополнительными условиями

$$U/_{z=H}=0,\ \frac{\partial U}{\partial z}\Big/_{z=0}=0, \qquad (16)$$

где λ — постоянная положительная величина. Уравнение (13) при условиях (14) имеет ненулевые решения при

$$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2 (k=1,\ 2,\ 3...), \qquad (17)$$

и они с точностью до постоянных имеют вид

$$У_k(y)=\sin\frac{k\pi}{2l}(l+y)\ (k=1,\ 2,\ 3...). \qquad (18)$$

Полагая, что

$$U(x,\ z)=X(x)Z(z), \qquad (19)$$

из уравнения (15) и условий (16) получаем два уравнения:

$$Z'' + \bar{\lambda} Z = 0; \tag{20}$$

$$X'' - sX = 0, \tag{21}$$

где $\bar{\lambda}$ — постоянная положительная величина,

$$s = q + \lambda + \bar{\lambda}, \tag{22}$$

$$z(H) = 0, \; Z'(0) = 0. \tag{23}$$

Из (20) и (23) находим, что

$$\bar{\lambda}_m = \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2}, \tag{24}$$

$$Z_m(z) = \cos \frac{(2m+1)\pi}{2H} z. \tag{25}$$

Из (17), (22) и (24) следует, что

$$s_{km} = q + \frac{\pi^2}{4}\left[\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{H}\right)^2\right] (k = 1,\ 2,\ 3 \ldots,\ m = 0, 1,\ 2, \ldots).$$

Общее решение уравнения (21) имеет вид

$$X_{km}(x) = C_{km} e^{\sqrt{s_{km}}\, x} + D_{km} e^{-\sqrt{s_{km}}\, x}, \tag{26}$$

где C_{km}, D_{km} — произвольные постоянные. Учитывая (18), (25), (26) и линейность уравнения (7), получаем:

$$W_1(x,\ y,\ z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(C_{km}\, e^{\sqrt{s_{km}}\, x} + D_{km}\, e^{-\sqrt{s_{km}}\, x}\right) \sin \frac{k\pi}{2l}(l + y) \times$$

$$\times \cos \frac{(2m+1)\pi z}{2H}. \tag{27}$$

Требуя удовлетворения условий (8), из (27) получаем равенство

$$-\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{A}{\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(C_{km}\, e^{\pm\sqrt{s_{km}}\, l} + D_{km} e^{\pm\sqrt{s_{km}}\, l}\right) \sin \frac{k\pi}{2l}(l + y) \times$$

$$\times \cos \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \tag{28}$$

$$(-l \leqslant y \leqslant l,\ 0 \leqslant z \leqslant H).$$

Используя свойство ортогональности функций $\sin \frac{k\pi}{2l}(l + y) \cos \frac{(2m+1)\pi z}{2H}$ в прямоугольнике $-l \leqslant y \leqslant l,\ 0 \leqslant z \leqslant H$, из (28) получаем, что

$$C_{mn} = D_{mn} = \frac{32A}{\rho \pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)(2n+1)\, \mathrm{ch} \sqrt{s_{mn}}\, l} \tag{29}$$

$$(m,\ n = 0,\ 1,\ 2 \ldots).$$

Подставляя в (28) вместо постоянных C_{km} и D_{km} их значения (29) и учитывая, что $k = 2n + 1$ $(n = 0,\ 1,\ 2 \ldots)$, получаем

$$W_1 = \frac{16A}{\rho\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos \frac{(2m+1)}{2H} \pi z}{(2m+1)(2n+1)\, \mathrm{ch} \sqrt{s_{mn}}\, l}\, \mathrm{ch} \sqrt{s_{mn}}\, x \sin \frac{(2n+1)\pi (l + y)}{2l}.$$

Аналогично строим решения двух остальных задач. Для функций $W_2(x, y, z)$ и $W_3(x, y, z)$ получим следующие выражения:

$$W_2 = \frac{16A}{\rho\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi z}{2H}}{(2m+1)(2n+1)\,\mathrm{ch}\sqrt{s_{mn}}\,l}\,\mathrm{ch}\sqrt{s_{mn}}\,y \sin\frac{(2n+1)\pi(l+x)}{2l},$$

$$W_3 = \frac{\varkappa}{l^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}\,\mathrm{sh}\sqrt{r_{mn}}\,(H-z)}{\sqrt{r_{mn}}\,\mathrm{ch}\sqrt{r_{mn}}\,H}\sin\frac{m\pi}{2l}(l+x)\sin\frac{n\pi}{2l}(l+y) -$$

$$-\frac{16A}{\pi\rho^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\sqrt{R_{mn}}\,z}{(2m+1)(2n+1)\,\mathrm{ch}\sqrt{R_{mn}}\,H}\sin\frac{(2m+1)\pi(l+x)}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi(l+y)}{2l},$$

где

$$r_{mn} = q + \frac{\pi^2}{4l^2}(m^2+n^2),\quad R_{mn} = q + \frac{\pi^2}{4l^2}\left[(2m+1)^2 + (2n+1)^2\right],$$

$$A_{mn} = \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l}\Phi(x, y)\sin\frac{m\pi}{2l}(l+x)\sin\frac{n\pi}{2l}(l+y)\,dx\,dy.$$

Подставляя в (4) вместо $W(x, y, z)$ сумму $W_1 + W_2 + W_3$, получаем

$$w(x, y, z, t) = \left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{A}{\rho}e^{-\frac{a}{b}t} +$$

$$+\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{16A}{\pi^2\rho}e^{-\frac{a}{b}t}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi z}{2H}}{(2m+1)(2n+1)\,\mathrm{ch}\sqrt{s_{mn}}\,l}\times$$

$$\times\left[\mathrm{ch}\sqrt{s_{mn}}\,x\sin\frac{(2n+1)\pi(l+y)}{2l} + \mathrm{ch}\sqrt{s_{mn}}\,y\sin\frac{(2m+1)\pi(l+x)}{2l}\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{16A}{\pi^2\rho}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\sqrt{R_{mn}}\,z}{(2m+1)(2n+1)\,\mathrm{ch}\sqrt{R_{mn}}\,H}\sin\frac{(2m+1)\pi(l+x)}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi(l+y)}{2l} -\right.$$

$$\left.-\frac{\varkappa}{l^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{mn}\,\mathrm{sh}\sqrt{r_{mn}}\,(H-z)}{\sqrt{r_{mn}}\,\mathrm{ch}\sqrt{r_{mn}}\,H}\sin\frac{m\pi}{2l}(l+x)\sin\frac{n\pi}{2l}(l+y)\right]e^{-\frac{a}{b}t}.$$

Пренебрегая объемными силами ($A = 0$), получаем, что

$$w(x, y, z, t) = \frac{\varkappa}{l^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left[\frac{\mathrm{sh}\sqrt{r_{mn}}\,(H-z)}{\sqrt{r_{mn}}\,\mathrm{ch}\sqrt{r_{mn}}\,H}\sin\frac{m\pi}{2l}(l+x)\sin\frac{n\pi}{2l}(l+y)\right]\times$$

$$\times e^{-\frac{a}{b}t}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимов А. Н. ПММ, т. 2, вып. 3, 1939.
2. Муравский Г. Б. «Строительная механика», 1967, № 6.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М., 1954.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1966.

БГУ им. В. И. Ленина, кафедра высшей математики и математической физики, БТИ им. С. М. Кирова, кафедра сухопутного транспорта леса и дорожных машин