ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. В. И. ЛЕНИНА. СЕРИЯ I, 1971, № 1 (7)

УДК 625.72:55

С. И. ГАЙДУК, И. И. ЛЕОНОВИЧ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОСАДОК УПРУГО-ВЯЗКОГО ОСНОВАНИЯ

В связи с тем, что под воздействием колес транспорта происходит деформирование покрытий дорог, приходится заниматься исследованием дорожных конструкций и, в частности, определять величины деформаций в различных материалах, находящихся под воздействием внешних нагрузок. Наиболее распространены в дорожных конструкциях упруго-вязкие деформации. При их исследовании необходимо ввести ряд предпосылок, которые позволяют создать физическую модель дорожной конструкции и составить уравнение, описывающее ее поведение под воздействием выбранной внешней нагрузки. Эти предпосылки вполне правомерны, так как они базируются на экспериментальном материале, полученном при исследовании дорожных конструкций на грунтовом канале Белорусского технологического института имени С. М. Кирова.

Предположим, что дорожная конструкция аппроксимирована в виде однородного упруго-вязкого слоя ограниченных размеров $(-l \leqslant x \leqslant l,\ -l \leqslant y \leqslant l,\ 0 \leqslant z \leqslant H)$, который назовем упруго-вязким основанием. Пусть точки боковой поверхности $(x = \pm l,\ y = \pm l)$ и нижней горизонтальной грани $(z = H)$ основания закреплены неподвижно, а на верхнюю горизонтальную грань $(z = 0)$ действует нормальное давление

$$P(x,\ y,\ t) = A \sin \frac{\pi}{2T} t \quad (A = \text{const},\ 0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

и пусть в начальный момент времени основание находилось в недеформированном состоянии.

Как известно [1], величины смещений точек упруго-вязкого тела при малых деформациях удовлетворяют линеаризированной системе уравнений Навье — Стокса — Ламе, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= D \Delta u + \eta \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + (D + \alpha) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + (\eta + \mu) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial t} + \rho F_x; \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= D \Delta v + \eta \Delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + (D + \alpha) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + (\eta + \mu) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y \partial t} + \rho F_y; \\
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= D \Delta w + \eta \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + (D + \alpha) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + (\eta + \mu) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z \partial t} + \rho F_z,
\end{aligned} \tag{2}$$

где ρ — объемная плотность материала; $u(x,\ y,\ z,\ t)$, $v(x,\ y,\ z,\ t)$, $w(x,\ y,\ z,\ t)$ — проекции вектора смещения на координатные оси соответственно; D, α — упругие постоянные; η, μ — вязкие постоянные; F_x, F_y, F_z — проекции вектора внешней объемной силы на координатные оси; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; $\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

Величину $w(x,\ y,\ z,\ t)$ в системе (2) можно рассматривать в качестве просадки выбранного нами упруго-вязкого основания под воздействием внешней нагрузки (1). В общем случае найти $w(x, y, z, t)$ из системы (2) не представляется возможным, поэтому ограничимся в настоящей работе одним частным случаем. Предположим, что имеет место так называемая «чистая деформация» [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

тогда система (2) распадается на три отдельных уравнения, причем для просадки $w\ (x, y, z, t)$ получаем уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = B\,\Delta w + \gamma\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + K_z, \tag{3}$$

где $B = 2D + \varkappa$; $\gamma = 2\eta + \mu$; $K_z = \rho F_z$.

Уравнение (3) нужно решить при следующих условиях [3]:

$$w\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0; \tag{4}$$

$$\begin{gathered} w\big|_{x=-l} = 0, \quad w\big|_{x=l} = 0, \quad w\big|_{y=-l} = 0, \quad w\big|_{y=l} = 0; \\ B\frac{\partial w}{\partial z} + \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial z}\Big|_{z=0} = -P(x, y, t), \quad w\big|_{z=H} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Применяя к задаче (3)—(5) последовательно конечные интегральные преобразования [4]:

$$\bar{w}(k, y, z, t) = \int_{-l}^{l} w(x, y, z, t)\sin\frac{k\pi}{2l}(l + x)\,dx;$$

$$\bar{\bar{w}}(k, m, z, t) = \int_{-l}^{l} \bar{w}(k, y, z, t)\sin\frac{m\pi}{2l}(l + y)\,dy;$$

$$\bar{\bar{\bar{w}}}(k, m, n, t) = \int_{0}^{H} \bar{\bar{w}}(k, m, z, t)\cos\frac{2n+1}{2H}\pi z\,dz;$$

$$(k, m = 1, 2, 3, \ldots, \ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

формулы обращения для которых имеют соответственно вид:

$$\begin{gathered} w(x, y, z, t) = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{w}(k, y, z, t)\sin\frac{k\pi}{2l}(l + x); \\ \bar{w}(k, y, z, t) = \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\bar{w}}(k, m, z, t)\sin\frac{m\pi}{2l}(l + y); \\ \bar{\bar{w}}(k, m, z, t) = \frac{2}{H}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\bar{\bar{w}}}(k, m, n, t)\cos\frac{2n+1}{2H}\pi z, \end{gathered} \tag{6}$$

сведем ее к следующей задаче:

$$\rho\frac{d^2\bar{\bar{\bar{w}}}}{dt^2} + a_{kmn}\frac{d\bar{\bar{\bar{w}}}}{dt} + b_{kmn}\bar{\bar{\bar{w}}} = \varphi_{kmn}(t); \tag{7}$$

$$\bar{\bar{\bar{w}}}\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{d\bar{\bar{\bar{w}}}}{dt}\Big|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

где $a_{kmn} = \frac{\pi^2}{4}\gamma\left[\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{H}\right)^2\right],$

$$b_{kmn} = \frac{\pi^2}{4} B\left[\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{H}\right)^2\right],$$

$$\varphi_{kmn}(t) = \overline{\overline{P}}(k, m, t) + \frac{8Hl^2K_z}{\pi^3 km(2n+1)}(-1)^n[1-(-1)^k]\,[1-(-1)^m], \qquad (9)$$

$$\overline{\overline{P}}(k, m, t) = \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} P(x, y, t)\sin\frac{k\pi}{2l}(l+x)\sin\frac{m\pi}{2l}(l+y)\,dxdy. \qquad (10)$$

Решение уравнения (7) при условиях (8) можно записать в виде:

$$\overline{\overline{\overline{w}}}(k, m, n, t) = \frac{1}{\rho\, q_{kmn}}\int_0^t e^{-p_{kmn}(t-\tau)}\sin q_{kmn}(t-\tau)\,\varphi_{kmn}(\tau)\,d\tau$$

$$\text{при } a_{kmn}^2 - 4\rho\, b_{kmn} < 0, \qquad (11)$$

$$\overline{\overline{\overline{w}}}(k, m, n, t) = \frac{1}{\rho\, S_{kmn}}\int_0^t e^{-p_{kmn}(t-\tau)}\,\mathrm{sh}\, s_{kmn}(t-\tau)\,\varphi_{kmn}(\tau)\,d\tau$$

$$\text{при } a_{kmn}^2 - 4\rho\, b_{kmn} > 0,$$

где

$$p_{kmn} = \frac{a_{kmn}}{2\rho}, \quad q_{kmn} = \frac{1}{2\rho}\sqrt{4\rho\, b_{kmn} - a_{kmn}^2};$$

$$s_{kmn} = \frac{1}{2\rho}\sqrt{a_{kmn}^2 - 4\rho\, b_{kmn}}.$$

Из (6) следует, что

$$w(x, y, z, t) = \frac{2}{Hl^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\overline{\overline{w}}}(k, m, n, t)\sin\frac{k\pi}{2l}(l+x)\sin\frac{m\pi}{2l}(l+$$

$$+y)\cos\frac{2n+1}{2H}\pi z,$$

где $\overline{\overline{\overline{w}}}(k, m, n, t)$ дается формулами (11).

Вычислив в (11) интегралы с учетом (1), (9), (10) и введя обозначения:

$$\overline{p}_{kmn} = \frac{\gamma}{2\rho} r_{kmn}, \quad \overline{q}_{kmn} = \frac{1}{2\rho}\sqrt{-\Delta_{kmn}}, \quad \overline{s}_{kmn} = \frac{1}{2\rho}\sqrt{\Delta_{kmn}};$$

$$\Delta_{kmn} = (\gamma^2 r_{kmn} - 4B\rho)\, r_{kmn};$$

$$r_{kmn} = \frac{\pi^2}{4}\left[\left(\frac{2k+1}{l}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{l}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{H}\right)^2\right],$$

получим следующее выражение для просадки $w(x, y, z, t)$:

$$w(x, y, z, t) = \frac{32}{\rho\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{A}{H} I_{kmn}(t) + (-1)^n\frac{2K_z}{(2n+1)\pi} J_{kmn}(t)\right]\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}(l+x)\sin\frac{(2m+1)\pi}{2l}(l+y)\cos\frac{2n+1}{2H}\pi z}{(2k+1)(2m+1)}, \qquad (12)$$

где $I_{kmn}(t) = \dfrac{4T^2 \{[4T^2(\overline{p}^2_{kmn} + \overline{q}^2_{kmn}) - \pi^2] \sin \frac{\pi}{2T} t + 4\pi\, T\overline{p}_{kmn} \cos \frac{\pi}{2T} t\}}{16T^4 \overline{p}^4_{kmn} + 8T^2(\pi^2 + 4T^2\overline{q}^2_{kmn})\overline{p}^2_{kmn} + (\pi^2 - 4T^2\overline{q}^2_{kmn})^2} +$

$$+ \frac{2\pi T\, \{[(\overline{p}^2_{kmn} - \overline{q}^2_{kmn})4T^2 + \pi^2] \sin \overline{q}_{kmn} t + 8T^2 \overline{p}_{kmn} \overline{q}_{kmn} \cos \overline{q}_{kmn} t\}}{\overline{q}_{kmn}[16T^4 \overline{p}^2_{kmn} + 8T^2(\pi^2 + 4T^2\overline{q}^2_{kmn})\overline{p}^2_{kmn} + (\pi^2 - 4T^2\overline{q}^2_{kmn})^2]} e^{-\overline{p}_{kmn} t},$$

если $\Delta_{kmn} < 0$; (13)

$$I_{kmn}(t) = \frac{4T^2 \left\{[4T^2(\overline{p}^2_{kmn} - \overline{p}^2_{kmn}) - \pi^2] \sin \frac{\pi}{2T} t - 4\pi\, T \cos \frac{\pi}{2T} t\right\}}{\pi^4 + 8\pi^2 T^2 (\overline{p}^2_{kmn} + \overline{s}^2_{kmn}) + 16T^4(\overline{p}^2_{kmn} - \overline{s}^2_{kmn})^2} +$$

$$+ \frac{2\pi T\, \{[\pi^2 + 4T^2(\overline{p}^2_{kmn} + \overline{s}^2_{kmn})] \operatorname{sh} \overline{s}_{kmn} t + 8T^2 \overline{p}_{kmn} \overline{s}_{kmn} \operatorname{ch} \overline{s}_{kmn} t\}}{\overline{s}_{kmn}[\pi^4 + 8\pi^2 T^2(\overline{p}^2_{kmn} + \overline{s}^2_{kmn}) + 16T^4(\overline{p}^2_{kmn} - \overline{s}^2_{kmn})^2]} e^{-\overline{p}_{kmn} t},$$

если $\Delta_{kmn} > 0$;

$$J_{kmn}(t) = \frac{1}{\overline{q}_{kmn}(\overline{p}^2_{kmn} + \overline{q}^2_{kmn})} [\overline{q}_{kmn} - e^{-\overline{p}_{kmn} t} (\overline{p}_{kmn} \sin \overline{q}_{kmn} t +$$

$$+ \overline{q}_{kmn} \cos \overline{q}_{kmn} t)], \text{ если } \Delta_{kmn} < 0; \tag{14}$$

$$J_{kmn}(t) = \frac{1}{\overline{s}_{kmn}(\overline{p}^2_{kmn} - \overline{s}^2_{kmn})} [\overline{s}_{kmn} - e^{-\overline{p}_{kmn} t} (\overline{p}_{kmn} \operatorname{sh} \overline{s}_{kmn} t +$$

$$+ \overline{s}_{kmn} \operatorname{ch} \overline{s}_{kmn} t)], \text{ если } \Delta_{kmn} > 0.$$

Рассмотрим два частных случая задачи (3)—(5). Предположим, что $\eta = 0$ и $\mu = 0$, т. е. пусть наше основание является упругим. В этом случае $\overline{P}_{kmn} = 0$, а $\Delta_{kmn} < 0$ для всех k, m, n, поэтому из (13) и (14) следует, что в случае упругого основания в выражении для просадки (12) величины $I_{kmn}(t)$ и $J_{kmn}(t)$ даются следующими формулами:

$$I_{kmn}(t) = \frac{2T\left(\pi \sin \overline{q}_{kmn} t - 2T\overline{q}_{kmn} \sin \frac{\pi}{2T} t\right)}{\overline{q}_{kmn}(\pi^2 - 4T^2 \overline{q}^2_{kmn})}, \tag{15}$$

$$J_{kmn}(t) = \frac{1 - \cos \overline{q}_{kmn} t}{\overline{q}^2_{kmn}}, \tag{16}$$

$$\overline{q}^2_{kmn} = \frac{\pi}{2\sqrt{\rho}} \sqrt{B\left[\left(\frac{2k+1}{l}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{l}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{H}\right)^2\right]}. \tag{17}$$

Теперь предположим, что $D = 0$ и $\alpha = 0$, т. е. пусть наше основание является чисто вязким. В этом случае $\Delta_{kmn} > 0$ для всех k, m, n, а $\overline{S}_{kmn} = \overline{P}_{kmn}$, поэтому и в случае чисто вязкого основания формулы для величин $I_{kmn}(t)$ и $J_{kmn}(t)$ в выражении для просадки (12) упрощаются. Из (13) следует, что

$$I_{kmn}(t) = \frac{2T[(\pi^2 + 8T^2\overline{p}^2_{kmn}) \operatorname{sh} \overline{p}_{kmn} t + 8T^2 \overline{p}^2_{kmn} \operatorname{ch} \overline{p}_{kmn} t]}{\pi\, \overline{p}_{kmn}(\pi^2 + 16T^2 \overline{p}^2_{kmn})} e^{-\overline{p}_{kmn} t} -$$

$$- \frac{4T^2\left(\pi \sin \frac{\pi}{2T} t + 4T \cos \frac{\pi}{2T} t\right)}{\pi^2(\pi^2 + 16T^2 \overline{p}^2_{kmn})}, \tag{18}$$

а из (11) можно получить, что

$$J_{kmn}(t) = \frac{t}{2\bar{p}_{kmn}} - \frac{1}{4\bar{p}_{kmn}^2}\left(1 - e^{-2\bar{p}_{kmn} t}\right), \qquad (19)$$

причем

$$\bar{p}_{kmn} = \frac{\pi^2\gamma}{2\rho}\left[\left(\frac{2k+1}{l}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{l}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{H}\right)^2\right].$$

Используя общее решение (12), а также частные решения, полученные с помощью формул (15)—(19), можно найти численное значение деформации дорожного покрытия в зависимости от физико-механических свойств материалов и характера внешней нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимов А. Н. ПММ, 2, вып. 3, 379—388, 1938.
2. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М., 1959.
3. Муравский Г. Б. «Строительная механика и расчет сооружений», № 6, 14—17, 1967.
4. Кошляков Н. С. и др. Дифференциальные уравнения математической физики. М., 1962.

Поступила в редакцию
13/II 1970 г.

*БГУ им. В. И. Ленина,
кафедра высшей математики и математической физики,
БТИ им. С. М. Кирова,
кафедра сухопутного транспорта леса и дорожных машин*