

И. И. ЛЕОНОВИЧ, С. И. ГАЙДУК, А. П. ЛАЩЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКОЙ МОДЕЛИ К РАСЧЕТУ ДОРОЖНЫХ ОДЕЖД

К числу основных методов, которые применяются в инженерной практике при расчете толщины конструктивных, защитных и других слоев дорожной одежды, можно отнести методы, основанные на теории упругости (Н. Н. Иванова, А. И. Кривичского, М. Б. Корсунского и др.), методы, основанные на теории накопления деформации, и эмпирические методы (СВР, ААШО, Хви́ма и др.).

Эти методы изучены достаточно подробно и детально изложены в литературе по автомобильным дорогам [1, 3, 4, 7].

В настоящее время специалистами различных научных центров принимаются попытки создать новый метод расчета дорожных одежд, в котором учитывались бы реологические свойства материалов [6, 8]. Над решением этого вопроса трудится группа научных сотрудников Белорусского технологического института им. С. М. Кирова.

Проведенные исследования показывают, что в качестве физической модели упруго-вязкого слоя дорожной одежды может быть принята модель типичного тела (см. рисунок).

Как известно [2], при соединении двух упругих и одного вязкого элемента получим модель, которая описывается дифференциальным уравнением вида

$$En\varepsilon + H\varepsilon = n\sigma + \sigma, \quad (1)$$

где E — мгновенный модуль упругости; H — длительный модуль упругости; n — время релаксации; ε — деформация; σ — напряжение.

Для решения уравнения (1) примем, что

$$b = n, \quad a = H, \quad \gamma = nE, \quad \sigma = v(z, t), \quad \varepsilon = \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}.$$

Кроме того, к нему прибавим уравнение перемещения частиц. В итоге получаем систему

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial z} + b \frac{\partial v}{\partial t} + v, \quad (2)$$
$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

При исследовании вязко-упругих деформаций дорожных конструкций предположим, что они аппроксимированы в виде однородного слоя ограниченных размеров, который загружается нормальным давлением $v(z, t)$, изменяющимся во времени.

Начальные условия при сделанных предположениях будут иметь вид

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

граничные же условия примут выражение

$$v|_{z=0} = \alpha(t), \quad v|_{z=H} = \beta(t), \quad (4)$$

$$\alpha(t) = \frac{4At}{T} \left(1 - \frac{t}{T} \right), \quad \beta(t) = \frac{4Bt}{T} \left(1 - \frac{t}{T} \right).$$

Применяем одностороннее преобразование Лапласа по формуле

$$\bar{u}(z, \lambda) = \int_0^{\infty} u(z, t) e^{-\lambda t} dt$$

к системе (2) и, учитывая начальные и граничные условия (3), (4), получаем новую систему уравнений

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{1 + b\lambda}{a + \gamma\lambda} \bar{v}(z, \lambda), \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dz} = \rho\lambda^2 \bar{u}(z, \lambda).$$

Перейдем к изображениям в граничных условиях:

$$v(z, \lambda)|_{z=0} = \frac{4A}{\lambda^2 T} \left(1 - \frac{2}{\lambda T} \right), \quad (6)$$

$$v(z, \lambda)|_{z=H} = \frac{4B}{\lambda^2 T} \left(1 - \frac{2}{\lambda T} \right).$$

Смешанная задача (2) — (4) свелась к задаче (5), (6) в области изображения по Лапласу:

$$\begin{aligned} \bar{v}(z, \lambda) = & \frac{4B}{\lambda^2 T} \left(1 - \frac{2}{\lambda T} \right) \frac{\text{sh } \omega z}{\text{sh } \omega H} + \\ & + \frac{4A}{\lambda^2 T} \left(1 - \frac{2}{\lambda T} \right) \frac{\text{sh } \omega (H - z)}{\text{sh } \omega H}, \end{aligned} \quad (7)$$

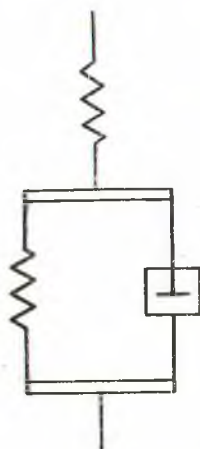
$$\omega^2 = \rho\lambda^2 \frac{1 + b\lambda}{a + \gamma\lambda}.$$

Переходя от изображения к оригиналу по формуле

$$u(z, t) = \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \bar{u}(s, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda,$$

где интегрирование производится по любой бесконечной прямой $\text{Re } \lambda = s$, лежащей в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа, от $u(t)$.

Выберем прямую интегрирования $\text{Re } \lambda = s$ так, чтобы все особые точки функции $\bar{v}(z, \lambda)$ лежали левее этой прямой. Таким образом, правее этой



Расчетная модель

прямой и на самой прямой, т. е. при $\operatorname{Re} \lambda \geq s$, функция $\bar{v}(z, \lambda)$ особых точек не имеет. В этих предположениях интеграл (8) вычисляется на основании леммы Жордана [5].

Получим решение задачи (2) — (4) в области оригинала, которое удовлетворяет как дифференциальному уравнению (1), так и граничным условиям [4]:

$$v(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \bar{v}(z, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda. \quad (8)$$

По основной теореме о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \bar{v}(z, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda = \sum \operatorname{Res} [\bar{v}(z, \lambda) e^{\lambda t}; \lambda_k], \quad (9)$$

где λ_k — все особые точки подынтегральной функции $\bar{v}(z, \lambda)$.

Для удобства разбиваем интеграл (8) на сумму интегралов и вычисляем каждый в отдельности.

Приняв во внимание (9), имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{4B \operatorname{sh} \omega z}{\lambda^2 T \operatorname{sh} \omega H} e^{\lambda t} d\lambda = \sum \operatorname{Res} \left[\frac{4B \operatorname{sh} \omega z}{\lambda^2 T \operatorname{sh} \omega H} e^{\lambda t}; \lambda_k \right]. \quad (10)$$

Функция $F(\lambda) = \frac{4B \operatorname{sh} \omega z}{\lambda^2 T \operatorname{sh} \omega H}$ имеет множество полюсов: полюс $\lambda = 0$ кратности два. Решая $\sin i\omega H = 0$, получим кубическое уравнение относительно λ

$$H^2 \rho b \lambda^3 + H^2 \rho \lambda^2 + \pi^2 \gamma k^2 \lambda + \pi^2 a k^2 = 0,$$

где

$$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

Из этого уравнения очевидно, что $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{3k}$ являются простыми полюсами. Вычеты относительно этих полюсов имеют вид

$$\operatorname{Res} [F(\lambda) e^{\lambda t}, 0] = \frac{4Btz}{TH}, \quad (11)$$

$$\operatorname{Res} [F(\lambda) e^{\lambda t}, \lambda_{1k}] = \frac{4B e^{\lambda_{1k} t} \sin i\omega_{1k} z}{T(2\lambda_{1k} \sin i\omega_{1k} H + \omega_{k1} \lambda_{1k}^2 i H \cos i\omega_{1k} H)}, \quad (12)$$

где

$$\omega_{1k} = \omega(\lambda_{1k}),$$

$$\omega' = \omega'(\lambda_{1k}) = \frac{2\gamma\rho\lambda_{1k}^2 + (\rho\gamma + 3ab)\lambda_{1k} + 2\rho a}{2(a + \gamma\lambda_{1k})^2} \sqrt{\rho \frac{1 + b\lambda_{1k}}{a + \gamma\lambda_{1k}}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{4B \operatorname{sh} \omega z}{\lambda^2 T \operatorname{sh} \omega H} e^{\lambda t} d\lambda = \frac{4Btz}{TH} + \\ & + \frac{4B}{T} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_{jk} t} \operatorname{sh} \omega_{jk} z}{2\lambda_{jk} \operatorname{sh} \omega_{jk} H - \omega_{jk} \lambda_{jk}^2 i H \operatorname{ch} \omega_{jk} H}. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично находим остальные три интеграла. В итоге будем иметь искомое решение:

$$\begin{aligned}
 v(z, t) = & \frac{4Btz}{TH} + \frac{4At(H-z)}{TH} - \frac{4Bt^2z}{T^2H} - \frac{4At^2(H-z)}{T^2H} + \\
 & + \frac{4B}{T} \left(1 - \frac{2}{T}\right) \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_{jk}t} \operatorname{sh} \omega_{jk}z}{2\lambda_{jk} \operatorname{sh} \omega_{jk}H - \omega_{jk}^2 \lambda_{jk}^2 iH \operatorname{ch} \omega_{jk}H} + \\
 & + \frac{4A}{T} \left(1 - \frac{2}{T}\right) \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_{jk}t} \operatorname{sh} \omega_{jk}(H-z)}{2\lambda_{jk} \operatorname{sh} \omega_{jk}H - \omega_{jk}^2 \lambda_{jk}^2 iH \operatorname{ch} \omega_{jk}H}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Для определения деформации из второго уравнения системы (2) ищем решения в области изображения по Лапласу:

$$\bar{u}(z, \lambda) = \frac{1}{\rho\lambda^2} \frac{d\bar{v}(z, \lambda)}{dz}. \tag{15}$$

Для этого, подставив (14) в (15) и применив обратное преобразование Лапласа, ищем решение для функции $u(z, t)$ в области оригинала по Лапласу:

$$\begin{aligned}
 u(z, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \left[\frac{4B}{\rho\lambda^4 T} \left(1 - \frac{2}{\lambda T}\right) \frac{\omega \operatorname{ch} \omega z}{\operatorname{sh} \omega H} - \right. \\
 & \left. - \frac{4A}{\rho\lambda^4 T} \left(1 - \frac{2}{\lambda T}\right) \frac{\omega \operatorname{ch} \omega(H-z)}{\operatorname{sh} \omega H} \right] e^{\lambda t} d\lambda.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Используя лемму Жордана и основную теорему теории вычетов, получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial z} = & \frac{4B}{\rho T} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{jk}^2 e^{\lambda_{jk}t} \operatorname{sh} \omega_{jk}z}{4\lambda_{jk}^3 \operatorname{sh} \omega_{jk}H - iH\omega_{jk}\lambda_{jk}^4 \operatorname{ch} \omega_{jk}H} - \\
 & - \frac{8B}{\rho T^2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{jk}^2 e^{\lambda_{jk}t} \operatorname{sh} \omega_{jk}z}{5\lambda_{jk}^4 \operatorname{sh} \omega_{jk}H - iH\omega_{jk}\lambda_{jk}^5 \operatorname{ch} \omega_{jk}H} + \\
 & + \frac{4A}{\rho T} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{jk}^2 e^{\lambda_{jk}t} \operatorname{sh} \omega_{jk}(H-z)}{4\lambda_{jk}^3 \operatorname{sh} \omega_{jk}H - iH\omega_{jk}\lambda_{jk}^4 \operatorname{ch} \omega_{jk}H} - \\
 & - \frac{8A}{\rho T^2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{jk}^2 e^{\lambda_{jk}t} \operatorname{sh} \omega_{jk}(H-z)}{5\lambda_{jk}^4 \operatorname{sh} \omega_{jk}H - iH\omega_{jk}\lambda_{jk}^5 \operatorname{ch} \omega_{jk}H}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Приведенные расчетные формулы (14) и (17) позволяют определять напряжение и деформацию дорожной одежды во времени, решать практические инженерные задачи.

Литература

1. Бабков В. Ф., Замахаев М. С. Автомобильные дороги, ч. 1. М., 1959.
2. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М., 1965.
3. Корсунский М. Б. Тр. СоюзДОРНИИ, в. 6. М., 1966.
4. Кривичский А. М. Конструирование и расчет нежестких дорожных одежд по местному предельному равновесию. М., 1963.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965.
6. Ладыгин Б. И., Ким А. Х., Шумчик К. Ф. ДАН БССР, № 2, 1969.
7. Хьюз Л., Оглеби К. Автомобильные дороги. М., 1958.
8. Яцевич И. К., Шумчик К. Ф. Сб. «Вопросы эксплуатации автомобильных дорог и мостов». М., 1970.

*Белорусский технологический институт
им. С. М. Кирова*

Поступило в редакцию 11.XII 1970