ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1972
СЕРЫЯ ФІЗІКА-ТЭХНІЧНЫХ НАВУК

УДК 625+531.01+539.555

И. И. ЛЕОНОВИЧ, С. С. МАКАРЕВИЧ

ЗАДАЧА БУССИНЕСКА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УПРУГО-ВЯЗКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Проезжая часть автомобильных дорог подвергается воздействию различных по величине и характеру внешних нагрузок. Конструкции дорожных одежд могут быть весьма разнообразны.

Для исследования работы дорожных одежд в различных условиях и их расчета приходится выбирать расчетные схемы. Одной из таких расчетных схем является упруго-вязкое полупространство.

Рассмотрим изотропное упруго-вязкое полупространство, т. е. тело бесконечно больших размеров, ограниченное с одной стороны плоскостью $z=0$. Пусть на эту плоскость действует осесимметричная нагрузка, направленная по оси z. При решении задачи будем пользоваться цилиндрической системой координат.

Статическая сторона задачи, как и в случае упругого полупространства, будет выражаться уравнениями Навье. Эти уравнения справедливы для любого тела лишь бы оно было сплошным [1].

Геометрическая сторона задачи тоже будет соответствовать упругому решению и будет выражаться уравнениями Коши. Эти уравнения тоже справедливы для любого непрерывного тела независимо от его физической природы [1].

Что касается физической стороны задачи, то она будет зависеть от закона деформирования рассматриваемого тела. Пусть данное упруго-вязкое полупространство подчиняется закону деформирования так называемого «типичного тела»:

$$nE\dot{\varepsilon}+H\varepsilon=n\dot{\sigma}+\sigma, \tag{1}$$

где E, H—мгновенный и длительный модули упругости, n — время релаксации.

Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Решая уравнение (1) относительно ε, получим

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+\frac{E-H}{E^2 n}\,e^{-\frac{Ht}{En}}\int\limits_0^t \sigma e^{\frac{Ht}{En}}dt. \tag{2}$$

Если принять коэффициент Пуассона μ не зависящим от времени и учесть, что для упруго-вязких тел соблюдается принцип суперпозиции Больцмана, то деформации по трем направлениям, согласно (2), можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right] + \frac{E-H}{E^2 n} e^{-\frac{Ht}{En}} \int_0^t \left[\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right] e^{\frac{Ht}{En}} dt,$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu(\sigma_z + \sigma_\theta)\right] + \frac{E-H}{E^2 n} e^{-\frac{Ht}{En}} \int_0^t \left[\sigma_r - \mu(\sigma_z + \sigma_\theta)\right] e^{\frac{Ht}{En}} dt, \qquad (3)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)\right] + \frac{E-H}{E^2 n} e^{-\frac{Ht}{En}} \int_0^t \left[\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)\right] e^{\frac{Ht}{En}} dt.$$

В случае сдвига зависимость (1) должна иметь вид

$$nG\dot{\gamma} + K\gamma = n\dot{\tau} + \tau, \qquad (4)$$

где G, K—мгновенный и длительный модули сдвига, n—время релаксации (с достаточной достоверностью можно принять одинаковым как при сжатии, так и при сдвиге). Относительный сдвиг γ из уравнения (4) будет равен

$$\gamma = \frac{\tau}{G} + \frac{G-K}{G^2 n} e^{-\frac{Kt}{Gn}} \int_0^t \tau e^{\frac{Kt}{Gn}} dt. \qquad (5)$$

Для изотропного тела справедливы зависимости

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \quad K = \frac{H}{2(1+\mu)}. \qquad (6)$$

Учитывая (5) и (6), относительный сдвиг в плоскости rz можно записать так:

$$\gamma_{rz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{rz} + \frac{2(1+\mu)(E-H)}{E^2 n} e^{-\frac{Ht}{En}} \int_0^t \tau_{rz} e^{\frac{Ht}{En}} dt. \qquad (7)$$

Таким образом, уравнения (3) и (7) описывают физическую сторону задачи.

Для решения задачи воспользуемся функцией напряжений $\varphi = \varphi(r, z)$. Напряжения в этом случае могут быть определены при помощи следующих выражений, удовлетворяющих уравнениям Навье:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right); \\
\sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right); \\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]; \\
\tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right],
\end{aligned} \qquad (8)$$

где

$$\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

В качестве функции напряжений примем функцию, аналогичную упругому решению [1, 2]

$$\varphi=C_1 z\ln r+C_2(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}+C_3 z\ln\left(\frac{\sqrt{r^2+z^2}-z}{\sqrt{r^2+z^2}+z}\right), \tag{9}$$

где C_1, C_2, C_3 — коэффициенты, зависящие от нагрузки и времени и определяемые из граничных и начальных условий.

Для определения перемещений u и w воспользуемся уравнениями Коши. Перемещение u по направлению оси r определится из зависимости $\varepsilon_\theta=\frac{u}{r}$, откуда $u=\varepsilon_\theta r$ или, учитывая (3),

$$u=\frac{r}{E}\left[\sigma_\theta-\mu(\sigma_z+\sigma_r)\right]+\frac{r(E-H)}{E^2 n}e^{-\frac{Ht}{En}}\int\limits_0^t\left[\sigma_\theta-\mu(\sigma_z+\sigma_r)\right]e^{\frac{Ht}{En}}dt.$$

Подставим в последнее выражение значения напряжений согласно (8). После преобразований получим

$$u=-\frac{1+\mu}{E}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial r}-(1+\mu)\frac{E-H}{E^2 n}e^{-\frac{Ht}{En}}\int\limits_0^t\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial r}e^{\frac{Ht}{En}}dt. \tag{10}$$

Вертикальное перемещение определится из соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu(\sigma_r+\sigma_\theta)\right]+$$
$$+\frac{E-H}{E^2 n}e^{-\frac{Ht}{En}}\int\limits_0^t\left[\sigma_z-\mu(\sigma_r+\sigma_\theta)\right]e^{\frac{Ht}{En}}dt.$$

Подставив значения напряжений, согласно (8), произведя интегрирование и учитывая, что $w_{r=\infty}=0$, найдем

$$\begin{aligned} w=&\frac{1+\mu}{E}\left[2(1-\mu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]+\\ &+\frac{(1+\mu)(E-H)}{E^2 n}e^{-\frac{Ht}{En}}\int\limits_0^t\left[2(1-\mu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]e^{\frac{Ht}{En}}dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Решим эту задачу для случаев, когда на полупространство действует сосредоточенная сила, постоянная во времени; сосредоточенная сила, меняющаяся во времени; сплошная равномерно распределенная по площади круга нагрузка, постоянная во времени и сплошная равномерно распределенная по площади круга нагрузка, меняющаяся во времени.

1. $P=\text{const}$.

Подставляя (9) в (8), найдем напряжения, которые в этом случае будут иметь те же значения, что и при упругом решении.

Если в уравнения (10) и (11) подставить функцию напряжений (9) и произвести необходимые преобразования, получим перемещения:

$$u=\frac{P\,(1+\mu)}{2\pi}\left[\frac{rz}{l^3}-(1-2\mu)\,\frac{r}{l^3+lz}\right]\left[\frac{1}{H}-\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{E}\right)e^{-\frac{Ht}{En}}\right];$$

$$w=\frac{P\,(1+\mu)}{2\pi}\left[\frac{2\,(1-\mu)}{l}+\frac{z^2}{l^3}\right]\left[\frac{1}{H}-\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{E}\right)e^{-\frac{Ht}{En}}\right], \qquad (12)$$

где $l=\sqrt{r^2+z^2}$.

2. $P=0{,}5P_0(1-\cos\omega t)$, где P_0 — наибольшее значение сосредоточенной силы. Такой зависимостью можно описать в первом приближении нагрузку на дорогу от колонны машины. При этом, если T—время повтроения наибольшей нагрузки, то $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Подставляя в (10) и (11) значение функции напряжений (9) и коэффициенты C_1, C_2, C_3, выраженные через силу P из граничных условий, найдем перемещения

$$u=\frac{P_0\,(1+\mu)}{4\pi E}\left[\frac{rz}{l^3}-(1-2\mu)\,\frac{r}{l^2+lz}\right]\times$$

$$\times\left[(1-\cos\omega t)+\frac{E-H}{H}\left(1-e^{-\frac{Ht}{En}}\right)+\frac{E-H}{H^2+E^2n^2\omega^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(He^{-\frac{Ht}{En}}-H\cos\omega t-E\omega n\sin\omega t\right)\right],$$

$$w=\frac{P_0\,(1+\mu)}{4\pi E}\left[\frac{2\,(1-\mu)}{l}+\frac{z^2}{l^3}\right]\times \qquad (13)$$

$$\times\left[(1-\cos\omega t)+\frac{E-H}{H}\left(1-e^{-\frac{Ht}{En}}\right)+\frac{E-H}{H^2+E^2n^2\omega^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(He^{-\frac{Ht}{En}}-H\cos\omega t-E\omega n\sin\omega t\right)\right].$$

Если в (12) и (13) подставить $z=0$, найдем горизонтальные и вертикальные перемещения точек на так называемой «дневной поверхности».

3. На полупространство действует сплошная постоянная во времени нагрузка q, равномерно распределенная по площади круга.

Имея решение для случая сосредоточенной силы, можно применить его при распределенной нагрузке, взяв интеграл по загруженной площади.

Если нагрузка распределена по площади круга радиуса R, то, производя в решении (13) преобразования, аналогичные упругому решению [2], получим наибольшую просадку в центре круга

$$w_{\max}=2\,(1-\mu^2)\,qR\left[\frac{1}{H}-\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{E}\right)e^{-\frac{Ht}{En}}\right]. \qquad (14)$$

4. Если сплошная нагрузка изменяется по синусоидальному закону

$$q = 0{,}5q_0(1 - \cos\omega t),$$

то наибольшая просадка на поверхности будет равна

$$w_{\max} = \frac{1-\mu^2}{E} q_0 R \left[(1-\cos\omega t) + \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}}\right) \frac{E-H}{H} + \right. \\ \left. + \frac{E-H}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} \left(H e^{-\frac{Ht}{En}} - H\cos\omega t - E\omega n \sin\omega t \right) \right]. \qquad (15)$$

Последнее выражение может применяться для определения просадок автомобильных дорог под действием потока машин.

Анализ формулы (15) показывает, что при непрерывном потоке автомобилей, кроме упругих деформаций, которые мгновенно появляются и исчезают, возникают вязкие деформации, которые при большой частоте ω не успевают восстанавливаться и накапливаются, достигая значительной величины. В результате суммарная деформация упругая и вязкая может превысить допускаемые просадки. Так как для восстановления вязкой деформации требуется определенное время, то для правильного расчета необходимо учитывать интенсивность движения транспорта, его непрерывность или, наоборот, отсутствие движения в определенные часы.

Упруго-вязкая аналогия. Задача Буссинеска для упруго-вязкого полупространства может быть решена методом упруго-вязкой аналогии [3]. Согласно этому методу, в решении, которое получено для упругого материала, зависимые переменные и граничные условия заменяются преобразованиями Лапласа—Карсона, а модули упругости — соответствующими модулями, зависящими от параметра преобразования p.

Решение задачи для упруго-вязкого материала находится обращением преобразований зависимых переменных, полученных при решении задачи для упругого материала.

Так, в случае действия на упругое полупространство сплошной нагрузки q, равномерно распределенной по площади круга, просадка на поверхности в центре круга определяется по формуле [2]:

$$w_{\max} = \frac{2(1-\mu^2)}{E} qR. \qquad (16)$$

Определим это перемещение для упруго-вязкого материала, когда нагрузка q изменяется во времени по синусоидальному закону $q = 0{,}5q_0 \times \times (1 - \cos\omega t)$.

Если материал подчиняется закону деформирования, описываемому уравнением (1), то, применяя преобразование Лапласа — Карсона, получим

$$nEp^2\varepsilon^*(p) + Hp\varepsilon^*(p) = np^2\sigma^*(p) + p\sigma^*(p). \qquad (17)$$

Таким образом мы перешли от уравнения (1), связывающего оригиналы σ и ε, к уравнению (17), связывающему их изображения $\sigma^*(p)$ и $\varepsilon^*(p)$. Уравнение (17) можно переписать так

$$\sigma^*(p) = \varepsilon^*(p) E^*(p),$$

где

$$E^*(p) = \frac{H + nEp}{1 + np}.$$

$E^*(p)$ является операторным выражением модуля продольной упругости.

Найдем преобразование нагрузки q по Лапласу — Карсону

$$q^*(p) = 0{,}5q_0\left(1 - \frac{p^2}{p^2+\omega^2}\right).$$

Подставим $E^*(p)$ и $q^*(p)$ в формулу (16) вместо E и q.

$$w^*_{max}(p) = (1-\mu^2)\,q_0R\left(1 - \frac{p^2}{p^2+\omega^2}\right)\frac{1+np}{H+nEp}.$$

Разложим выражение, стоящее в правой части, на элементарные дроби

$$w^*_{max}(p) = (1-\mu^2)\,q_0R\left\{\frac{1}{H} - \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{E}\right)\frac{p}{p+\frac{H}{En}} + \right.$$

$$+ \frac{H(E-H)}{E(H^2+E^2n^2\omega^2)}\,\frac{p}{p+\frac{H}{En}} - \frac{n\omega(E-H)}{H^2+E^2n^2\omega^2}\,\frac{p\omega}{p^2+\omega^2} - \tag{18}$$

$$\left. - \frac{1}{E}\left[1 + \frac{H(E-H)}{H^2+n^2\omega^2E^2}\right]\frac{p^2}{p^2+\omega^2}\right\}.$$

Производя обратное преобразование Лапласа — Карсона, получим перемещение для упруго-вязкого полупространства

$$w_{max} = (1-\mu^2)\,q_0R\left\{\frac{1}{H} - \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{E}\right)e^{-\frac{Ht}{En}} + \right.$$

$$+ \frac{E-H}{E(H^2+n^2\omega^2E^2)}\,He^{-\frac{Ht}{En}} - \frac{E-H}{H^2+n^2\omega^2E^2}\,n\omega\sin\omega t - \tag{19}$$

$$\left. - \frac{1}{E}\left[1 + \frac{H(E-H)}{H^2+n^2\omega^2E^2}\right]\cos\omega t\right\}.$$

Если прибавить и вычесть в фигурных скобках $\frac{1}{E}$ и вынести $\frac{1}{E}$ за скобки, то получим выражение, совершенно совпадающее с выражением (15).

Литература

1. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., 1968.
2. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. М., 1957.
3. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. (Перевод с английского). М., 1965.

Белорусский технологический институт им. С. М. Кирова

Поступило в редакцию 6.IV 1971