

И. И. ЛЕОНОВИЧ, С. С. МАКАРЕВИЧ

ДЕФОРМАЦИИ ОДНОРОДНОГО УПРУГО-ВЯЗКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе [1] были получены формулы для определения просадок однородного упруго-вязкого полупространства, подчиняющегося закону деформирования так называемого «типичного тела», при нагружении его равномерно распределенной по площади круга сплошной нагрузкой q_1 , остающейся постоянной во времени, и пульсирующей нагрузкой, изменяющейся по синусоидальному закону

$$q = 0,5q_0(1 - \cos \omega t). \quad (1)$$

В случае постоянной нагрузки наибольшая просадка на поверхности полупространства равна

$$\omega = 2(1 - \mu^2) q_1 R \left[\frac{1}{H} - \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right) e^{-\frac{Ht}{En}} \right]. \quad (2)$$

При пульсирующей нагрузке, описываемой уравнением (1), просадка в центре круга на поверхности полупространства определяется формулой

$$\omega_1 = \frac{1 - \mu^2}{E} q_0 R \left[(1 - \cos \omega t) + \frac{E - H}{H} \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}} \right) + \frac{E - H}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} \left(H e^{-\frac{Ht}{En}} - H \cos \omega t - En \omega \sin \omega t \right) \right]. \quad (3)$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в работе [1]. Выражение (3) позволяет определить накопление деформаций во времени, если нагружение пульсирующей равномерно распределенной по площади круга нагрузкой начинается с нуля, так как при $t=0$, согласно (1), $q=0$.

Если же нагружение начинается с максимального значения, т. е. $q = q_0$ при $t = 0$, то закон изменения нагрузки описывается уравнением

$$q = 0,5q_0(1 + \cos \omega t), \quad (4)$$

и максимальная просадка на поверхности полупространства определится формулой

$$\omega_2 = \frac{1 - \mu^2}{E} q_0 R \left[(1 + \cos \omega t) + \frac{E - H}{H} \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}} \right) - \frac{E - H}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} \left(H e^{-\frac{Ht}{En}} - H \cos \omega t - En \omega \sin \omega t \right) \right]. \quad (5)$$

Для анализа деформаций упруго-вязкого однородного полупространства под действием пульсирующей нагрузки перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_1 = & (1 - \mu^2) q_0 R \left[\frac{1}{E} + \frac{E - H}{EH} \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}} \right) + \frac{E - H}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} \times \right. \\ & \left. \times \frac{H}{E} e^{-\frac{Ht}{En}} \right] + (1 - \mu^2) q_0 R \frac{H + En^2 \omega^2}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} \cos \omega t - \\ & - (1 - \mu^2) q_0 R \frac{(E - H) n \omega}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2) q_0 R \frac{H + En^2 \omega^2}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} &= \omega_0 \cos \varphi = A, \\ (1 - \mu^2) q_0 R \frac{(E - H) n \omega}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} &= -\omega_0 \sin \varphi = B. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (7) уравнение (6) перепишется так:

$$\begin{aligned} \omega_1 = & (1 - \mu^2) q_0 R \left[\frac{1}{E} + \frac{E - H}{EH} \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{E - H}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} \cdot \frac{H}{E} e^{-\frac{Ht}{En}} \right] - \omega_0 \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из уравнения (8), величина φ представляет собой угол сдвига фазы колебаний деформаций относительно колебаний нагрузки.

Согласно выражениям (7),

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{(E - H) n \omega}{H + En^2 \omega^2}. \quad (9)$$

Анализ выражения (9) показывает, что при $n\omega$, равном нулю, угол сдвига фазы равен нулю; при $n\omega$, стремящемся к бесконечности, φ тоже стремится к нулю. Когда $n\omega = \sqrt{H/E}$, угол сдвига фазы будет иметь наибольшее по абсолютной величине значение, или с учетом знака

$$\min \operatorname{tg} \varphi = \frac{H - E}{2 \sqrt{EH}}. \quad (10)$$

На рис. 1 показано изменение $\operatorname{tg} \varphi$ в зависимости от $n\omega$.

Из рисунка видно, что угол сдвига фазы всегда имеет отрицательное значение. Это говорит о том, что деформации запаздывают по отношению к изменению нагрузки. Причем при $0 < n\omega < \sqrt{H/E}$ угол сдвига фазы нарастает интенсивно, а при $n\omega > \sqrt{H/E}$ — медленно уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю.

Найдем амплитуду колебаний деформаций ω_0 . Решая совместно уравнения (7), получим

$$\omega_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = (1 - \mu^2) q_0 R \sqrt{\frac{1 + n^2 \omega^2}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2}}. \quad (11)$$

Как видно из (11), при частоте повторения нагрузки ω , равной нулю, амплитуда колебаний деформаций имеет наибольшее значение, равное

$$\max \omega_0 = \frac{(1 - \mu^2) q_0 R}{H} \quad (12)$$

С увеличением частоты амплитуда ω_0 уменьшается и асимптотически стремится к пределу

$$\min \omega_0 = \frac{(1 - \mu^2) q_0 R}{E} \quad (13)$$

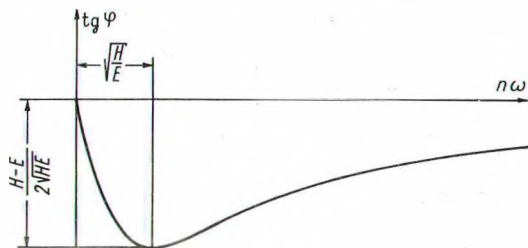


Рис. 1. Изменение угла сдвига фазы колебаний деформации относительно колебаний нагрузки в зависимости от времени релаксации и частоты изменения нагрузки

Аналогично будет зависеть амплитуда колебаний деформаций ω_0 от времени релаксации n .

Амплитуда колебаний деформаций зависит также от отношения модулей H/E . На рис. 2 показана зависимость отношения амплитуды к ее минимальному значению

$$\eta = \frac{\omega_0}{\min \omega_0} = \sqrt{\frac{E^2 (1 + n^2 \omega^2)}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2}}$$

от частоты повторения нагрузки, умноженной на время релаксации, и от отношения H/E .

Из рис. 2 видно, что наиболее сильно отличается амплитуда колебаний деформаций от ее минимального значения при малых частотах повторения нагрузки, при малом времени релаксации и при малых значениях длительного модуля упругости. Но при $H/E \geq 0,5$ и $\omega n \geq 6H/E$ амплитуда колебаний деформаций ω_0 отличается от ее минимального значения не более, чем на 4%.

В случае, когда нагружение начинается с максимального значения нагрузки, делая преобразования, аналогичные (6), (7), перемещение можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega_2 = (1 - \mu^2) q_0 R \left[\frac{1}{E} + \frac{E - H}{EH} \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{E - H}{H^2 + E^2 n^2 \omega^2} \cdot \frac{H}{E} e^{-\frac{Ht}{En}} \right] + \omega_0 \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

Из уравнений (5) и (14) видно, что в данном случае угол сдвига фазы колебаний деформаций относительно колебаний нагрузки и амплитуды колебаний деформаций будут теми же, что и при нагружении с нуля.

Первая часть уравнений (8) и (14) представляет собой среднюю деформацию

$$\omega_{m1} = (1 - \mu^2) q_0 R \left[\frac{1}{E} + \frac{E - H}{EH} \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{E-H}{H^2+E^2n^2\omega^2} \cdot \frac{H}{E} e^{-\frac{Ht}{En}}, \\
 \omega_{m2} = (1-\mu^2)q_0R & \left[\frac{1}{E} + \frac{E-H}{EH} \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{E-H}{H^2+E^2n^2\omega^2} \cdot \frac{H}{E} e^{-\frac{Ht}{En}} \right],
 \end{aligned} \tag{15}$$

где ω_{m1} — средняя деформация при нагружении с нуля; ω_{m2} — средняя деформация при нагружении с максимального значения нагрузки.

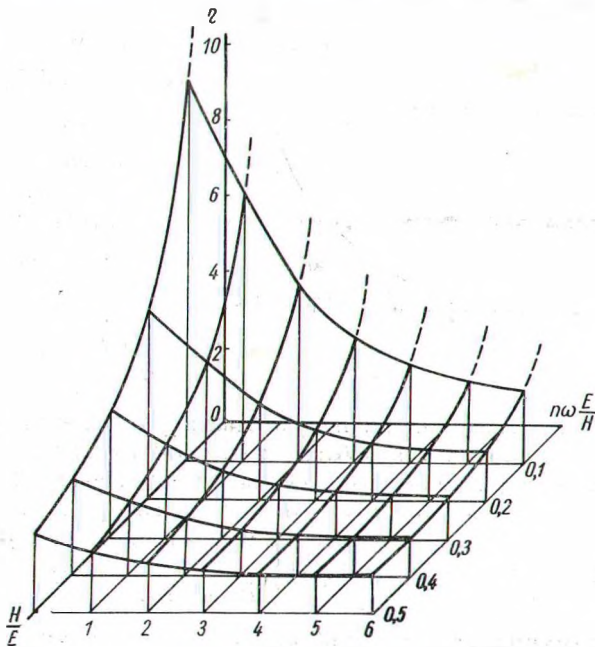


Рис. 2. Зависимость отношения амплитуды к ее минимальному значению от времени релаксации, частоты изменения нагрузки и отношения длительного и мгновенного модулей

Средняя деформация зависит от характера начала нагружения. Разница между средними деформациями при нагружении с нуля и с максимального значения составляет

$$\Delta\omega_m = \omega_{m1} - \omega_{m2} = 2(1-\mu^2)q_0R \frac{E-H}{H^2+E^2n^2\omega^2} \cdot \frac{H}{E} e^{-\frac{Ht}{En}}. \tag{16}$$

Эта разница наибольшая в начальный момент времени при $t=0$. С течением времени она уменьшается, и при $t \rightarrow \infty$ разница между средними деформациями стремится к нулю ($\Delta\omega_m \rightarrow 0$). Следовательно, при достаточно большом времени действия нагрузки деформация упруго-вязкого полупространства не зависит от характера начала нагружения пульсирующими силами. Разница средних деформаций $\Delta\omega_m$ зависит еще от частоты повторения нагрузки ω , от времени релаксации n и отношения H/E . Наибольшее значение $\Delta\omega_m$ принимает при $n\omega = 0$ и $H/E = 0$. С увеличением $n\omega$ и H/E

разница Δw_m резко уменьшается. При $H/E \geq 0,5$ и $n\omega \geq 8H/E$ эта разница не превышает 4% от мгновенной средней деформации.

Характер изменения Δw_m в зависимости от $n\omega$ и H/E аналогичен характеру изменения η (см. рис. 2).

Таким образом, проведенный анализ деформаций однородного упруго-вязкого полупространства при пульсирующем нагружении показывает, что для большинства практических задач, т. е. когда $H/E > 0,5$ и $n\omega > 8H/E$,

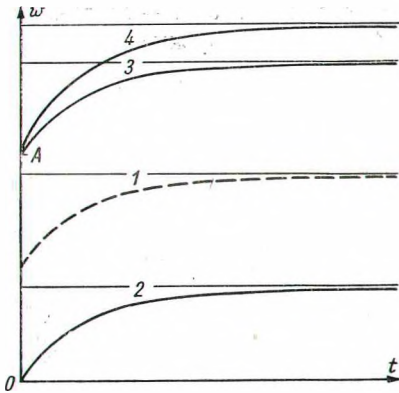


Рис. 3. Нарастание деформаций во времени при постоянной и пульсирующей нагрузках: 1 — изменение средней деформации при пульсирующей нагрузке; $w = \frac{(1-\mu^2) q_0 R}{E}$ при $t = 0$; $w = \frac{(1-\mu^2) q_0 R}{H}$ при $t \rightarrow \infty$; 2 — кривая, соединяющая нижние точки амплитуд колебаний деформаций; $w = (1-\mu^2) q_0 R \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right)$ при $t \rightarrow \infty$; 3 — кривая, соединяющая высшие точки амплитуд колебаний деформаций; $w = \frac{2(1-\mu^2) q_0 R}{E}$ при $t = 0$; $w = (1-\mu^2) q_0 R \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right)$ при $t \rightarrow \infty$; 4 — изменение деформаций при постоянной нагрузке; $w = \frac{2(1-\mu^2) q_0 R}{E}$ при $t = 0$; $w = \frac{2(1-\mu^2) q_0 R}{H}$ при $t \rightarrow \infty$

при определении просадок можно не учитывать угол сдвига фазы колебаний деформаций относительно колебаний нагрузки; амплитуду колебаний деформаций можно считать равной ее наименьшему значению (13), а среднюю деформацию — не зависящей от характера начала нагружения и равной

$$w_m = w_{m1} = w_{m2} = (1-\mu^2) q_0 R \left[\frac{1}{E} + \frac{E-H}{EH} \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}} \right) \right]. \quad (17)$$

Тогда деформация при пульсирующем нагружении с достаточной точностью может быть определена по следующей упрощенной формуле:

$$w = \frac{1-\mu^2}{E} q_0 R \left[(1 + \cos \omega t) + \frac{E-H}{H} \left(1 - e^{-\frac{Ht}{En}} \right) \right]. \quad (18)$$

На рис. 3 показано нарастание деформаций во времени при постоянной и пульсирующей нагрузках, согласно формулам (2) и (18). Из рисунка видно, что при одной и той же интенсивности нагрузки $q_1 = q_2$ нарастание деформаций во времени при постоянной нагрузке больше, чем при пульсирующей, в то время как мгновенные наибольшие деформации совпадают (точка A).

Разница в накоплении деформаций при $t \rightarrow \infty$ составляет

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{2(1-\mu^2)}{H} q_0 R - (1-\mu^2) q_0 R \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right) = \\ &= (1-\mu^2) q_0 R \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Так как для любых реальных тел $H < E$, то Δw будет всегда положительным, т. е. нарастание деформации при постоянной нагрузке всегда будет больше, чем при пульсирующей. Только для идеально упругих тел ($H = E$) наибольшие деформации будут оставаться постоянными во времени и одинаковыми как при постоянной, так и при пульсирующей нагрузках, если не учитывать явления усталости. Как было показано в работе [1], пульсирующей нагрузкой можно представить нагрузку на автомобильные дороги от непрерывного потока машин, если интенсивность движения, а следовательно, и частота повторения нагрузки довольно большие. Поэтому применительно к расчету дорог для определения просадок вполне может быть использована упрощенная формула (18).

При малой интенсивности движения нагрузка на дорогу не будет соответствовать закону (1), так как время действия нагрузки будет значительно меньше времени между повторениями нагрузки. Но расчет дорожных одежд должен проводиться при наиболее опасном нагружении, т. е. при наибольшей возможной интенсивности движения. Учитывая при этом, что деформации в любой точке полупространства возникают не только при непосредственном нагружении в этой точке, но и когда нагрузка находится на некотором расстоянии от нее, при непрерывном потоке автомашин можно считать достаточно точной аппроксимацию нагрузки на дорогу в виде синусоидального пульсирующего закона (1).

Литература

1. Леонович И. И., Макаревич С. С. Вестн. АН БССР, сер. физ.-техн. наук, № 1, 1972.

Белорусский технологический институт
им. С. М. Кирова

Поступило в редакцию
15.IV 1972