

А. Х. Ким, И. И. Леонович

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АСФАЛЬТОБЕТОННОГО ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ

Напряженное состояние и деформация асфальтобетонного слоя автомобильной дороги зависят не только от давления колеса на грунт, но и от числа циклов нагружения, характера движения машин (равномерное движение, торможение, трогание с места и т. д.).

Характерной особенностью теоретического исследования напряженно-деформированного состояния асфальтобетонного слоя является то, что внешняя нагрузка перемещается по поверхности асфальта, следовательно, напряжение и деформация в каждой точке будут функциями не только координат, но и времени  $t$ .

Естественно предполагать, что напряжения в любой точке должны быть максимальными в тот момент, когда колесо проходит над этой точкой. При удалении колеса от этой точки напряжения должны убывать до нуля.

Реологические свойства асфальта исследовались многими авторами. Были предложены различные модели для описания реологических свойств асфальтобетона.

Механические свойства асфальта в значительной степени зависят от температурных условий, и описание их одной моделью, применимой как при низких, так и при высоких температурах, представляется нецелесообразным.

В летний период для асфальта характерны явления ретардации деформаций, являющиеся следствием как притока солнечной энергии, так и диссипативных процессов при циклических нагрузках.

Допустим, что колесо катится по поверхности асфальта с некоторой скоростью  $v$ , являющейся функцией от времени

$$v = f(t).$$

При равномерном движении

$$v = a(\text{const}).$$

При торможении и трогании с места можно предположить, что скорость будет линейной функцией от  $t$ .

Будем полагать, что давление колеса на грунт  $P_{yy}$  и касательное усилие на поверхности контакта колеса с асфальтом (рис. 1), являющиеся некоторыми функциями от  $x$ , заданы и

разложены в конечный или бесконечный ряд по одним и тем же функциям вида

$$\left. \begin{aligned} P_{yy} &= \sum_{k=0}^n \alpha_k e^{\beta_k x} \\ P_{xy} &= \sum_{k=0}^n \gamma_k e^{\beta_k x} \end{aligned} \right\} - a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Коэффициенты  $\beta_k$ ,  $\alpha_k$  и  $\gamma_k$  могут быть положительными и отрицательными, знаки их и числовые значения выбираются так, чтобы получить достаточно хорошее приближение действительных распределений  $P_{yy}$  и  $P_{xy}$  по поверхности контакта колеса с асфальтом. Для простоты будем считать, что напряженно-деформированное состояние является плоским, т. е. во всех сечениях, параллельных плоскости  $xoy$ , напряжения и деформации расположены одинаково.

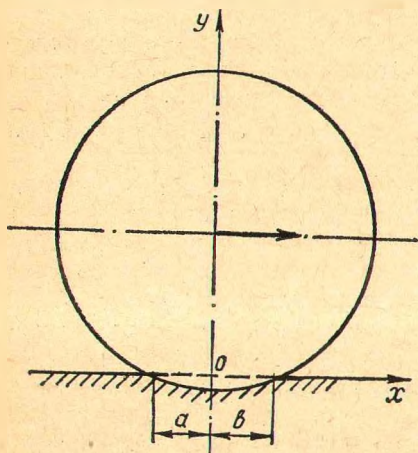


Рис. 1.

Если пренебречь силами инерции, то получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

В качестве третьего уравнения используем зависимость между нормальными напряжениями в двух взаимно перпендикулярных направлениях:

$$P_{xx} = \frac{1}{\lambda} P_{yy}. \quad (4)$$

Если боковое давление  $P_{xx}$  вызывается вертикальным  $P_{yy}$ , то  $\lambda > 1$ .

Многочисленные опыты с различными материалами (торф, глина, мучное тесто и др.) показывают, что с достаточной точностью коэффициент  $\lambda$  можно считать постоянным.

Перепишем уравнение (2) с учетом (4), а затем из полученного уравнения и уравнения (3) исключим  $P_{xy}$ . Тогда получим

$$\frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} = 0.$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$P_{yy} = \sum_{k=0}^n e^{\beta_k [x - \Phi(t)]} [C_k \operatorname{sh} \varepsilon_k y + D_k \operatorname{ch} \varepsilon_k y], \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{\beta_k}{\sqrt{\lambda}};$$
$$\Phi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

По физическому смыслу очевидно, что  $\Phi(t)$  должна быть монотонно возрастающей функцией.

При  $y = h$  (толщина слоя асфальта) и  $-a \leq x - \Phi(t) \leq b$  согласно (1)

$$P_{yy} = \sum_{k=0}^n \alpha_k e^{\beta_k z^2},$$

где  $z = x - \Phi(t)$ .

Здесь  $z$  является координатой точки на контактной поверхности относительно центра, где  $x - \Phi(t) = 0$ .

Отсюда получаем одно из уравнений для определения коэффициентов  $C_k$  и  $D_k$ :

$$C_k \operatorname{sh} \varepsilon_k h + D_k \operatorname{ch} \varepsilon_k h = \alpha_k. \quad (6)$$

Дифференцируя (5) по  $y$  и подставляя полученное выражение в (3), находим  $P_{xy}$

$$P_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^n e^{\beta_k [x - \Phi(t)]} [C_k \operatorname{ch} \varepsilon_k y + D_k \operatorname{sh} \varepsilon_k y] + E. \quad (7)$$

Здесь  $E$  положим равной 0 и, используя условие (1), получаем второе уравнение для определения  $C_k$  и  $D_k$

$$C_k \operatorname{ch} \varepsilon_k h + D_k \operatorname{sh} \varepsilon_k h = -\sqrt{\lambda} \gamma_k. \quad (8)$$

Система уравнений (6) и (8) всегда имеет решение, так как детерминант этой системы отличен от нуля:

$$\Delta = \operatorname{sh}^2 \varepsilon_k h - \operatorname{ch}^2 \varepsilon_k h = -1 \neq 0.$$

Если рассматривается процесс торможения, то, применяя кулоновский закон трения, можно считать, что  $\gamma_k = \mu \alpha_k$ , где  $\mu$  — коэффициент трения между колесом и асфальтом.

Формулы (5) и (7) после определения коэффициентов  $C_k$  и  $D_k$  позволяют получить картину распределения напряжений в асфальтовом слое при заданной нагрузке на его поверхности.

Если мы получим картину распределения напряжения в какой-нибудь фиксированный момент времени  $t'$ , то такая же картина будет в другой момент времени  $t''$ , но в другом месте, так как за время от  $t'$  до  $t''$  колесо перемещается в другое положение. Таким образом, картина распределения напряжений, не изменяя геометрической формы, перемещается вместе с колесом.



Согласно (1), аналитическое продолжение зависимостей (5) и (7) при  $y = h$  за пределы  $x < -a$  и  $x > b$  не имеет физического смысла. При  $y < h$  физически области действительных значений  $P_{yy}$  и  $P_{xy}$  могут быть расширены, однако границами этих областей следует считать первые точки, где  $P_{yy}$  и  $P_{xy}$  равны нулю. За пределами этих точек знаки напряжений  $P_{yy}$  и  $P_{xy}$  могут меняться на противоположные, а по модулю эти напряжения в силу особенностей экспоненциальных функций могут увеличиваться до бесконечности, что противоречит физике явлений.

Из (5) и (7) также видно, что поле распределения напряжений нестационарное. Оно перемещается вместе с колесом. Скорость изменения напряжений в данной точке (т. е. фиксированном  $x$ ) равна:

$$\frac{\partial P_{yy}}{\partial t} = -v(t) \sum_{k=0}^n \beta_k \exp \{ \beta_k [x - \Phi(t)] \} W_k(y);$$

$$-\frac{\partial P_{xy}}{\partial t} = v(t) \sum_{k=0}^n \beta_k \exp \beta_k [x - \Phi(t)] Z_k(y),$$

где

$$W_k(y) = C_k \operatorname{sh} \varepsilon_k y + D_k \operatorname{ch} \varepsilon_k y;$$

$$Z_k(y) = C_k \operatorname{ch} \varepsilon_k y + D_k \operatorname{sh} \varepsilon_k y.$$

Для определения деформаций допустим, что реологические свойства асфальта описываются уравнением Кельвина

$$\tau = GD + \eta D, \quad (9)$$

где  $G$  — модуль упругости,  $\eta$  — вязкость.

Известно, что модель тела Кельвина учитывает процессы ретардации деформации в системе как в период нагружения, так и после снятия нагрузки.

Ретардационные явления при циклических нагрузках вместе с тепловыми процессами, вызванными климатическими условиями и диссипацией энергии, играют решающую роль при определении сдвигоустойчивости асфальтового слоя.

Вследствие этого применение уравнения (9) для исследования деформационных процессов в асфальте является целесообразным.

Решаем совместно уравнения (7) и (9) при условии, что горизонтальное перемещение  $U(x, y, t)$  при  $y = 0$  тождественно равно нулю:

$$U(x, y, t) = \exp(-vt) \left\{ \int_0^y \varphi(x, y) dy - \frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\beta_k} W_k(y) \exp(\beta_k x) \times \right. \\ \left. \times \int_0^t \exp[v\tau - \beta_k \Phi(\tau)] d\tau \right\}, \quad (10)$$

где  $\varphi(x, y)$  — функция первоначального распределения (при  $t = 0$ ) деформации  $\frac{\partial U}{\partial y}$ .

Второй член в квадратных скобках выражает собой перемещение, вызываемое действием нагрузки. Продолжительность действия нагрузки  $t_0$  можно определить из уравнения

$$\Phi(t_0) = a + b,$$

где  $a + b$  — ширина поверхности контакта колеса с асфальтом (рис. 1). При  $t > t_0$  действие нагрузки прекращается, поэтому

$$\int_0^t \exp[\nu\tau - \beta_k \Phi(\tau)] d\tau = \int_0^{t_0} \exp[\nu\tau - \beta_k \Phi(\tau)] d\tau = \text{const}$$

и выражение в квадратных скобках в (10) не зависит от  $t$ . А наличие множителя  $\exp(-\nu t)$  определяет процесс ретардации после снятия нагрузки. Из (10) следует, что деформация полностью исчезает при  $t \rightarrow \infty$ . Практически при некотором значении  $t_1$  можно считать процесс ретардации завершившимся.

Если нагрузка прикладывается периодически с периодом  $T < t_1$ , то деформация накапливается, так как после каждого цикла нагрузки начальная функция  $\varphi(x, y)$  для следующего цикла будет больше по сравнению с предыдущей.

Рассмотрим более подробно случай движения заторможенного колеса. В этом случае можно предположить, что во всех точках контактной поверхности

$$P_{xy} = -\mu P_{yy}.$$

Здесь взят знак ( $-$ ), так как  $P_{yy} < 0$  (сжимающее напряжение), а  $P_{xy} > 0$  (колесо движется по направлению оси  $Ox$ ).

Допустим, что в формулах (1) точка  $x = 0$  совпадает с точками максимума  $P_{xy}$  (или минимума  $P_{yy}$ ). Тогда перемещение в данный момент  $t$  в точке  $x = 0$  и  $y = h$  будет

$$U_0(t) = \exp(-\nu t) \left\{ \int_0^h \varphi(0, y) dy - \frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^n \frac{W_k(h)}{\beta_k} \times \int_0^t \exp[\nu\tau - \beta_k \Phi(\tau)] d\tau \right\}.$$

Согласно (6),

$$W_k(h) = \alpha_k$$

и

$$U_0(t) = \exp(-\nu t) \left\{ \int_0^h \varphi(0, y) dy - \frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\beta_k} \int_0^t \exp[\nu\tau - \beta_k \Phi(\tau)] d\tau \right\}.$$

При торможении функция  $\Phi(t)$  может быть представлена в виде

$$\Phi(t) = v_0 t - \frac{a_0 t^2}{2},$$

где  $v_0$  — скорость в начале тормозного пути,  $a_0$  — ускорение.  
В этом случае

$$t_0 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2a_0 S}}{a_0},$$

где  $S = a + b$ .

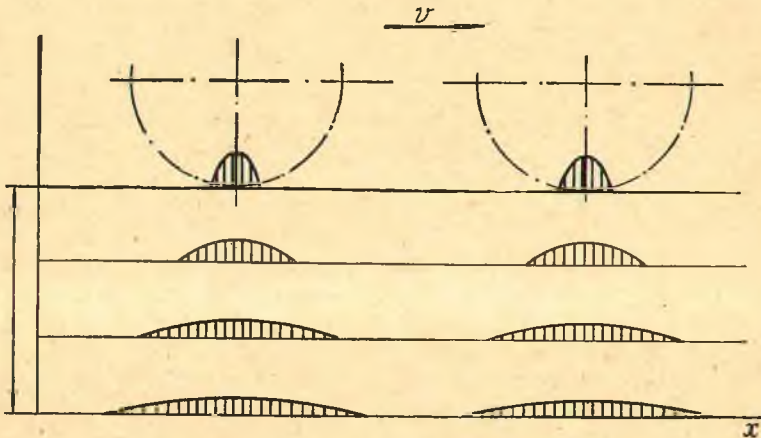


Рис. 2.

Максимальное перемещение в заданной точке в момент  $t = t_0$  будет

$$U_{0\max} = \exp(-vt_0) \left\{ \int_0^h \varphi(0, y) dy - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\beta_k} \exp \left[ -\frac{\beta_k a_0}{2} \left( \frac{v_0 - \frac{v}{\beta_k}}{a_0} \right)^2 \right] J_k \right\},$$

где значение  $J_k$  вычисляется по разным формулам в зависимости от знака  $\beta_k$ .

При  $\beta_k < 0$

$$J_k = \sqrt{\frac{2\pi}{a_0 |\beta_k|}} (\operatorname{erf} z_2 - \operatorname{erf} z_1) \frac{1}{2}.$$

При  $\beta_k > 0$

$$J_k = \sqrt{\frac{2}{\beta_k a_0}} \int_{z_1}^{z_2} e^{z^2} dz. \quad (11)$$

В обоих случаях

$$z_1 = -\sqrt{\frac{|\beta_k| a_0}{2}} \left( \frac{v_0 \beta_k - v_0}{a_0 \beta_k} \right);$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{|\beta_k| a_0}{2}} \left[ t_0 - \left( \frac{v_0 \beta_k - v}{a_0 \beta_k} \right) \right];$$

$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz$  — функция ошибок Гаусса.

До момента  $t = t_0$  перемещение  $U_0(t)$  возрастает и достигает максимума при  $t = t_0$ .

При  $t > t_0$  происходит ретардация деформации по уравнению

$$U_0(t) = U_{\max} \exp(-vt)$$

Горизонтальные перемещения частиц вызовут вертикальные перемещения, следствием чего обычно является образование бугров на поверхности асфальтобетона.

Вертикальное смещение может быть найдено из уравнения неразрывности деформации

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Отсюда

$$v(x, y, t) = - \int_0^y \frac{\partial U}{\partial x} dy$$

или

$$v(x, y, t) = \frac{1}{\eta} \exp(-vt) \sum_{k=0}^n \frac{1}{\varepsilon_k} [z_k(y) - z_k(0)] \exp(\beta_k x) \times$$

$$\times \int_0^t \exp[v\tau - \beta_k \Phi(\tau)] d\tau.$$

Полученное решение позволяет получить распределение напряжений и деформаций в асфальтобетонном слое при движении машин.

Точность решения во многом зависит от точности представления заданной нагрузки в виде (1).

На рис. 2 показано примерное распределение напряжений и деформаций.