одна за другой двух точек за границы предела предупреждения необходимо изменение (настройка) процесса. При выходе более чем двух точек за предел предупреждения или одной точки за нижний предел корректировки процесс необходимо остановить и прежде чем продолжать производство работ внести необходимые коррективы.

Корректировка процесса при уплотнении заключается в регулировании числа проходов катка, толщины уплотняемого слоя, влажности грунта, удельного давления катка и т.д.

И.И.Леонович, В.В. Штабинский

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА УПЛОТНЕНИЯ ЗЕМЛЯНОГО ПОЛОТНА

Контроль качества уплотнения проверяет соответствие объемной массы скелета грунта $\delta_{ск}$ величине, заложенной в проекте. Для этого из каждого слоя земляного полотна отбирается определенное число проб, так называемая выборка. По результатам изучения плотности выборки судят об уплотнении всего слоя (генеральной совокупности). Определяя плотность в разных местах, мы получим n различных значений. Результат каждого отдельного испытания является случайной величиной и характеризует плотность только данного образца. Совокупность случайных чисел, полученная в результате большого числа испытаний, позволяет более полно судить о плотности земляного полотна, так как по совокупности результатов можно установить зависимость между значением случайной величины и частотой, с которой эта величина встречается (закон распределения величины). Расчеты, базирующиеся на использовании законов распределения показателей свойств грунтов, намного надежнее, чем основанные на учете только средних значений показателей.

Распределение случайной величины можно охарактеризовать, используя следующие показатели: среднее значение величины $\bar{X}$ и среднее квадратическое отклонение, или стандарт, S. Стандартное отклонение S характеризует качество выполненных работ: чем меньше его значение, тем более качественным является способ выполнения работ, и наоборот. Разброс значений характеризуют иногда и коэффициентом вариации V, который может быть выражен либо в долях единицы, либо в процентах.

Статистическая обработка результатов контрольных испытаний сводится к определению среднего значения, оценке разброса и надежности полученных показателей по каждому слою или по земляному полотну в целом.

Для случая малого числа испытаний (менее 30) вычисление среднего значения искомой величины $\bar{X}$, стандартного отклонения S и коэффициента вариации V не представляет трудности (смотри формулы в табл.I).

При большом числе испытаний использование формул-трудоемкий процесс и обработку результатов испытаний целесообразно начинать с группировки исходных данных, состоящей в том, ч весь диапазон изменения искомой величины X разбивается на K интервалов.

После установления числа интервалов K (от 5 до 20, в зависимости от размера выборки) вычисляется величина интервала данной выборки по формуле

$$\Delta X = \frac{X_{max} - X_{min}}{K}, \qquad (I)$$

где X_{max} и X_{min} – наибольшая и наименьшая величины характеристики X.

Затем все частные значения X_i разносятся по соответствующим интервалам и определяется частота, с которой встречаются значения, соответствующие каждому интервалу. Примерный ряд эмпирического распределения коэффициента уплотнения представлен в табл.I. Данные таблицы получены при контроле уплотнения участка земляного полотна на строительстве а/д Любань-Буда.

Распределение изучаемой случайной величины можно изобразить в виде гистограммы, по оси абсцисс которой откладывают границы интервалов значений величины, а по оси ординат – частоты, соответствующие данным интервалам (см.рис.).

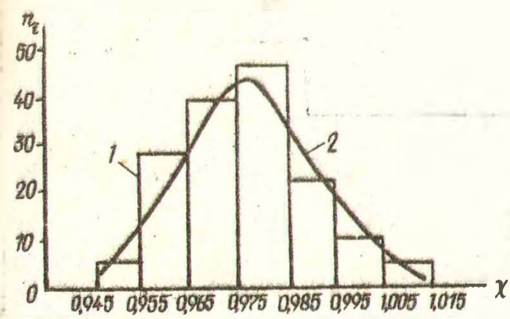

Рис.Распределение величины коэффициента уплотнения в земляном полотне:

I – гистограмма эмпирического распределения; 2 – теоретическая кривая нормального распределения.

Таблица I

№ интервала	Границы интервала	Подсчет частот n_i	Середина интервала x_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	Z_i	Z_{i+1}	$\Phi(Z_{i+1})$	$\Phi(Z_i)$	$\Phi(Z_{i+1})-\Phi(Z_i)$	n_i^T
I	0,945–0,955	5	0,950	4,75	4,5I25	–2,29	–I,57	–0,44I8	–0,4890	0,0472	7,36
2	0,955–0,965	28	0,960	26,88	25,8048	–I,57	–0,86	–0,305I	–0,44I8	0,I367	2I,32
3	0,965–0,975	39	0,970	37,83	36,695I	–0,I4	–0,04	–0,0557	–0,305I	0,2494	38,9I
4	0,975–0,985	47	0,980	46,06	45,I388	–0,I4	0,57	0,2I57	–0,0557	0,27I4	42,34
5	0,985–0,995	22	0,990	2I,78	2I,5622	0,57	I,29	0,40I5	0,2I57	0,I858	28,98
6	0,995–I,005	I0	I,000	I0,00	I0,0000	I,29	2,00	0,4772	0,40I5	0,0757	II,8I
7	I,005–I,0I5	5	I,0I0	5,05	5,I005	2,00	2,7I	0,4966	0,4772	0,0I94	3,03
		$\sum_{i=1}^{K} n_i =$ =I56		$\sum_{i=1}^{K} n_i x_i =$ =I52,35	$\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 =$ =I48,8I39					$\sum_{i=1}^{K}$ =0,9856	$\sum_{i=1}^{K} n_i^T =$ =I53,75

Малая выборка ($N < 30$)

1. $\bar{X} = \frac{I}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$;
2. $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2\right)}$;
3. $V = \frac{S}{\bar{X}}$.

где x_i – величина измеренного показателя;

n – общее число измерений

Большая выборка ($N > 30$)

I. $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{K} n_i x_i}{N} = \frac{I52,35}{I56} = 0,977,$

где $N = \sum_{i=1}^{K} n_i$ (n_i – число измерений в i-том интервале)

2. $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K} x_i^2 n - \left(\frac{\sum_{i=1}^{K} n_i x_i}{N}\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{I48,8I39 - \frac{I52,35^2}{I56}}{I56}} = 0,0I4$

3. $V = \frac{S}{\bar{X}} = \frac{0,0I4}{0,977} \cdot I00 = I,43\%$

Расчеты среднего арифметического и стандартного отклонений представлены в табл.I.

Уплотнение грунта - процесс вероятностный. Для количественного анализа вероятностного процесса, т.е. определения границ, в которых находится случайная величина, необходимо знать закон распределения случайной величины.

Цель статистической проверки на основе анализа данных по выборке установить закон распределения генеральной совокупности. Вначале принимается так называемая основная, или нулевая статистическая гипотеза в отношении неизвестного закона распределения случайной величины, т.е. принимается, что этот закон нормальный, пуассоновский и т.п. Затем с помощью статистических критериев устанавливается, соответствуют данные нашей выборки принятой гипотезе или нет / 2 /.

Рассмотрим установление закона распределения для нашего примера.

Предположим, что рассматриваемые переменные величины коэффициента уплотнения в генеральной совокупности (земляном полотне) имеют нормальное распределение, функция плотности вероятности которого описывается уравнением

$$f(X) = \frac{I}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2)$$

где x - переменный аргумент, равный испытанной характеристике;

σ - стандартное отклонение генеральной совокупности;

X - математическое ожидание генеральной совокупности.

Сравним эмпирическую кривую с нормальной кривой распределения. Параметры X и σ приравниваем соответственно найденным эмпирическим: $X = \bar{x}$; $\sigma = S$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$f(x) = \frac{I}{S\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}}. \qquad (3)$$

Для аналитической оценки близости экспериментально найденного закона распределения к закону нормального распределения используется "критерий χ^2" Пирсона, характеризующий отклонение между экспериментальными и теоретическими частотами появления событий /2/:

$$\chi^2_{опт} = \sum_{i=1}^{K} \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T}, \qquad (4)$$

где K - число интервалов, на которые разбиты измерения;

n_i и n_i^T - соответственно экспериментальные и теоретические частоты в каждом интервале.

Для нахождения теоретических частот следует пронормировать значения нижней и верхней границы каждого интервала по формулам / 3 /:

$$Z_i = \frac{a_i - \bar{x}}{S}; \qquad Z_{i+1} = \frac{b_i - \bar{x}}{S}, \quad (5)$$

где a_i, b_i – соответственно нижняя и верхняя границы i-го интервала, причем $b_i = a_{i+1}$; $b_{i+1} = a_{i+2}$ и т.д.

Расчеты значений Z_i и Z_{i+1} приведены в табл.I.

Теоретическая частота в i-м интервале определяется как разность функций Лапласа в двух соседних точках i + I и i, умноженная на общее количество всех измерений ($N = \sum_{i=1}^{n} n_i$) /3/:

$$n_i^T = (\Phi(Z_{i+1}) - \Phi(Z_i)) \cdot N, \qquad (6)$$

где

$$\Phi(Z) = \frac{I}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^Z e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du.$$

Значения интегральной функции $\Phi(Z)$ для каждого из полученных значений Z_i и Z_{i+1} выбирают из таблиц /4/. Пример расчета теоретических частот n_i^T представлен в табл.I. Сумма чисел теоретических частот меньше экспериментального числа испытаний, так как в случае нормального теоретического распределения случайная величина формально может принимать значения от $-\infty$ до $+\infty$, а мы ограничиваемся конечной областью (-2,29; 2,7I). Имея эмпирические частоты в каждом интервале (n_i) и теоретические частоты (n_i^T), по формуле (4) рассчитаем $\chi^2_{стр}$ (табл.2).

Таблица 2

n_i	n_i^T	$n_i - n_i^T$	$(n_i - n_i^T)^2$	$\frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T}$
5	7,36	-2,36	5,5696	0,76
28	2I,32	6,68	44,6224	2,09
39	38,9I	0,09	0,008I	0,0I
47	42,34	4,66	2I,7I56	0,5I
22	28,98	-6,98	48,7204	I,68
I0	II,8I	-I,8I	3,276I	0,28
5	3,03	I,97	3,8809	I,28
Σ=I56	Σ=I53,75	Σ=2,25		$\chi^2_{стр}$=6,6I

Распределение величины χ^2 зависит от параметра ν, называемого числом степеней свободы. Число степеней свободы равно числу интервалов K минус число условий (связей), наложенных на экспериментальные и теоретические вероятности. При достаточно большом числе испытаний критерий соответствия χ^2 приближенно распределен по закону с ($K-3$) степенями свободы /2/. Одна связь налагается на эмпирическую зависимость ($\sum_{i=1}^{k} n_i = N$) и две содержат нормальный закон распределения ($\bar{X} = \bar{x}$; $\sigma = S$).

Сравним полученное эмпирически значение χ^2_{emp} со значением $\chi^2_{таб}$ из таблицы распределения Пирсона /4/ для α = 0,05. При ν =7-3=4 и α = 0,05 находим $\chi^2_{таб}$ = 9,48. Так как $\chi^2_{таб} > \chi^2_{эмп}$, нет оснований отбрасывать гипотезу о нормальном ра пределении плотности в земляном полотне.

Определенное выборочное среднее значение коэффициента уплотнения $\bar{X}$ является оценкой среднего генеральной совокупности X . Для того чтобы эту оценку сделать более точной, необходимо определить пределы возможных значений X , т.е. определить, в пределах какого интервала ($\bar{X} - \varepsilon$, $\bar{X} + \varepsilon$) лежит X при заданной вероятности P=I $-\alpha$. Значения этой вероятности обычно принимают равными 0,90; 0,95; 0,99 в зависимости от принятого уровня значимости α . Вероятность / Р = I $- \alpha$ / называют доверительной вероятностью, или надежностью, интервал ($\bar{X} - \varepsilon$, $\bar{X} + \varepsilon$) - доверительным интервалом, а границы $\bar{X} - \varepsilon$ и $\bar{X} + \varepsilon$ - доверительными границами или пределами, где ε - точность определения генерального среднего.

Доверительные пределы должны устанавливаться с определенной гарантией надежности, следовательно, быть гарантированными, один из них должен отвечать возможному минимуму, а другой - возможному максимуму значений X :

$$\bar{X} - \varepsilon \leq X \leq \bar{X} + \varepsilon . \qquad (7)$$

Один из этих пределов и должен служить расчетным значением, гарантирующим от ошибок. Чем уже доверительный интервал, тем, следовательно, ближе эмпирические характеристики к истинным; ширина интервала в свою очередь зависит от объема выборки, однородности уплотнения и надежности, с которой устанавливаются доверительные границы.

Используя свойства нормального распределения, определим доверительные интервалы для примера, который рассмотрен выше. При нормальном распределении величины X оценку доверительных границ производят по распределению t -критерия Стьюдента, которое зависит от двух параметров: $f = n - 1$ и t . Значения t табулированы в зависимости от уровня значимости α /4/. Пользуясь таблицей, можно для заданных значений n и P определить t , а значение ε вычислить из выражения /I/

$$\varepsilon = t \cdot S_0 = t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} . \qquad (8)$$

где S_0 – среднее квадратическое отклонение величины $\bar{x}$ от X .

Для распределения коэффициента уплотнения в земляном полотне мы установили близость его к нормальному распределению и получили $\bar{X} = 0,977$ и $S = 0,014$. Найдем теперь границы $(0,977 - \varepsilon,\ 0,977 + \delta)$ интервала, в пределах которого находится генеральное среднее с вероятностью $P = 0,95$. В нашем случае число определений n равно 156. $S_0 = \frac{0,014}{\sqrt{156}} = \frac{0,014}{12,49} = 0,001$. По таблице /4/ определим t ($f = 155$, $\alpha = 0,05$) = 1,98. Следовательно, $\varepsilon = 1,98 \times 0,001 \approx 0,002$ и, значит, генеральное среднее (математическое ожидание) коэффициента уплотнения находится в интервале (0,975 ÷ 0,979) с надежностью 95%. Это говорит о том, что в определенных таким образом границах теоретически находится 95% замеров коэффициента уплотнения земляного полотна. Значит, достижение требуемого коэффициента уплотнения К = 0,95 обеспечено.

Рассмотренный выше метод обработки данных, полученных при контроле уплотнения земляного полотна, предназначен для практических расчетов. Статистическая обработка результатов контрольных испытаний гарантирует оценку основных характеристик уплотнения однозначным способом.

Литература

1. Ломтадзе В.Д. Методы лабораторных исследований физико-механических свойств горных пород. Л., 1972. 2. Золотарь И.А. Экономико-математические методы в дорожном строительстве. М., 1974. 3. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. М., 1959. 4. Комаров И.С. Накопление и обработка информации при инженерно-геологических исследованиях. М., 1972.