

ISSN 2520-6141



ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал



Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

№ 2 (272) 2023 год

Рубрики номера:

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

Механика

Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Моделирование процессов

и управление в технических системах

Обработка и передача информации

Системный анализ и обучающие системы

Алгоритмизация и программирование



Минск 2023

Учреждение образования
«Белорусский государственный
технологический университет»

ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал

Издается с июля 1993 года

Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
И ИНФОРМАТИКА**

№ 2 (272) 2023 год

Выходит два раза в год

Минск 2023

Учредитель – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

Главный редактор журнала – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь

Редакционная коллегия журнала:

Шетько С. В., кандидат технических наук, доцент (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;
Черная Н. В., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Куликович В. И., кандидат филологических наук, доцент, Республика Беларусь;
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;
Барчик Стэфан, доктор наук, профессор, Словацкая Республика;
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;
Харша Ратнавира, доктор наук, профессор, Королевство Норвегия;
Пайвинен Ристо, доктор наук, профессор, Финляндская Республика;
Кох Барбара, доктор наук, профессор, Федеративная Республика Германия;
Лакида П. И., доктор сельскохозяйственных наук, профессор, Украина;
Головко М. Ф., член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;
Щекин А. К., член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;
Маес Воутер, доктор химических наук, профессор, Королевство Бельгия;
Бир Петр, доктор технических наук, профессор, Республика Польша;
Горинштейн Ш., доктор наук, профессор, Государство Израиль;
Эркаев А. У., доктор технических наук, профессор, Республика Узбекистан;
Башкиров В. Н., доктор технических наук, профессор, Российская Федерация;
Каклаускас А., доктор экономических наук, профессор, Литовская Республика;
Каухова И. Е., доктор фармацевтических наук, профессор, Российская Федерация;
Хассель Л. Г., доктор наук, профессор, Королевство Швеция;
Флюрик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

Редакционная коллегия серии:

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь;
Крук Н. Н., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Асмыкович И. К., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;
Грода Я. Г., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;
Карпович Д. С., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;
Пацей Н. В., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;
Романенко Д. М., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Листопад Н. И., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Минченко Л. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Прихожий А. А., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;
Фурс А. Н., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Головко М. Ф., член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;
Щекин А. К., член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;
Бартосевич Збигнев, доктор habilitированный, Республика Польша;
Маес Воутер, доктор химических наук, профессор, Королевство Бельгия;
Прессель Мартин, доктор habilitированный, Федеративная Республика Германия.

Адрес редакции: ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 343-94-32;

главного редактора серии – (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации

№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»

Educational institution
“Belarusian State Technological University”

PROCEEDINGS OF BSTU

Scientific Journal

Published monthly since July 1993

Issue 3

**PHYSICS AND MATHEMATICS.
INFORMATICS**

No. 2 (272) 2023

Published biannually

Minsk 2023

Publisher – educational institution “Belarusian State Technological University”

Editor-in-chief – Voita Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus

Editorial (Journal):

Shet’ko S. V., PhD (Engineering), Associate Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;
Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;
Chernaya N. V., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;
Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;
Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;
Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;
Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Kulikovich V. I., PhD (Philology), Associate Professor, Republic of Belarus;
Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;
Barcik Štefan, DSc, Professor, Slovak Republic;
Zhantasov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;
Harsha Ratnaweera, DSc, Professor, Kingdom of Norway;
Paivinen Risto, DSc, Professor, Republic of Finland;
Koch Barbara, DSc, Professor, Federal Republic of Germany;
Lakida P. I., DSc (Agriculture), Professor, Ukraine;
Golovko M. F., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;
Shchekin A. K., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;
Maes Wouter, DSc (Chemistry), Professor, Kingdom of Belgium;
Beer Piotr, DSc (Engineering), Professor, Republic of Poland;
Gorinshteyn Sh., DSc, Professor, State of Israel;
Erkayev A. U., DSc (Engineering), Professor, Republic of Uzbekistan;
Bashkirov V. N., DSc (Engineering), Professor, Russian Federation;
Kaklauskas A., DSc (Economics), Professor, Republic of Lithuania;
Kaukhova I. E., DSc (Pharmaceutics), Professor, Russian Federation;
Hassel L. G., DSc, Professor, Kingdom of Sweden;
Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus.

Editorial (Issue):

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (editor-in-chief of the series), Republic of Belarus;
Urbanovich P. P., DSc (Engineering), Professor (deputy editor-in-chief of the series), Republic of Belarus;
Solov’yeva I. F., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor (executive editor), Republic of Belarus;
Kruk N. N., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Asmykovich I. K., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;
Groda Ya. G., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;
Karpovich D. S., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;
Patsey N. V., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;
Romanenko D. M., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;
Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Listopad N. I., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;
Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Minchenko L. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Prihozhiiy A. A., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;
Saiko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;
Furs A. N., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Golovko M. F., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;
Shchekin A. K., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;
Bartosiewicz Zbigniew, doctor habilitated, Republic of Poland;
Maes Wouter, DSc (Chemistry), Professor, Kingdom of Belgium;
Presselt Martin, doctor habilitated, Federal Republic of Germany.

Contact: 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.

Telephones: editor-in-chief (+375 17) 343-94-32;

editor-in-chief of the series (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.948

С. В. Пономарева¹, О. Н. Пыжкова², Г. С. Ромашенко¹

¹Белорусский государственный университет

²Белорусский государственный технологический университет

ПРОБЛЕМА ВЫБОРА ВИДА ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются разные неэквивалентные определения операций дробного интегрирования (дробного дифференцирования), предложенные Вейлем, Риманом – Лиувиллем, Адамаром, Грюнвальдом – Летниковым, Маршо. Выбор конструкции дробного интеграла (дробной производной) обусловлен удобством решения конкретной задачи и приводит к появлению важных свойств на классах некоторых функций. С другой стороны, зачастую конструкция приводит и к определенным «недостаткам», которые описаны в работе. Показано, что на множестве периодических функций, суммируемых с p -й степенью, данные определения эквивалентны.

Ключевые слова: дробные производные, оператор дробного интегрирования, периодические функции.

Для цитирования: Пономарева С. В., Пыжкова О. Н., Ромашенко Г. С. Проблема выбора вида производных дробного порядка для периодических функций // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 5–8. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-1.

S. V. Ponomareva¹, O. N. Pyzhkova², G. S. Romashchenko¹

¹Belarusian State University

²Belarusian State Technological University

THE PROBLEM OF CHOOSING THE TYPE OF DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDER FOR PERIODIC FUNCTIONS

Various non-equivalent definitions of fractional integration (fractional differentiation) operations proposed by Weil, Riemann – Liouville, Hadamard, Grunwald – Letnikov, Marchaux are considered. The choice of the construction of a fractional integral (fractional derivative) is due to the convenience of solving a specific problem and leads to the appearance of important properties on the classes of some functions. On the other hand, the design often leads to certain «disadvantages», which are described in the work. It is shown that on the set of periodic functions summable to the p th power, these definitions are equivalent.

Keywords: fractional derivative, integral operator of fractional order, periodic functions.

For citation: Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N., Romashchenko G. S. The problem of choosing the type of derivatives of fractional order for periodic functions. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 5–8. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-1 (In Russian).

Введение. Данная работа продолжает обсуждение темы дробного интегродифференцирования периодических функций (см. [1]).

Существует множество различных (и неэквивалентных) определений дробных производных (Римана – Лиувилля, Адамара, Грюнвальда – Летникова, Вейля, Капуто – Герасимова и других, см., например, [2], [3], [4]). Поэтому, в зависимости от решаемой проблемы, возникает вопрос выбора наиболее подходящей по определенным критериям конструкции дробного интеграла (или производной).

Основная часть. Для периодических функций в теории тригонометрических рядов наиболее подходящим выбором видится конструкция Г. Вейля, так как при таком подходе к производным и интегралам нецелого порядка сохраняется важнейшее свойство таких функций – их периодичность.

Пусть $x(t)$ является 2π -периодической функцией с нулевым средним значением по периоду $\int_0^{2\pi} x(t)dt = 0$. Другими словами, функция $x(t)$

может быть разложена в ряд Фурье. С учетом свойств свертки Фурье определение интеграла дробного порядка в форме Вейля для периодических функций выглядит следующим образом:

$$I_{\pm}^{(\alpha)} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t-s) \Psi_{\pm}^{(\alpha)}(s) ds, \quad \alpha > 0,$$

где

$$\Psi_{\pm}^{(\alpha)}(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^{\alpha}}.$$

Дробная производная по Вейлю при $0 < \alpha < 1$ определяется равенством

$$D_{\pm}^{(\alpha)} x = \pm \frac{d}{dt} I_{\pm}^{(1-\alpha)} x. \quad (1)$$

При этом производные и интегралы дробного порядка в форме Вейля не являются взаимно обратными и в общем случае не обладают полугрупповым свойством.

Этими «хорошими» свойствами обладает другая форма интегралов и производных в виде Римана – Лиувилля. Для дробных интегралов в форме Римана – Лиувилля выполняется, в частности, полугрупповое свойство (а в определенных функциональных пространствах и при чисто комплексном порядке интегрирования операторы дробного интегродифференцирования Римана – Лиувилля даже образуют однопараметрическую сильно непрерывную в операторной топологии группу (см. [5])). Для лиувилле-вой формы дробных производных выполняется также замечательное свойство равенства с «обычной» производной при целых значениях

порядка интегрирования и другие, позволяющие использовать эту конструкцию при решении многих сложных прикладных задач физики, биологии, теории управления и т. д. (см. [2], [3], [4]), которые невозможно решить средствами обычного интегродифференцирования.

Интеграл и производная дробного порядка Римана – Лиувилля для $0 < \alpha < 1$ определяется равенствами (см. [2]):

$$I^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}},$$

$$D^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{\alpha}} \right), \quad (2)$$

где Γ – гамма-функция Эйлера; α – порядок интегрирования (дифференцирования), а интеграл понимается как условно сходящийся:

$$\int_{-\infty}^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t-2\pi n}^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

Сходимость интеграла для периодических функций следует из равенства нулю в среднем по периоду.

Но есть у дробных производных Римана – Лиувилля особенность – неравенство нулю от константы при нецелых порядках дифференцирования. Этого «недостатка» лишена производная в форме Маршо, определяемой следующим равенством:

$$D_{+}^{\alpha} x(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x(t) - x(t-s)}{s^{1+\alpha}} ds. \quad (3)$$

Существует еще один подход к дробному интегродифференцированию – разностный. Этот подход предложенный еще А. Грюнвальдом и А. В. Летниковым в 1867–1868 гг. (см [3]), привлекателен с точки зрения удобства в приближенных вычислениях.

Еще одним преимуществом разностного подхода к определению дробных производных является также относительная простота вычислений. Так, вычислить дробную производную Римана – Лиувилля, Вейля или Маршо очень непросто даже для простых тригонометрических функций типа синус, не говоря уже о комбинации. Более того, конкретные численные значения таких производных все равно оказываются вычисленными приближенно из-за представления точных решений через специальные функции.

Разностный подход широко известен в решении дифференциальных уравнений целых порядков, однако теперь нужно определять конечные разности дробного порядка (см. [2]).

Для функции $x(t)$, заданной на всей прямой, положим

$$(\Delta_h^\alpha x)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t - kh), \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

где $\binom{\alpha}{k} = \frac{(-1)^{k-1} \alpha \Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(k + 1)}$ – биномиальные

коэффициенты; Γ – гамма-функция Эйлера; α – порядок интегрирования (дифференцирования).

Разность (4) называют левосторонней, если $h > 0$, и правосторонней, если $h < 0$. Заметим, что разность (4) не определена при $\alpha < 0$.

Дробной производной Грюнвальда – Летникова функции $x(t)$ порядка α называют функцию

$$x^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_h^\alpha x)(t)}{h^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (5)$$

где предел может рассматриваться в зависимости от изучаемых вопросов поточечный, почти всюду или по норме пространства (в этом случае речь идет о сильной производной).

Симметрично вводится также дробное дифференцирование при $0 < \alpha < 1$ в форме Грюнвальда – Летникова – Рисса (так как для 2π -периодических функций совпадает с операцией, обратной риссову потенциалу):

$$x^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_h^\alpha x)(t) + (\Delta_{-h}^\alpha x)(t)}{|h|^\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (6)$$

Производная Грюнвальда – Летникова совпадает с производной Маршо (см. [2]) для 2π -периодических функций из $L_p(0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$. Также для того же функционального класса доказано совпадение вейлевской и лиувиллевской производных дробного порядка.

Обобщая вышесказанное, а также обращаясь к [2] и [3], приходим к выводу, что производная в форме Грюнвальда – Летникова совпадает для 2π -периодических с нулевым средним значением по периоду, заданных на всей прямой функций из $L_p(0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$ также с лиувиллевской производной дробного порядка. Вначале рассмотрим случай для порядка дифференцирования $0 < \alpha < 1$. Для нецелых порядков $\alpha > 1$ понадобятся некоторые дополнительные условия.

Для указанного класса функций выполняется следующая **теорема**.

Пусть $x(t)$ – 2π -периодическая функция с нулевым средним значением по периоду, $x(t) \in L_p(0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) для $x(t)$ существует дробная производная порядка α Грюнвальда – Летникова (5);

2) для $x(t)$ существует дробная производная Вейля (1) порядка α ;

3) для $x(t)$ существует дробная производная Маршо (3) порядка α ;

4) для $x(t)$ существует дробная производная Римана – Лиувилля (2) порядка α по всей прямой.

И все эти производные равны между собой в каждой точке, т. е.

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(t) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_h^\alpha x)(t)}{h^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \left(\pm \frac{d}{dt} \right) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} x(t-s) \Psi_\pm^{(1-\alpha)}(s) ds = \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{x(t) - x(t-s)}{s^{1+\alpha}} ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_{-\infty}^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \end{aligned}$$

где $\Psi_\pm^{(\alpha)}(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^\alpha}$, а интеграл понимается как условно сходящийся:

$$\int_{-\infty}^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t-2\pi n}^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

Эквивалентность 4) $\Leftrightarrow$ 2) прямо следует из леммы 19.3 (см. [2]), доказанной для $x(t) \in L_1(0, 2\pi)$, так как для лебеговых пространств известно вложение

$$1 \leq p \leq q \leq \infty, \Rightarrow L_q \subset L_p.$$

Эквивалентность 3) $\Leftrightarrow$ 2) следует из принадлежности $x(t) \in H_\lambda^p$, $\lambda > \alpha$ (а эта принадлежность, очевидно, следует из условия $\int_0^{2\pi} x(t) dt = 0$).

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 3) для 2π -периодических функций доказана в [2, теорема 20.2]

Таким образом, для определенных классов функций можно в некотором смысле произвольно выбирать форму дробного интегрирования, в зависимости от задачи и предпочтений исполнителя.

Заметим, что все вышесказанное выполняется для периодической функции со средним значением по периоду $\int_0^{2\pi} x(t) dt = a$, не равным

нулю, после линейной замены $s = t - a$, а также длиной периода, не обязательно равной 2π .

Представляет интерес расширение полученных утверждений на почти периодические функции ввиду широкого применения такого класса функций в прикладных дифференциальных

уравнениях с почти периодическими коэффициентами, а также на функции с нулевым пределом Банаха – Мазура.

Заключение. Рассмотрены различные определения операций дробного дифференцирования

и интегрирования, указаны различия определений. Сформулирована и доказана теорема об эквивалентности этих определений на классе периодических функций, суммируемых с p -й степенью ($1 < p < \infty$).

Список литературы

1. Пономарева С. В., Пыжкова О. Н. К вопросу о дробных производных Вейля // Материалы 85-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 1–13 февр. 2021 г. Минск, 2021. С. 143–145.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
3. Oldham K. and Spanier J. The Fractional Calculus. New York; London; Academic Press, 1974. 234 p.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam: Elsevier Science B. V., 2006. 523 p.
5. Пономарева С. В., Пыжкова О. Н., Яблонская Н. Б. Полугрупповые свойства операторов интегрирования дробного порядка Римана – Лиувилля // Физико-математические науки: тез. 83-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 4–15 февр. 2019 г. Минск, 2019. С. 48.

References

1. Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N. On the question of fractional Weyl derivatives. *Materialy 85-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodavat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunar. uchastiem)* [Materials of the 85th scientific and technical conference of the teaching staff, researchers and postgraduate students (with international participation)]. Minsk, 2021, pp. 143–145 (In Russian).
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p. (In Russian).
3. Oldham K. and Spanier J. The Fractional Calculus. New York, London, Academic Press Publ., 1974. 234 p.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam, Elsevier Science B. V. Publ., 2006, 523 p.
5. Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N., Yablonskaya N. B. Semigroup Properties of Riemann-Liouville Fractional Order Integration Operators. *Fiziko-matematicheskiye nauki: tez. 83-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodavat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunar. uchastiem)* [Materials of the 83th scientific and technical conferences of faculty, researchers and graduate students (with international participation)]. Minsk, 2019, p. 48 (In Russian).

Информация об авторах

Пономарева Светлана Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики. Белорусский государственный университет (220050, г. Минск, пр. Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: demyanko@bsu.by

Пыжкова Ольга Николаевна – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

Ромашенко Галина Станиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики. Белорусский государственный университет (220050, г. Минск, пр. Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: gal.romash@gmail.com

Information about the authors

Ponomareva Svetlana Vladamirovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Functional Analysis and Analytical Economics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demyanko@bsu.by

Pyzhkova Olga Nikolaevna – PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

Romashchenko Galyna Stanislavovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Functional Analysis and Analytical Economics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gal.romash@gmail.com

Поступила после доработки 15.03.2023

УДК 519.2

А. М. Волк

Белорусский государственный технологический университет

АНАЛИЗ ДИСПЕРСНОГО СОСТАВА ЧАСТИЦ ДРОБЛЕНИЯ

Выполнен анализ методов описания дисперсного состава частиц дробления. Рассмотрено обобщенное гамма-распределение. Данное распределение имеет широкое применение в статистических методах исследования физических процессов, дистанционном зондировании, теории надежности, при описании дисперсного состава частиц дробления. Исследованы его свойства и найдены числовые характеристики. Методом наибольшего правдоподобия получены уравнения для статистической оценки параметров данного распределения. Для полученных оценок найдена матрица информации Фишера, показана ее знакоположительность, что доказывает их состоятельность, асимптотическую эффективность и единственность. Выполнено описание дисперсного состава топлива, распыленного дизельными форсунками. Дан метод определения всех необходимых характеристик, используемых при исследовании физических процессов.

Ключевые слова: физические процессы, дисперсный состав, характеристики распределения, обобщенное гамма-распределение, свойства, статистическая оценка параметров, метод наибольшего правдоподобия, матрица информации Фишера, асимптотическая эффективность, единственность.

Для цитирования: Волк А. М. Анализ дисперсного состава частиц дробления // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 9–17. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-2.

A. M. Volk

Belarusian State Technological University

ANALYSIS OF THE DISPERSED COMPOSITION OF CRUSHING PARTICLES

An analysis of methods for describing the dispersed composition of crushing particles is performed. A generalized gamma distribution is considered. This distribution generalizes Gamma distributions and is widely used in statistical methods of physical processes research, in remote sensing, in reliability theory, and in describing the dispersed composition of crushing particles. Its properties have been investigated and its numerical characteristics have been found. Equations for statistical estimation of parameters of given distribution have been obtained by the method of highest likelihood. The Fisher information matrix was found for the obtained estimations; its sign-positivity was shown, which proves their consistency, asymptotically efficiency, and uniqueness. A description of the dispersed composition of fuel atomized by diesel injectors is performed. A method for determining all the necessary characteristics used in the study of physical processes is given.

Keywords: physical processes, dispersive composition, distribution characteristics, generalized gamma distribution, properties, statistical estimation of parameters, best likelihood method, Fisher information matrix, asymptotic efficiency, uniqueness.

For citation: Volk A. M. Analysis of the dispersed composition of crushing particles. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no 2 (272), pp. 9–17. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-2 (In Russian).

Введение. Многие процессы в различных отраслях промышленности происходят с дисперсными системами. Это тепло- и массообмен, сепарация в аппаратах химической промышленности, процессы дробления промышленных материалов, изготовление вяжущих смесей и красок, сгорание горючих веществ, очистка выбросов от опасных компонентов и т. д.

Качественный анализ дисперсной системы позволяет повысить эффективность расчетов исследуемых процессов. При этом необходимо знать распределение частиц по размерам δ и

выразить основные характеристики дисперсного состава среды. Такими характеристиками являются средние диаметры частиц: δ_{10} – средний диаметр; δ_{20} – средний квадратичный диаметр; δ_{30} – средний кубический диаметр; δ_{32} – средний кубический диаметр, взвешенный по удельной поверхности (средний диаметр Заутера); δ_{31} – средний кубический диаметр, взвешенный по суммарной длине (средний диаметр Проберта) [1].

Если известна плотность распределения количества частиц по их размерам $f(\delta)$, то

средние значения могут быть выражены общей формулой

$$\delta_{pq}^{p-q} = \left(\int_0^{+\infty} \delta^p f(\delta) d\delta \right) / \left(\int_0^{+\infty} \delta^q f(\delta) d\delta \right). \quad (1)$$

Из (1) следуют соотношения:

$$\delta_{pq}^{p-q} \delta_{pl}^{p-l} = \delta_{pl}^{p-l}; \quad \delta_{pq}^{p-q} = \left(\delta_{qp}^{q-p} \right)^{-1}.$$

Средние значения могут быть выражены через начальные моменты распределения случайной величины δ :

$$\delta_{pq}^{p-q} = \alpha_p / \alpha_q.$$

Доминирующее положение в теории вероятностей и математической статистике занимает нормальный закон распределения непрерывной случайной величины. Разумовский предложил данным законом описывать распределение логарифмов веса частиц золота в пробах [2]. Колмогоров теоретически обосновал логарифмически нормальный закон распределения объемов частиц дробления [3–5]:

$$f(\delta) = \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi \ln \sigma}} e^{-\frac{(\ln \delta - \ln \delta_m)^2}{2 \ln^2 \sigma}}, \quad (2)$$

где δ_m – медиана распределения объема; $\ln \sigma$ – среднеквадратическое отклонение логарифмов диаметров частиц от их среднего диаметра. Медиану элементов выборки допускается заменять средним выборочным значением этих элементов.

Данный закон получен при условии, что скорость дробления постоянна и требует эмпирического определения параметров.

Из эмпирических распределений наиболее популярным является распределение Вейбулла – Гнеденко [4, 5] с функцией распределения массы частиц по их диаметрам:

$$F(\delta) = 1 - e^{-b\delta^c}. \quad (3)$$

При двойном дифференцировании функции остатка

$$R(\delta) = e^{-b\delta^c}$$

получается линейная зависимость, и параметры могут быть найдены без сложных вычислений [4]: графически или методом наименьших квадратов.

В источниках [4, 6, 7] показано, что обобщением многих аналитических форм для законов статистического распределения однокомпонентных случайных величин служит функция плотности

$$f(\delta) = A \delta^m e^{-b\delta^c}, \quad (4)$$

имеющая степенно-показательный вид и содержащая четыре параметра: A, m, b, c .

Шифрин [8] описал свойства функции (4) и с ее помощью – распределение в облаках количества капель по их диаметрам. Лышевский [6], используя формулу (4) для описания распределения количества капель по их диаметрам при распыливании топлива дизельными форсунками, получил коэффициент A , моду распределения и формулу для средних значений. Авдеев [7] на основе зависимости (4) описывал распределение массы по диаметрам взвешенных твердых частиц. Им дан способ нахождения параметров распределения по трем специально выбранным опытным значениям. Этот способ не выясняет смысла параметров распределения и требует сложных вычислений.

Широко применяемые законы распределения Колмогорова (2) и Вейбулла – Гнеденко (3) не дают достаточно точного распределения близких к нулю размеров частиц. Наиболее точны четырехпараметрические формулы, но возникают определенные трудности при вычислении их параметров [4].

Распределение (4) рассмотрено в работе [9] и названо обобщенным гамма-распределением. Функцию плотности данного распределения удобно представить в виде

$$f(x) = \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right). \quad (5)$$

Данное распределение изучалось ранее и было переоткрыто позднее другими исследователями [10].

Гамма-распределения более полутора столетия используются при моделировании реальных процессов и явлений. Обобщенное гамма-распределение применяется в теории надежности, при прогнозировании продолжительности лечения и затрат на медицинское обслуживание, в расчетах инженерных рисков и рисков катастроф (землетрясений и наводнений), при обработке изображений и дистанционном зондировании, в качестве моделей распределения доходов [11].

Распределение (5) включает в себя большинство известных законов. Его частными случаями являются: распределение Релея при $b = 2$ и $c = 2$; экспоненциальное распределение при $b = 1$ и $c = 1$; гамма-распределение при $b > 1$ и $c = 1$; распределение Эрланга при $b = k$, $c = 1$ при $k \in N$; распределение Хи-квадрат при $b = k/2$, $c = 1$, $\theta = 2$ при $k \in N$; распределение Хи при $b = k$, $c = 2$, $\theta = \sqrt{2}$ при $k \in N$; распределение Накагами при $b > 1$ и $c = 2$; распределение Вейбулла при $b = c$ и $c > 0$; распределение Максвелла при $b = 3$, и $c = 2$; полунормальное распределение при $b = 1/2$, $c = 2$

и $\theta = \sqrt{2}$, а также их обратные и масштабированные аналоги [11, 12].

Популярность рассматриваемого распределения обуславливается как гибкостью и многообразием параметров, так и возможностью использовать его в качестве адекватных асимптотических аппроксимаций во многих предельных схемах [13].

Обобщенное гамма-распределение удобно применять при описании дисперсного состава частиц дробления [14]. При этом сложной остается задача статистической оценки его параметров. Метод моментов [14] не выявляет свойств оценок и не гарантирует их единственность. Автор данной работы независимо от других авторов определился с названием распределения (5), рассмотрел его свойства и предложил статистическую оценку параметров методом максимального правдоподобия [15].

Исследованию свойств и применению обобщенного гамма-распределения посвящено большое количество работ [16]. Тем не менее и в настоящее время актуальной остается задача статистической оценки параметров обобщенного гамма-распределения и исследование их свойств.

Свойства обобщенного гамма-распределения. Рассмотрим обобщенное гамма-распределение некоторой случайной величины ξ , заданное функцией плотности (5).

Отметим, что параметр θ является параметром масштаба, а b и c есть параметры формы.

Выполним переход к безразмерной случайной величине $\eta = \xi / \theta$ и получим функцию плотности:

$$f(t) = \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} t^{b-1} \exp(-t^c). \quad (6)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины η

$$F(t) = \frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^t \tau^{b-1} \exp(-\tau^c) d\tau \quad (7)$$

сводится к неполной гамма-функции [17].

Если $c > 0$, то

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \gamma\left(\frac{b}{c}, t^c\right), \quad (8)$$

а при $c < 0$

$$F(t) = 1 - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \gamma\left(\frac{b}{c}, t^c\right). \quad (9)$$

Если $\frac{b-1}{e} > 0$, то исследуемые распределения имеют следующую моду:

$$\eta_{\text{mod}} = \left(\frac{b-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}; \quad \xi_{\text{mod}} = \theta \eta_{\text{mod}} = \theta \left(\frac{b-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}. \quad (10)$$

Для функции распределения мода будет точкой перегиба. На рис. 1, 2 приведены графики функции плотности и функции распределения случайной величины η для различных значений параметров b и c .

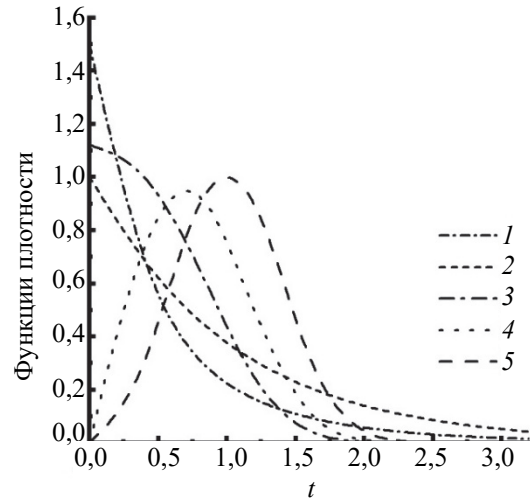


Рис. 1. Функция плотности распределения (6) случайной величины η :

1 – $0 < b < 1, c > 0$, или $b < 0, c < 0$;

2 – $b = 1, 0 < c \leq 1$; 3 – $b = 1, c > 1$;

4 – $1 < b \leq 2, c > 0$; 5 – $b > 2, c > 0$

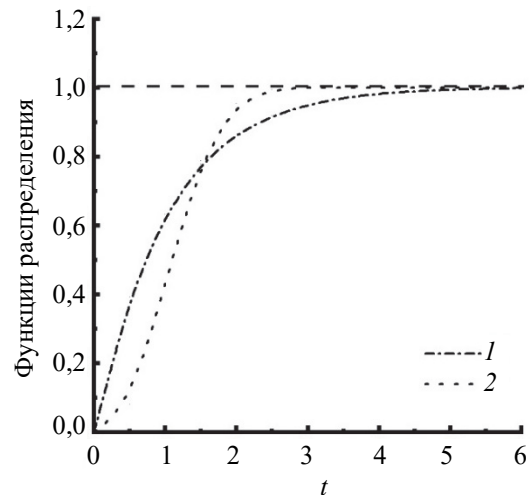


Рис. 2. Функция распределения (7) случайной величины η :

1 – $0 < b \leq 1, c > 0$ или $b < 0, c < 0$; 2 – $b > 1, c > 0$

Теорема 1. Для распределения (5) при $c > 0$ существуют начальные моменты порядка ν , удовлетворяющего условию $b + \nu > 0$, причем

$$\alpha_v(\eta) = \Gamma\left(\frac{b+v}{c}\right) / \Gamma\left(\frac{b}{c}\right); \quad (11)$$

$$\alpha_v(\xi) = \theta^v \Gamma\left(\frac{b+v}{c}\right) / \Gamma\left(\frac{b}{c}\right). \quad (12)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \alpha_v(\xi) &= \frac{c}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} x^v \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\} dx = \\ &= \frac{c\theta^v}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b+v-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\} dx = \\ &= \frac{c\theta^v}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} t^{b+v-1} \exp(-t^c) dt = \theta^v \frac{\Gamma\left(\frac{b+v}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}. \end{aligned}$$

Начальные моменты распределения позволяют вычислить все его числовые характеристики.

Математическое ожидание

$$M(\xi) = \theta \alpha_1(\eta) = \theta \Gamma\left(\frac{b+1}{c}\right) / \Gamma\left(\frac{b}{c}\right).$$

Дисперсия

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \theta^2 \mu_2(\eta) = \theta^2 (\alpha_2(\eta) - \alpha_1^2(\eta)) = \\ &= \theta^2 \left(\Gamma\left(\frac{b+2}{c}\right) / \Gamma\left(\frac{b}{c}\right) - \left(\Gamma\left(\frac{b+1}{c}\right) / \Gamma\left(\frac{b}{c}\right) \right)^2 \right) = \\ &= \theta^2 \frac{\Gamma\left(\frac{b+2}{c}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{c}\right) - \Gamma^2\left(\frac{b+1}{c}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{b}{c}\right)}. \end{aligned}$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}.$$

Ассиметрия

$$A(\xi) = A(\eta) = \frac{\mu_3(\eta)}{\sigma^3(\eta)} = \frac{\alpha_3(\eta) - 3\alpha_1(\eta)\alpha_2(\eta) + \alpha_1^3(\eta)}{(\alpha_2(\eta) - \alpha_1^2(\eta))^{3/2}}.$$

Экцесс

$$\begin{aligned} E(\xi) &= E(\eta) = \frac{\mu_4(\eta)}{\sigma^4(\eta)} - 3 = \\ &= \frac{\alpha_4(\eta) - 4\alpha_1(\eta)\alpha_3(\eta) + 6\alpha_1^2(\eta)\alpha_2(\eta) - \alpha_1^4(\eta)}{(\alpha_2(\eta) - \alpha_1^2(\eta))^2} - 3. \end{aligned}$$

Теорема 2. Распределение (5) имеет характеристическую функцию:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{b+k}{c}\right)}{k!} (i\zeta\theta)^k.$$

Доказательство.

Найдем характеристическую функцию распределения случайной величины ξ .

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\zeta x) f(x) dx = \\ &= \frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} \exp(i\zeta\theta t) t^{b-1} \exp(-t^c) dt. \end{aligned}$$

Выполним замену $t^c = y$ и, разлагая функцию $\exp(i\zeta\theta t)$ в ряд, находим:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\zeta\theta y^{\frac{1}{c}})^k}{k!} y^{\frac{b}{c}-1} \exp(-y) dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\zeta\theta)^k}{k!} \int_0^{+\infty} y^{\frac{b+k}{c}-1} \exp(-y) dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{b+k}{c}\right)}{k!} (i\zeta\theta)^k. \end{aligned}$$

Статистическая оценка параметров. Статистическая оценка параметров распределения может быть выполнена методом моментов, при котором параметры распределения находятся из условия равенства теоретических и статистических моментов. Метод моментов требует решения достаточно сложной системы уравнений, а также проверки соответствия полученной функции статистическим данным с помощью критериев согласия и не гарантирует единственности решения.

Выполним статистическую оценку параметров распределения случайной величины, заданной функцией плотности (5), методом наибольшего правдоподобия [18].

Пусть имеется некоторая выборка $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ генеральной совокупности случайной величины ξ , у которой есть функция

плотности распределения (5). Рассмотрим функцию правдоподобия

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right\}. \quad (13)$$

Прологарифмировав данную функцию, получим функцию

$$\begin{aligned} L_n = \ln L &= \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{|c|}{\theta} - \ln \Gamma\left(\frac{b}{c}\right) + (b-1) \ln \frac{x_i}{\theta} - \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \right] = \\ &= n \left[\ln \frac{|c|}{\theta} - \ln \Gamma\left(\frac{b}{c}\right) + (b-1) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \right] \end{aligned}$$

и найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial L_n}{\partial \theta} = -\frac{nb}{\theta} + \frac{c}{\theta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c; \quad (14)$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial b} = -\frac{n}{c} \psi\left(\frac{b}{c}\right) + \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial c} = \frac{n}{c} + \frac{nb}{c^2} \psi\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln \frac{x_i}{\theta}. \quad (16)$$

Применим необходимое условие экстремума функции многих переменных, приравняем найденные частные производные к нулю и получим уравнения правдоподобия для определения статистических оценок параметров распределения:

$$b - \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c = 0; \quad (17)$$

$$\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta} = 0; \quad (18)$$

$$\frac{1}{c} + \frac{b}{c^2} \psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln \frac{x_i}{\theta} = 0. \quad (19)$$

Решение уравнений (17)–(19) дает статистическую оценку параметров исследуемого распределения (5).

Оценка наибольшего правдоподобия для параметра масштаба θ выражается в явном виде при известных b и c :

$$\theta = \left(\frac{c}{nb} \sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{\frac{1}{c}}. \quad (20)$$

Условия существования и свойства статистических оценок определяются выполнением условий регулярности [19], основным из которых является знакоположительность матрицы информации Фишера для параметров b и c :

$$I_n(b, c) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_n}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 L_n}{\partial b \partial c} \\ \frac{\partial^2 L_n}{\partial c \partial b} & \frac{\partial^2 L_n}{\partial c^2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Вычислим производные второго порядка прологарифмированной функции правдоподобия L_n , обозначим $b/c = k$ и получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_n}{\partial b^2} &= -\frac{n}{c^2} \psi'\left(\frac{b}{c}\right) = -\frac{n}{c^2} \psi'(k); \\ \frac{\partial^2 L_n}{\partial b \partial c} &= \frac{n}{c^2} \psi\left(\frac{b}{c}\right) + \frac{nb}{c^3} \psi'\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{n}{c^2} [\psi(k) + k\psi'(k)]; \\ \frac{\partial^2 L_n}{\partial b \partial c} &= \frac{n}{c^2} [\psi(k) + k\psi'(k)]; \\ \frac{\partial^2 L_n}{\partial c^2} &= -\frac{n}{c^2} - \frac{2nb}{c^3} \psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{nb^2}{c^4} \psi'\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta} = \\ &= -\frac{n}{c^2} - \frac{2nk}{c^2} \psi(k) - \frac{nk^2}{c^2} \psi'(k) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta}. \end{aligned}$$

Математическое ожидание величин, не зависящих от переменных x_i , равно этим величинам. Оценки максимального правдоподобия удовлетворяют условиям регулярности. При этих условиях элементы матрицы информации Фишера равны для независимых случайных величин.

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta} \right) &= n E \left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^c \ln^2 \frac{x}{\theta} \right) = \\ &= \frac{nc}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^c \ln^2 \left(\frac{x}{\theta}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\} d\left(\frac{x}{\theta}\right) = \\ &= \frac{nc}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} t^{c+b-1} \ln^2 t \exp\{-t^c\} dt = |t^c = z| = \\ &= \frac{n}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} z^k \ln^2 z \exp(-z) dz = \frac{n}{\Gamma(k)} \frac{\partial^2 \Gamma(k+1)}{\partial b^2} = \\ &= \frac{n\Gamma''(k+1)}{c^2 \Gamma(k)} = \frac{nk\Gamma''(k+1)}{c^2 \Gamma(k+1)} = \\ &= \frac{nk}{c^2} [\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)]. \end{aligned}$$

$$I_n(k, c) = \frac{n}{c^2} \begin{bmatrix} \psi'(k) & -[\psi(k) + k\psi'(k)] \\ -[\psi(k) + k\psi'(k)] & D \end{bmatrix},$$

где

$$D = 1 + 2k\psi(k) + k^2\psi'(k) + k[\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)].$$

Рассмотрим матрицу

$$I(k) = \begin{bmatrix} \psi'(k) & -[\psi(k) + k\psi'(k)] \\ -[\psi(k) + k\psi'(k)] & D \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Логарифмическая производная $\psi(k)$ гамма-функции монотонно возрастает, непрерывна на интервале $(0, +\infty)$ и принимает значения в пределах $(-\infty, +\infty)$ [17]. Поэтому $\psi'(k)$ принимает положительные значения на интервале $(0, +\infty)$.

Определитель матрицы (22) в общем виде

$$\det I(k) = \psi'(k)D - [\psi(k) + k\psi'(k)]^2. \quad (23)$$

График значений определителя матрицы (23), полученный численными методами (рис. 3), показывает, что он принимает положительные значения при $k > 0$.

Матрица (22) будет знакоположительной.

Матрица информации Фишера $I_n(k, c)$ отличается от матрицы (22) на положительный множитель и также будет знакоположительной.

Решение уравнений (17)–(19) дает статистическую оценку параметров распределения (5), для которых будут выполняться условия регулярности [19].

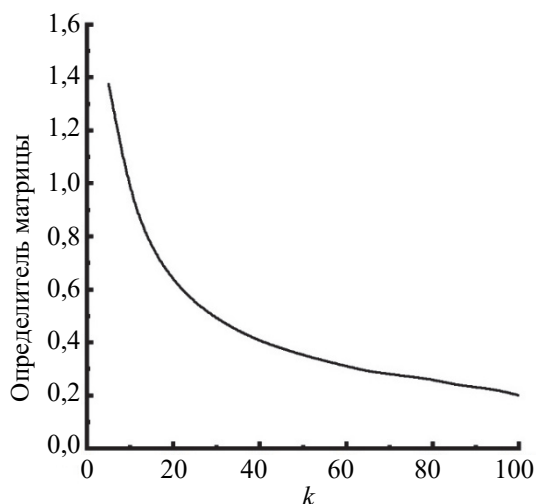


Рис. 3. График значений определителя матрицы (22)

Данные оценки являются состоятельными, асимптотически несмещенными, эффективными, асимптотически нормальными и асимптотически эффективными [19]. При условии эффективности оценок система (17)–(19) имеет единственное решение [18].

Применение обобщенного гамма-распределения к описанию частиц дробления. Если предположить, что плотность распределения количества частиц от их диаметра описывается зависимостью (5), тогда плотность распределения величины порядка ξ^k [4]

$$f_k(x) = A_k x^k f(x) = A_k \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b+k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\}.$$

Коэффициент A_k находим их условия нормирования

$$\int_0^{+\infty} f_k(x) dx = 1$$

и получим

$$f_k(x) = \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b+k}{c}\right)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b+k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\}. \quad (24)$$

Последняя зависимость описывает плотность распределения количества ($k=0$), размеров ($k=1$), поверхностей ($k=2$) и объемов ($k=3$) частиц дробления.

Рассмотрим распределение частиц дробления топлива дизельными форсунками [6] (таблица).

Характеристики распыливания топлива

№ группы	Размер капель в группе, мкм	Средний размер δ_i , мкм	Количество капель n_i	$n_i \delta_i \cdot 10^{-4}$
1	8,33–16,66	12,5	690	0,863
2	16,66–25,00	20,8	889	1,849
3	25,00–33,33	29,1	985	2,866
4	33,33–41,66	37,5	846	3,172
5	41,66–50,00	45,8	624	2,858
6	50,00–58,33	54,1	412	2,229
7	58,33–66,66	62,5	324	2,025
8	66,66–75,00	70,8	210	1,487
9	75,00–83,33	79,1	110	0,87
10	83,33–91,66	87,5	47	0,411
11	91,66–100,00	95,8	27	0,259
12	100,00–108,33	104,1	16	0,167
13	108,33–116,66	112,5	3	0,034
Сумма		812,1	5183	19,09

Данную выборку опишем различными законами распределения.

Вычислим параметры логарифмически нормального закона распределения [2]. Логарифм среднего значения элементов выборки и среднеквадратическое отклонение логарифмов элементов выборки от среднего значения их логарифмов: $\ln \bar{\delta} = 3,472$; $\ln \sigma = 0,533$.

Распределение Вейбула – Гнеденко [5] представим в виде

$$F(\delta) = 1 - e^{-\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^c}.$$

За параметр масштаба примем среднее выборочное значение:

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i \delta_i.$$

Для данной выборки получим $\theta = 36,831$.

Параметр $c = 1,557$ находим методом наибольшего правдоподобия по формулам (18), (19), при условии $b = c$.

Для обобщенного гамма-распределения за параметр масштаба примем среднее выборочное значение $\theta = 36,831$. Методом наибольшего правдоподобия по формулам (18), (19) находим значения параметров: $b = 2,304$ и $c = 1,874$.

Полученные значения параметров позволяют сравнить функции распределения различных законов (рис. 4).

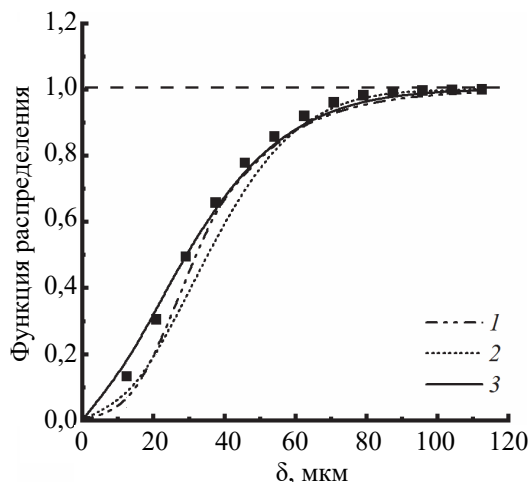


Рис. 4. Функции распределения дисперсного состава топлива:

- 1 – Вейбулла – Гнеденко;
- 2 – обобщенное Гамма-распределение;
- 3 – логарифмически нормальный закон

Рассматриваемые законы распределения (рис. 4) достаточно точно описывают исследуемую выборку (таблица).

Обобщенное гамма-распределение является наиболее удобным в силу своей универсальности. Находим основные характеристики этого распределения: математическое ожидание – 37,291; дисперсия – 344,025; асимметрия – 0,636; эксцесс – 0,308.

По формуле (24) могут быть найдены плотности распределения размеров, поверхностей, объемов и их средние характеристики (1).

Заключение. Обобщенное гамма-распределение имеет широкую область применения в силу своей универсальности. Но его использование ограничивалось отсутствием способов достоверной оценки параметров на основании статистических данных.

Предложенный метод наибольшего правдоподобия, полученные уравнения (17)–(19), значимость матрицы информации Фишера позволяют получить состоятельные, асимптотически эффективные статистические оценки параметров распределения, что доказывают их единственность.

Данное распределение даст возможность находить все характеристики, необходимые для исследования различных физических процессов.

Список литературы

1. Распыливание жидкостей / Ю. Ф. Дитякин [и др.]. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
2. Разумовский Н. К. Характер распределения содержаний металла в рудных месторождениях // Доклады АН СССР. 1940. Т. 28. С. 55–57.
3. Колмогоров А. Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // Доклады АН СССР. 1944. Т. 31. С. 99–101.
4. Коузов П. А. Основы анализа дисперсионного состава промышленных пылей и измельченных материалов. Л.: Химия, 1987. 264 с.
5. Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.
6. Лышевский А. С. Процессы распыливания топлива дизельными форсунками. М.: Машгиз, 1963. 180 с.
7. Авдеев Н. Я. Об аналитическом методе расчета седиментометрического анализа. Ростов н/Д: Ростов. гос. ун-т, 1964. 202 с.
8. Шифрин К. С. О вычислении радиационных свойств облаков // Труды ГГО им. А. И. Воейкова, 1955. Вып. 46 (108). С. 5–33.
9. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statistics. 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.
10. Кудрявцев А. А. О представлении гамма-экспоненциального и обобщенного отрицательного биномиального распределений // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 4. С. 76–80.
11. Королев В. Ю., Крылов В. А., Кузьмин В. Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5, вып. 1. С. 31–38.
12. Кудрявцев А. А. Априорное обобщенное гамма-распределение в байесовских моделях баланса // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 3. С. 27–33.
13. Закс Л. М., Королев В. Ю. Обобщенные дисперсионные гамма-распределения как предельные для случайных сумм // Информатика и ее применения. 2013. Т. 7, вып. 1. С. 105–115.

14. Левданский Э. И., Волк А. М., Плехов И. М. О законе распределения частиц при дроблении // ТОХТ. 1986. № 5. С. 672–677.
15. Волк А. М. Обобщенное гамма-распределение // Актуальные проблемы информатики: сб. тр. VI Междунар. науч. конф., 26–30 окт. 1998 г., Минск: в 3 ч. Минск: БГУ, 1998. Ч. 2. С. 426–432.
16. Джонсон Н. Л., Коц С, Балакришнан Н. Одномерные непрерывные распределения: в 2 ч. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. Ч. 1. 703 с.
17. Янке Е., Эмдэ Ф., Леш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 458 с.
18. Крамер Г. Математические методы статистики: Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Мир, 1975. 648 с.
19. Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 448 с.

References

1. Dityakin Yu. F., Klyachko L. A., Novikov B. V., Yagodkin V. I. *Raspylivaniye zhidkostey* [Spraying liquids]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1977. 208 p. (In Russian).
2. Razumovsky N. K. Character of metal content distribution in ore deposits. *Doklady akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1940, vol. 28, pp. 55–57. (In Russian).
3. Kolmogorov A. N. On the log-normal law of particle size distribution during crushing. *Doklady akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1944, vol. 31, pp. 99–101. (In Russian).
4. Kouzov P. A. *Osnovy analiza dispersionnogo sostava promyshlennykh pyley i izmel'chennykh materialov* [Principles of analysis of variance and composition of industrial dust from grinding materials]. Leningrad, Khimiya Publ., 1987. 264 p. (In Russian).
5. Vadzinsky R. N. *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam* [Handbook on Probability Distributions]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2001. 295 p. (In Russian).
6. Lyshevsky A. S. *Protsessy raspylivaniya topliva dizel'nyimi forsunkami* [Fuel atomisation processes by diesel injectors]. Moscow, Mashgiz Publ., 1963. 180 p. (In Russian).
7. Avdeev N. Ya. *Ob analiticheskom metode rascheta sedimentometricheskogo analiza* [About analytical method of calculation of sedimentometric analysis]. Rostov-on-Don, Rostovskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 1964. 202 p. (In Russian).
8. Shifrin K. S. On calculating the radiation properties of clouds. *Trudy GGO imeni. A. I. Voyeykova* [Proceedings of GGO named after A. I. Voyeikov], 1955, vol. 46 (108), pp. 5–33 (In Russian).
9. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution. *Ann. Math. Statistics*, 1962, vol. 33, pp. 1187–1192.
10. Kudryavtsev A. A. On the representation of the gamma exponential and generalized negative binomial distributions. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2019, vol. 13, issue 4, pp. 76–80 (In Russian).
11. Korolev V. Yu., Krylov V. A., Kuzmin V. Yu. Stability of finite mixtures of generalized gamma distributions with respect to perturbations of parameters. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2011, vol. 5, issue 1, pp. 31–38 (In Russian).
12. Kudryavtsev A. A. A priori generalized gamma distribution in Bayesian balance models. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2019, vol. 13, issue 3, pp. 27–33 (In Russian).
13. Zaks L. M., Korolev V. Yu. Generalized dispersion gamma distributions as the limit for random sums. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2013, vol. 7, issue 1, pp. 105–115 (In Russian).
14. Levdanskiy E. I., Volk A. M., Plekhov I. M. On the particle distribution law in crushing. *Tekhnicheskoye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Technical Foundations of Chemical Engineering], 1986, no 5, pp. 672–677 (In Russian).
15. Volk A. M. Generalized Gamma-distribution. *Aktual'nyye problemy informatiki: sb. trudov VI Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. 26–30 okt. 1998* [Actual problems of informatics: collection of works of the VI International scientific conference. In 3 parts. Part 2]. Minsk, 1998, pp. 426–432 (In Russian).
16. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. *Odnomernyye nepreryvnyye raspredeleniya* [One-dimensional continuous distributions. In 2 parts. Part 1]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 2010. 703 p. (In Russian).

17. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nyye funktsii: formuly, grafiki, tablitsy* [Special functions: formulas, graphs, tables]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 458 p. (In Russian).
18. Kramer G. *Matematicheskiye metody statistiki: Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh* [Mathematical Methods of Statistics: Basics of modeling and primary data processing]. Moscow, Mir Publ., 1975. 648 p. (In Russian).
19. Lehman E. *Teoriya tochechnogo otsenivaniya* [The theory of point estimation]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. Publ., 1991. 448 p. (In Russian).

Информация об авторе

Волк Анатолий Матвеевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

Information about the author

Volk Anatoliy Matveevich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

Поступила после доработки 17.04.2023

УДК 517.977

А. А. Якименко

Белорусский государственный технологический университет

**МОДАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ
ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ**

В публикации рассматривается задача модальной управляемости для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. Такая задача решена в случае действительных различных корней одного квадратного уравнения, коэффициенты которого выписываются по параметрам исходной системы. В статье получены регуляторы по типу обратной связи, решающие задачу модального управления, как элементарные функции коэффициентов системы в случае кратных корней.

Ключевые слова: запаздывающие системы, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

Для цитирования: Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3.

A. A. Yakimenka

Belarusian State Technological University

**MODAL CONTROLLABILITY OF ONE TWO-DIMENSIONAL
DELAYED SYSTEM IN THE CASE OF MULTIPLE ROOTS**

The publication deals with the problem of modal controllability for a two-dimensional stationary dynamical system with a retarded argument with one input and two commensurate delays. The definition of the modal control problem for the system under study is given. Such a problem is solved in the case of real different roots of one quadratic equation, the coefficients of which are written out according to the parameters of the original system. In the article, feedback controllers are obtained that solve the problem of modal control as elementary functions of the system coefficients in the case of multiple roots.

Keywords: retarded systems, modal control, regulators, feedback control, delay.

For citation: Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in the case of multiple roots. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3 (In Russian).

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Она хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–10] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. В данной работе решается задача модального управления для двумерной стационарной динамической системы с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями. Получены регуляторы по принципу обратной связи, решающие задачу модального управления.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 x(t-2h) + bu(t), \quad (1)$$

где A_j , $j=0, 1, 2$ – постоянные (2×2) -матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – постоянный 2-вектор; u – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b' = (0 \ 1)$ (штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h}] &\equiv \\ &\equiv \lambda^2 + (\alpha_{10} + \alpha_{11} e^{-\lambda h} + \alpha_{12} e^{-2\lambda h}) \lambda + \\ &+ \alpha_{00} + \alpha_{01} e^{-\lambda h} + \alpha_{02} e^{-2\lambda h} + \alpha_{03} e^{-3\lambda h} + \alpha_{04} e^{-4\lambda h}, \quad (2) \end{aligned}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$.

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_0 x(t) + \sum_{j=1}^L q'_j x(t-jh) + \int_{-2h}^0 g'(s)x(t+s)ds, \quad (3)$$

где $L \in \mathbb{N}$, q_{00}, q_{ij} – 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h, 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda) = q'_0 + \sum_{j=1}^L q'_j e^{-jh} + G(\lambda), \quad (4)$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, j = 0, 1, 2, 3, 4$; $i = 1, j = 0, 1, 2$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (ср. с (2)):

$$\det[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h} - bU(\lambda)] \equiv \lambda^2 + (\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12} e^{-2\lambda h})\lambda + \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03} e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04} e^{-4\lambda h}.$$

Пусть

$$\mu_1 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} m + \tilde{\alpha}_{12} m^2; \quad (5)$$

$$\mu_2 = \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} m + \tilde{\alpha}_{02} m^2 + \tilde{\alpha}_{03} m^3 + \tilde{\alpha}_{04} m^4, \quad (6)$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, j = 0, 1, 3, 4$; $i = 1, j = 0, 1, 2$ – произвольные числа. Тогда система (1), замкнутая регулятором, решающим задачу модального управления, имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0. \quad (7)$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига, $A(m) = A_0 + A_1 m + A_2 m^2$. Пусть матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 m & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{21}(m) &= a_{210} + a_{211} m + a_{212} m^2; \\ a_{22}(m) &= a_{220} + a_{221} m + a_{222} m^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, будем искать в виде

$$U(\lambda, m) = [\eta_1(\lambda, m) \quad \eta_2(\lambda, m)]. \quad (9)$$

В работе [10] показано, что если интегральные компоненты регулятора искать в виде

$$c_0 \frac{m-k}{\lambda-\xi},$$

где $k = e^{-\xi h}$, то ξ удовлетворяет уравнению

$$\xi^2 + (b_1 a_1 - 2a_0)\xi + a_0^2 + b_0 a_1^2 - a_0 a_1 b_1 = 0. \quad (10)$$

Дискриминант уравнения (10) имеет вид

$$D = a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0.$$

В работе [10] рассмотрен случай, когда $D > 0$. Предположим теперь, что $D = 0$. Пусть выполнено условие

$$a_1 \neq 0. \quad (11)$$

Тогда из равенства нулю определителя уравнения (10) следует, что

$$b_0 = \frac{b_1^2}{4}.$$

С учетом последнего условия будем считать, что матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 m & \frac{b_1^2}{4} + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix}.$$

Регулятор $U(\lambda, m)$ будем искать в виде

$$U(\lambda, m) = [\eta_1(\lambda, m) - a_{21}(m) \quad \eta_2(\lambda, m) - a_{22}(m)].$$

Замкнутая таким регулятором система (1) будет иметь следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & \frac{b_1^2}{4} + b_1 m + m^2 \\ \eta_1(\lambda, m) & \eta_2(\lambda, m) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(a_0 + a_1 m - \lambda)(\eta_2(\lambda, m) - \lambda) - \left(\frac{b_1^2}{4} + b_1 m + m^2 \right) \eta_1(\lambda, m) = 0.$$

Потребуем, чтобы левая часть последнего равенства была равна левой части равенства (7), и выразим отсюда $\eta_2(\lambda, m)$. Получим

$$\eta_2(\lambda, m) = (4a_1\lambda m + \eta_1(b_1^2 + 4b_1m + 4m^2) + 4a_0\lambda + 4\mu_1\lambda + 4\mu_2) / (4(a_0 + a_1m - \lambda)). \quad (12)$$

Согласно теореме Винера – Пэли, функция $\eta_2(\lambda, m)$ должна быть целой. Другими словами, при тех значениях λ , при которых знаменатель последней дроби равен нулю, ее числитель также должен быть равен нулю. Выразим m из равенства $a_0 + a_1m - \lambda = 0$:

$$m = \frac{\lambda - a_0}{a_1}$$

и подставим в числитель дроби (12), приравненный к нулю. Затем выразим из числителя η_1 :

$$\eta_1 = -\frac{4(-(a_0 - \lambda) + a_0\lambda + \mu_1\lambda + \mu_2)}{b_1^2 - \frac{4b_1(a_0 - \lambda)}{a_1} + \frac{4(a_0 - \lambda)^2}{a_1^2}}.$$

Разложив последнюю дробь на простейшие дроби по переменной λ , получим

$$\eta_1 = -a_1^2 - \frac{a_1^2(-a_1b_1 + 2a_0 + \mu_1)}{\lambda - a_0 + \frac{a_1b_1}{2}} - \frac{a_1^2(a_1^2b_1^2 - 4a_0a_1b_1 + 4a_0^2 + (4a_0 - 2a_1b_1)\mu_1 + 4\mu_2)}{4\left(\lambda - a_0 + \frac{a_1b_1}{2}\right)^2}. \quad (13)$$

Заметим, что $\lambda = a_0 - \frac{a_1b_1}{2}$ является двукратным корнем уравнения (10). Введем обозначение

$$\delta = a_0 + a_1e^{-\xi h} - \xi, \quad (14)$$

где $\xi = a_0 - \frac{a_1b_1}{2}$. Пусть выполнено условие

$$\delta \neq 0. \quad (15)$$

Чтобы η_1 в (13) удовлетворяла условиям теоремы Винера – Пэли, заменим в (13) $\frac{1}{\lambda - \xi}$ на

$$\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta - (a_0 + a_1m - \lambda)}{\lambda - \xi} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{a_0 + a_1k - \xi - a_0 - a_1m + \lambda}{\lambda - \xi} = -\frac{a_1}{\delta} \cdot \frac{m - k}{\lambda - \xi} + \frac{1}{\delta},$$

где $k = e^{-\xi h}$. Заменим $\frac{1}{(\lambda - \xi)^2}$ на

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta - (a_0 + a_1m - \lambda)}{(\lambda - \xi)^2} = \\ & = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{a_0 + a_1k - \xi - a_0 - a_1m + \lambda}{(\lambda - \xi)^2} = \\ & = \frac{1}{\delta} \cdot \left(\frac{-a_1(m - k)}{(\lambda - \xi)^2} + \frac{1}{\lambda - \xi} \right) = \\ & = \frac{-a_1}{\delta} \cdot \left(\frac{(m - k)}{(\lambda - \xi)^2} - \frac{kh}{\lambda - \xi} \right) + \frac{(1 - a_1kh)}{\delta} \cdot \frac{1}{\lambda - \xi} = \\ & = \frac{-a_1}{\delta} \cdot \left(\frac{(m - k)}{(\lambda - \xi)^2} - \frac{kh}{\lambda - \xi} \right) + \\ & + \frac{(1 - a_1kh)}{\delta} \cdot \left(-\frac{a_1}{\delta} \cdot \frac{m - k}{\lambda - \xi} + \frac{1}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Проведя все необходимые преобразования, уравнение (13) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \eta_1(\lambda, m) = & \frac{1}{(2k + b_1)^2} (a_1^3b_1^2hk - 4a_0a_1^2b_1hk + \\ & + 4a_0^2a_1hk + 4a_1hk(a_0 + a_1m)\mu_1 - 4a_1^2k^2 + \\ & + 4a_1hk\mu_2 - 8a_0a_1k - 4a_0^2 - 4(a_0 + a_1m) - 4\mu_2) + \\ & + \frac{m - k}{\left(\lambda - a_0 + \frac{a_1b_1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(2k + b_1)^2} (a_1^3b_1^2hk - \\ & - 4a_0a_1^2b_1hk + 4a_0^2a_1hk + 4a_1hk(a_0 + a_1m)\mu_1 + \\ & + a_1^2b_1^2 + 4a_1^2b_1k + 4a_1hk\mu_2 - 8a_0a_1k - \\ & - 4a_0^2 - 4(a_0 + a_1m)\mu_1 - 4\mu_2) + \frac{1}{2k + a_1b_1} \times \\ & \times \left(\frac{m - k}{\left(\lambda - a_0 + \frac{a_1b_1}{2}\right)^2} - \frac{kh}{\lambda - a_0 + \frac{a_1b_1}{2}} \right) a_1^2 \times \\ & \times (a_1^2b_1^2 - 4a_0a_1b_1 + 4a_0^2 + 4(a_0 + a_1m)\mu_1 + 4\mu_2). \quad (16) \end{aligned}$$

Подставим компоненту регулятора $\eta_1(\lambda, m)$ из (16) в (12) и, выполнив необходимые преобразования, получим

$$\begin{aligned} \eta_2(\lambda, m) = & -\frac{1}{(2k + b_1)^2} (a_1b_1^2hk\mu_1 + 4a_1b_1hkm\mu_1 + \\ & + 4a_1hkm^2\mu_1 + a_1b_1^2m + 4a_1b_1km + 4a_1k^2m + a_0b_1^2 + \\ & + 4a_0b_1k + 4a_0k^2 + 4b_1k\mu_1 - 4b_1m\mu_1 + 4k^2\mu_1 - \\ & - 4m^2\mu_1) - \frac{1}{2(2k + b_1)^2} \cdot \frac{m - k}{\lambda - a_0 + \frac{a_1b_1}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(a_1^3 b_1^3 h k + 2 a_1^3 b_1^2 h k m - 4 a_0 a_1^2 b_1^2 h k - 8 a_0 a_1^2 b_1 h k m - \right. \\
& \quad - 2 a_1^2 b_1^2 h k \mu_1 - 4 a_1^2 b_1 h k m \mu_1 + 4 a_0^2 a_1 b_1 h k + \\
& \quad + 8 a_0^2 a_1 h k m + 4 a_0 a_1 b_1 h k \mu_1 + 8 a_0 a_1 h k m \mu_1 + \\
& \quad + 2 a_1^2 b_1^2 k + 2 a_1^2 b_1^2 m + 8 a_1^2 b_1 h k m + 4 a_1 b_1 h k \mu_2 + \\
& \quad + 8 a_1 h k m \mu_2 + 4 a_0 a_1 b_1^2 - 16 a_0 a_1 k m + 2 a_1 b_1^2 \mu_1 - \\
& \quad - 8 a_1 k m \mu_1 - 8 a_0^2 b_1 - 8 a_0^2 k - 8 a_0^2 m - 8 a_0 b_1 \mu_1 - \\
& \quad - 8 a_0 k \mu_1 - 8 a_0 m \mu_1 - 8 b_1 \mu_2 - 8 k \mu_2 - 8 m \mu_2 \left. \right) + \\
& \quad + \left(\frac{m-k}{\left(\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2} \right)^2} - \frac{k h}{\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2}} \right) \cdot \frac{a_1 (b_1 + 2m)}{4(2k + b_1)} \times \\
& \quad \times (a_1^2 b_1^2 - 4 a_0 a_1 b_1 - 2 a_1 b_1 \mu_1 + 4 a_0^2 + 4 a_0 \mu_1 + 4 \mu_2). \quad (17)
\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение системы (1), замкнутой регуляторами (16), (17), имеет вид

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0,$$

где μ_1, μ_2 определены в (5), (6), то есть регуляторы (16), (17) решают задачу модального управления для системы (1). Таким образом, справедлива теорема.

Для того чтобы система (1) в случае кратных корней уравнения (1) и выполнения условия (11) была модально управляемой, необходимо и достаточно выполнения условия (15). При этом регулятор, решающий задачу модального управления, задается формулами (16), (17).

При переходе от регуляторов в частотной области к регуляторам вида (3) нужно следовать следующим правилам.

1. Слагаемым вида $m^i x_j$ соответствует

$$x_j(t - ih).$$

2. Слагаемым вида $\mu_1 x_j$ соответствует

$$\tilde{\alpha}_{10} x_j(t) + \tilde{\alpha}_{11} x_j(t - h) + \tilde{\alpha}_{12} x_j(t - 2h).$$

3. Слагаемым вида $\mu_2 x_j$ соответствует

$$\tilde{\alpha}_{00} x_j(t) + \tilde{\alpha}_{01} x_j(t - h) + \tilde{\alpha}_{02} x_j(t - 2h) + \tilde{\alpha}_{03} x_j(t - 3h) + \tilde{\alpha}_{04} x_j(t - 4h).$$

4. Слагаемым вида $\frac{m-k}{\lambda-\xi} x_j$ соответствует

$$\int_{-h}^0 H(t+s) H(h+s) e^{-(h+s)\xi} x_j(t+s) ds,$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

5. Слагаемым вида $\left(\frac{m-k}{(\lambda-\xi)^2} - \frac{k h}{\lambda-\xi} \right) x_j$ со-

ответствует

$$\int_{-h}^0 H(t+s) H(h+s) (-h-s) e^{-(h+s)\xi} x_j(t+s) ds.$$

6. Слагаемым вида $m \cdot \frac{m-k}{\lambda-\xi} x_j$ соответ-

ствует

$$\int_{-h}^0 H(t+s) H(h+s) e^{-(h+s)\xi} x_j(t-h+s) ds.$$

7. Слагаемым вида $m \cdot \left(\frac{m-k}{(\lambda-\xi)^2} - \frac{k h}{\lambda-\xi} \right) x_j$

соответствует

$$\int_{-h}^0 H(t+s) H(h+s) (-h-s) e^{-(h+s)\xi} x_j(t-h+s) ds.$$

Заключение. В статье получен способ нахождения регуляторов по принципу обратной связи, решающих задачу модального управления для двумерной системы запаздывающего типа с двумя соизмеримыми запаздываниями и одним входом в случае кратных корней уравнения (10). Указаны дополнительные условия существования таких регуляторов.

Список литературы

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London: Pitman Press, 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. Vol. AC-12, no. 6. P. 660–665.
4. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом. Минск, 1978. 28 с. (Препринт / Акад. наук Белорус. Сов. Социалист. Респ. № 7 (39)).
5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.

6. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.
7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.
8. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.
9. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 5–8.
10. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press Publ., 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.
4. Kirillova F. M., Marchenko V. M. *Funktsional'nyye preobrazovaniyya i nekotoryye kanonicheskiye formy v lineynykh sistemakh s zapazdyvayushchim argumentom* [Functional transforms and some canonical forms for linear retarded systems]. Minsk, 1978. 28 p. Preprint Institute of mathematics AS BSSR, no. 7 (39) (In Russian).
5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.
6. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).
7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).
8. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).
9. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).
10. Yakimenko A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 1 (266), pp. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 18.04.2023

УДК 514.76

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**РЕДУКТИВНЫЕ НЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА,
НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ**

Целью данной работы является описание трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств, не допускающих инвариантных эквиваффинных связностей. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, редуктивное и симметрическое пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиваффинная связность. В основной части работы для трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств, на которых действует неразрешимая группа преобразований, определено, при каких условиях пространство не допускает эквиваффинных связностей. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах. Исследования основаны на применении свойств однородных пространств и структур на них и носят в основном локальный характер. Особенностью представленных методов является использование чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них.

Ключевые слова: эквиваффинная связность, группа преобразований, редуктивное пространство, симметрическое пространство, тензор кручения.

Для цитирования: Можей Н. П. Редуктивные несимметрические пространства, не допускающие эквиваффинных связностей // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 23–26. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-4.

N. P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**REDUCTIVE NON-SYMMETRIC SPACES THAT DO NOT ADMIT
EQUIAFFINE CONNECTIONS**

The purpose of the work is the description of three-dimensional reductive non-symmetric homogeneous spaces that do not admit invariant equiaffine connections. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, reductive and symmetric space, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine connection are defined. In the main part of the work, for three-dimensional reductive non-symmetric homogeneous spaces on which an unsolvable Lie group of transformations acts, it is determined under what conditions the space does not admit equiaffine connections. The results can be used in the study of manifolds, as well as have applications in various fields of mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are connected with the study of in-variant objects on homogeneous spaces. Studies are based on the application of properties of the homogeneous spaces and structures on them and they mainly have local character. The peculiarity of presented techniques is the use of purely algebraic approach to the description of manifolds and connections on them.

Keywords: equiaffine connection, transformation group, reductive space, symmetric space, torsion tensor.

For citation: Mozhey N. P. Reductive non-symmetric spaces that do not admit equiaffine connections. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 23–26. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-4 (In Russian).

Введение. Цель работы – описать редуктивные несимметрические однородные пространства размерности, не допускающие эквиваффинных связностей. В работе исследуется класс однородных пространств аффинной связности с кручением, получивших название «редуктивных», у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения, введенный в рассмотрение П. К. Рашевским [1]. Этот класс интересен, например, тем, что все геодезические на редуктивных простран-

ствах являются однородными. Симметрические пространства – это пространства аффинной связности без кручения, при параллельном переносе у которых сохраняется тензор кривизны. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах независимо изучались П. К. Рашевским, М. Куриной, Э. Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу и др. Аффинная связность является эквиваффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [2]). Сами трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства описаны

в статье [3], в данной работе изучается, при каких условиях такие пространства не допускают эквиаффинных связностей.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$ (см., например, [4]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\bar{\mathfrak{g}}$. Пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\text{ad}(G)$ -инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ (второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна). Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, где σ – инволютивный автоморфизм, такой, что $\sigma(\mathfrak{g}) = s_o \mathfrak{g} s_o^{-1}$, $\mathfrak{g} \in \bar{G}$, s_o – симметрия M , o – неподвижная точка s_o . Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, его собственными значениями являются 1 и -1 , $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для -1 , $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, тогда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Если первых два условия выполняются, а последнее условие нет, то соответствующее однородное пространство является редуктивным, но не является симметрическим.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$ – инвариантным, инвариантные аффинные связности на $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если G эффективна на $\bar{G}/G$ [5]. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность. Тензор кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m;$$

$$R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$. Определим тензор Риччи $\text{Ric} \in \text{Inv}T_2(\mathfrak{m})$: $\text{Ric}(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Бу-

дем говорить, что аффинная связность Λ является локально эквиаффинной, если $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$. Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна.

Под эквиаффинной связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Определим пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n, u_1, u_2, u_3\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \mathfrak{g}$), причем алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \dots, e_n$, а $\{u_1, u_2, u_3\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в источнике [3], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Теорема. Любое трехмерное редуктивное несимметрическое однородное пространство $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такое, что $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой ($\mathfrak{g} \neq \{0\}$), не допускающее эквиаффинных связностей, имеет вид

4.2.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	$(1/2)u_1$	$(1/2)u_2$	u_3
e_2	0	0	$2e_3$	–	u_1	$-u_2$	0
				$2e_4$			
e_3	0	–	0	e_2	0	u_1	0
		$2e_3$					
e_4	0	$2e_4$	$-e_2$	0	u_2	0	0
u_1	–	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
	$(1/2)u_1$						
u_2	–	u_2	–	0	$-u_3$	0	0
	$(1/2)u_2$		u_1				
u_3	$-u_3$	0	0	0	0	0	0

Для доказательства этой теоремы рассмотрим все трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, приведенные в работе [3], и выберем из них пространства, не допускающие эквиаффинных связностей. Пусть, например, локально однородное пространство имеет вид 4.2.2. Поскольку ограничение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Пусть

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (для всех $i, j = 1, 2, 3$). Поскольку отображение является $\mathfrak{g}$ -инвариантным, имеем

$$\begin{aligned} [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] &= \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1), \end{aligned}$$

тогда $p_{1,1} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,1} = p_{3,3} = 0$. Так как

$$\begin{aligned} [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] &= \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow \\ [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] &= (1/2)\Lambda(u_1), \end{aligned}$$

то $p_{1,3} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_2)$, $q_{1,1} = q_{1,2} = q_{1,3} = q_{2,1} = q_{2,2} = q_{2,3} = 0$, $q_{3,1} = -p_{3,2}$, $q_{3,2} = q_{3,3} = 0$. Если $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = 0$, то $r_{1,2} = r_{1,3} = r_{2,1} = 0$, $r_{2,3} = r_{3,1} = r_{3,2} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_3)$, $r_{1,1} = r_{2,2} = r_{3,3} = 0$. Получим, что аффинная связность в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda(u_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda(u_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, p_{3,2} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

тензор кривизны нулевой, тензор кручения –

$$\begin{aligned} T(u_1, u_2) &= (0, 0, 2p_{3,2} - 1); T(u_1, u_3) = (0, 0, 0); \\ T(u_2, u_3) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Тензор Риччи нулевой и, разумеется, является симметрическим. Определяем, при каких значениях параметров $\text{tr} \Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ и $T = 0$ (то есть Λ является связно-

стью без кручения). Тогда локально эквивалентная связность (без кручения) примет вид

$$\begin{aligned} \Lambda(u_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda(u_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь определим, будет ли связность эквивалентной, то есть будет ли $\text{tr} \Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. Поскольку

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $\text{tr} \Lambda(e_1) \neq 0$ и пара не допускает эквивалентных связностей.

Прямыми вычислениями для всех пространств, приведенных в работе [3], получаем, что других трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств неразрешимых групп Ли, не допускающих инвариантных эквивалентных связностей, кроме приведенного в теореме, нет.

Заключение. Таким образом, для всех трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований определено, при каких условиях такое пространство не допускает эквивалентных связностей. Полученные результаты могут найти приложение в общей теории относительности (которая с математической точки зрения базируется на геометрии искривленных пространств), в ядерной физике и физике элементарных частиц (поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах), а также при конструировании математических моделей реальных процессов.

Список литературы

1. Рашевский П. К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1969. № 8. С. 82–92.
2. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.
3. Можей Н. П. Трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2017. № 3 (102). С. 141–148.
4. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995. 384 с.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т.

References

1. Rashevsky P. K. Symmetric spaces of affine connection with torsion. *Trudy seminar po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis], 1969, no 8, pp. 82–92 (In Russian).

2. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.
3. Mozhey N. P. Three-dimensional reductive non-symmetric homogeneous spaces. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya Gomel State University], 2017, no 3 (102), pp. 141–148 (In Russian).
4. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fiz.-mat. lit Publ., 1995. 384 p. (In Russian).
5. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 t.* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 15.04.2023

МЕХАНИКА MECHANICS

УДК 536.24:66.045

Т. Б. Карлович¹, А. О. Карлович², А. Б. Сухоцкий¹, Е. С. Данильчик¹

¹Белорусский государственный технологический университет,

²Белорусский государственный университет

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЙ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКОВ В ШАХТЕ НАД ЭЛЕКТРОПОДОГРЕВАЕМЫМ ОДНОРЯДНЫМ ПУЧКОМ ОРЕБРЕННЫХ ТРУБ

В работе экспериментально и теоретически изучены особенности свободно-конвективного движения воздуха в вытяжной шахте над однорядным пучком оребренных труб. Экспериментально определены зависимости температуры боковой стенки шахты от высоты над поверхностью нагрева. Полученные зависимости аппроксимируются прямой линией в численном моделировании на основе уравнений термогравитационной конвекции, учитывающих среднюю по сечению ненулевую скорость течения воздуха в шахте. Экспериментально исследовано влияние застилающего материала (бумажный и алюминиевый листы) дна шахты на характер движения воздуха. Показано, что существенных отличий от свободного прохода воздуха через пучок оребренных труб не наблюдается, так как процесс во всех случаях протекает для чисел Рэлея, значительно превосходящих критическое значение. Это свойство используется для упрощения граничного условия в теоретической постановке задачи. На основе численного моделирования продемонстрировано, что стационарное состояние системы существует лишь для чисел Рэлея $Ra < 40\,000$. При превышении данного значения реализуются квазипериодические незатухающие колебания температуры и скорости в прямоугольной шахте. Показано, что с ростом числа Пекле происходит стабилизация данных колебаний.

Ключевые слова: свободная конвекция, вытяжная шахта, оребренная труба, приближение Обербека – Буссинеска, уравнение Навье – Стокса, числа Рэлея, Прандтля, Пекле.

Для цитирования: Карлович Т. Б., Карлович А. О., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Сравнение результатов теоретического и экспериментального исследований воздушных потоков в шахте на электроподогреваемым однорядным пучком оребренных труб // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 27–33. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-5.

T. B. Karlovich, A. O. Karlovich, A. B. Sukhotskii, E. S. Danilchik

Belarusian State Technological University

COMPARISON OF THE RESULTS OF THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF AIR FLOWS IN A SHAFT ABOVE AN ELECTRICITY HEATED ONE ROW BUNDLE OF FINNED PIPES

In this paper, the features of free convective air movement in an exhaust shaft above a single row bundle of finned tubes are experimentally and theoretically studied. The dependences of the shaft side wall temperature on the height above the heating surface were experimentally determined. The obtained dependences are approximated by a straight-line in numerical modeling based on the equations of thermogravitational convection, which take into account the nonzero air flow velocity in a mine. The influence of the covering material (paper and aluminum sheets) of the shaft bottom on the nature of air movement was experimentally studied. It is shown that there are no significant differences from the free passage of air through a bundle of finned tubes, since the process in all cases proceeds for Rayleigh numbers that significantly exceed the critical value. This property is used to simplify the boundary condition in the theoretical formulation of the problem. On the basis of numerical simulation, it is shown that the stationary state of the system exists only for Rayleigh numbers $Ra < 40000$. When this value is exceeded, quasi-periodic undamped oscillations of temperature and velocity are realized. It is shown that as the Peclet number increases, these oscillations stabilize.

Keywords: free convection, exhaust shaft, finned tube, Oberbek – Boussinesq approximation, Navier – Stokes equation, Rayleigh, Pandtl, Peclet numbers.

For citation: Karlovich T. B., Karlovich A. O., Sukhotskii A. B., Danil'chik E. S. Comparison of the results of theoretical and experimental investigations of air flows in a shaft above an electricity heated one row bundle of finned pipes. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 27–033. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-5 (In Russian).

Введение. Сопоставление результатов моделирования свободной конвекции в вытяжной шахте над однорядным оребренным пучком труб, подогреваемых за счет подведенной электрической мощности, с экспериментом представляет большой интерес для изучения квазипериодических структур в их зарождении, формировании и эволюции. В работах [1–4] было показано, что конечная скорость течения воздуха в шахте оказывает существенное влияние на формирование конвективных структур и с ее ростом может происходить их разрушение и повышение стабильности течения [4]. Однако поле скорости воздуха в вытяжной шахте не является однородной величиной. В местах просачивания воздуха между ребрами труб возникает эффект «суживающего сопла» и происходит значительное ускорение движения воздушных потоков, скорость которого выравнивается по мере его продвижения в шахте к выходу. Если дно шахты застелить каким-либо материалом, то поток воздуха можно сделать более медленным и равномерным, что дает возможность детальнее изучить поведение воздушных масс и организацию квазипериодических структур, сопровождающихся обратным заходом воздуха в шахту. При этом математическая модель, используемая для описания явления, соответствует модели, используемой в работе [1], т. е. системе уравнений термогравитационной конвекции в приближении Обербека – Буссинеска с учетом конечной скорости течения воздуха внутри шахты в виде постоянной величины.

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой части рассматривается эксперимент, в котором исследуется распределение температуры по высоте стенки шахты в зависимости от подведенной мощности и материала, закрывающего пучок оребренных труб. Во второй части статьи рассматривается соответствующая математическая модель в виде уравнения Навье – Стокса и уравнения теплопроводности, совместное решение которых позволяет определить поля скорости воздушных потоков и температуру воздуха внутри шахты.

Основная часть. Экспериментальная установка представлена на рис. 1. Пучок оребренных труб 2 расположен внутри вытяжной прямоугольной шахты 1 с размерами основания $b \times c = 38 \times 31$ см и высотой $H = 52$ см, выполненной

из фанеры. Внутри каждой из шести оребренных труб однорядного пучка находится ТЭН, за счет которого происходит разогрев воздуха внутри шахты. Для фиксации направления воздушных потоков использована сетка из легких нитей на проволоочном каркасе 5, которая легко перемещается по высоте шахты.

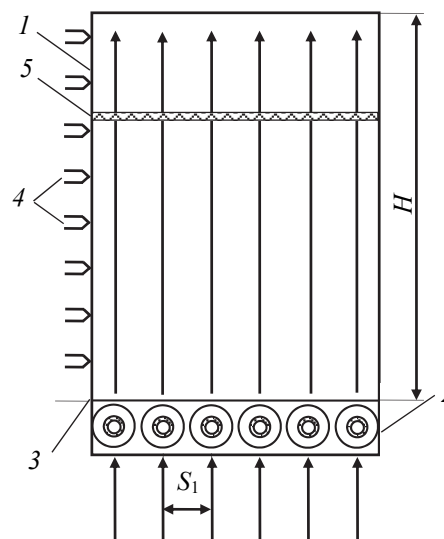


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 – вытяжная шахта из фанеры; 2 – пучок оребренных труб; 3 – материал для перекрытия пучка труб; 4 – термопары; 5 – сетка из легких нитей

Оребренная труба имеет следующие геометрические размеры: наружный диаметр $d = 56$ мм; диаметр трубы по основанию $d_0 = 26,8$ мм; толщина стенки $\delta = 2$ мм; высота ребра $h = 14,6$ мм; шаг ребра $s = 2,5$ мм; средняя толщина ребра $\Delta = 0,5$ мм; длина трубы $l_n = 330$ мм. Поперечный шаг S_1 равен 58 мм. Материал ребристой оболочки – алюминиевый сплав АД1М, материал несущей трубы – углеродистая сталь.

В боковую стенку шахты с равным шагом по высоте 60 мм и начальным отступом 40 мм от пучка оребренных труб вмонтированы 8 медь-константановых термопар 4, заделанных силиконовым герметиком, чтобы не образовывать выступов или неровностей на поверхности, которые могут внести дополнительные возмущения в движение воздуха (рис. 2). В качестве застилаемого материала использованы тонкая бумага (изолятор) и алюминиевый лист (проводник). Размер застилаемого

материала подобран таким образом, чтобы зазоры между стенкой шахты и материалом были минимальными.

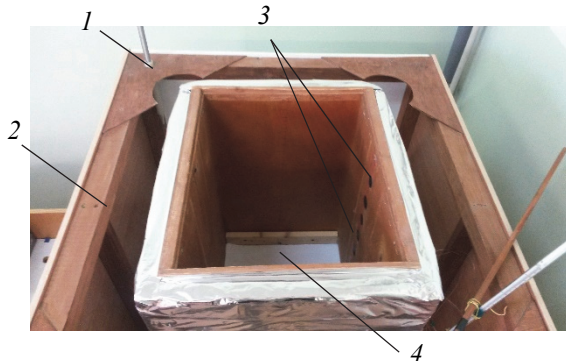


Рис. 2. Вытяжная шахта:

1 – деревянный каркас; 2 – тепловая изоляция; 3 – термопары; 4 – дно шахты с застилаемым материалом над пучком оребренных труб

При нижнем подогреве шахты сначала прогреваются застилаемый материал дна шахты и ее боковые деревянные стенки, а далее происходит разогрев воздуха внутри шахты. Температура воздуха над пучком труб – t_1 , температура воздуха на выходе – t_2 , температурный градиент – $A = (t_1 - t_2) / H$. Нормированное температурное распределение в зависимости от безразмерной высоты над оребренным пучком $z = h / H$, где h – высота над оребренными трубами (рис. 3). Средняя температура окружающего воздуха t_0 составляла 17,5 °С.

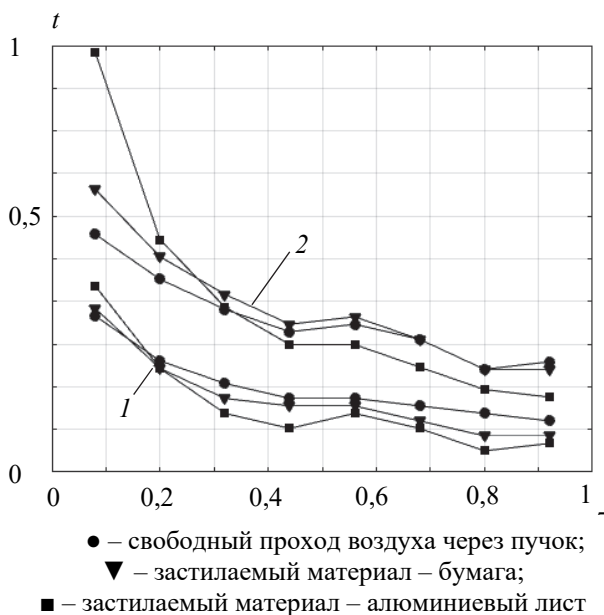


Рис. 3. Графики зависимости температуры боковой стенки шахты от высоты над пучком: 1 – подведенная мощность $W = 4,7$ Вт; 2 – $W = 10,1$ Вт;

Из рис. 3 видно, что наибольший разогрев нижней части стенки шахты происходит при использовании алюминиевого листа, наименьший – при свободном проходе воздуха через оребренный пучок. Температура боковой стенки на выходе из шахты, наоборот, максимальна при свободном проходе воздуха и минимальна при использовании алюминиевого листа. Перекрытие пучка труб листом бумаги приводит к средним значениям температуры на входе и на выходе из шахты. Застилающий материал также способствует уменьшению скорости воздушных потоков внутри шахты без изменения их характера движения.

Таким образом, численное моделирование воздушных потоков в шахте может проводиться на основе более простого граничного условия (плоской границы) вместо сложного ограничения снизу в виде пучка оребренных труб.

Характерные особенности движения воздуха в шахте (направление, амплитуда, периодичность воздушных течений) фиксировались при помощи сетки из легких нитей, которые совершали непрерывные колебания в разных направлениях. Подведенные мощности специально выбирались малыми (4,7 Вт и 10,1 Вт) по сравнению с мощностями, используемыми в работе [5] (90 Вт и 125 Вт), чтобы обнаружить изменения в характерных движениях воздуха. Заметим, что даже такие малые мощности соответствуют числам Рэлея, значительно превышающим критическое число Рэлея $Ra \sim 5300$.

В исследовании выяснилось, что никаких существенных отличий, кроме уменьшения амплитуды колебаний нитей, не обнаружено. Также не наблюдалось какое-либо выраженное стационарное распределение воздушных потоков в объеме шахты.

Для теоретической интерпретации поведения воздуха в шахте рассмотрим двумерную математическую модель задачи в плоскости (x, z) , предполагая, что конвективные структуры в виде валов располагаются в плоскости, перпендикулярной более длинной стороне шахты. Гидродинамическая и тепловая модели для потоков воздуха, дополненные уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости в приближении Обербека – Буссинеска, имеют вид [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} + \mathbf{w} \nabla \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{w} - \beta \theta \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \mathbf{w} \nabla \theta = a \Delta \theta, \\ \nabla \mathbf{w} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_z \mathbf{k}$ – поле скоростей, м/с; τ – время; ρ_0 – средняя плотность окружающего шахту воздуха, кг/м³; p – давление, отсчитываемое

от среднего значения атмосферного давления, Па; ν – кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$; θ – температура, отсчитываемая от средней температуры t_0 – окружающего воздуха, $^\circ\text{C}$; $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$; a – коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$. ∇ – двумерный оператор набла

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}; \quad (2)$$

Δ – двумерный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3)$$

В модели (1) предполагается, что неоднородности плотности воздуха, вызывающие конвекцию, обусловлены в основном изменением температуры воздуха, а не изменением давления:

$$\rho(\theta) = \rho_0(1 - \beta\theta), \quad (4)$$

где β – коэффициент теплового расширения среды, $^\circ\text{C}^{-1}$.

Введя безразмерные переменные (p' , $\mathbf{v}$, τ' , t), нормированные на их характерные значения:

$$p' = \frac{\rho_0 \nu a}{H^2} p; \quad \mathbf{v} = \frac{a}{H} \mathbf{w}; \quad \tau' = \frac{H^2}{\nu} \tau; \quad t = AH\theta \quad (5)$$

и используя числа Прандтля (Pr) и Рэлея (Ra):

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}; \quad \text{Ra} = Ag \frac{\beta H^4}{a\nu}, \quad (6)$$

получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau'} + \frac{1}{\text{Pr}} \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = -\nabla p' + \Delta \mathbf{v} - \text{Ra} t \mathbf{k}, \\ \text{Pr} \frac{\partial t}{\partial \tau'} - \mathbf{v} \mathbf{k} + \mathbf{v} \nabla t = \Delta t, \\ \nabla \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Систему (7) удобно переписать через функции тока ψ и вихря φ , связанных с компонентами безразмерной скорости $\mathbf{v}$ формулами:

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad w_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \varphi = -\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}. \quad (8)$$

Исходя из соотношений (8) связь между вихрем и током можно записать в виде уравнения Пуассона:

$$\Delta \psi = -\varphi. \quad (9)$$

Введение обозначений (8) хотя и повышает порядок производных в уравнениях (7), однако позволяет исключить из них поле давления p' :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau'} + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) &= \Delta \varphi + \text{Ra} \frac{\partial t}{\partial x}, \\ \text{Pr} \frac{\partial t}{\partial \tau'} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial z} \right) &= \Delta t. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия для системы (10) выбирались следующим образом: верхняя и нижняя границы считались свободными, на них горизонтальная компонента скорости обращалась в ноль, а вертикальная равнялась v_0 . Безразмерная температура внизу шахты – максимальна и имеет значение 1, вверху шахты – минимальна и равна нулю. Боковые границы – твердые, на них все компоненты скорости обращаются в ноль. Температурное поле внутри боковой стенки шахты считается линейным, что осуществляется за счет аппроксимации экспериментальных кривых на рис. 3 наклонными прямыми линиями. Тогда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} z=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\text{Pe}, \quad t=1, \\ z=1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\text{Pe}, \quad t=0, \\ x=0, \quad \frac{b}{H}, \quad \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad t=1-z, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\text{Pe} = w_0 H / a$ – число Пекле, характеризующее скорость просачивания воздуха через границу.

Задача (10)–(11) решалась численно в пакете Matlab. Для этого все частные производные заменялись конечно-разностными выражениями на равномерной сетке для всех переменных:

$$\begin{aligned} x_i &= ih_1, \quad i=0, 1, \dots, N; \\ z_k &= kh_2, \quad k=0, 1, \dots, N; \\ \tau'_n &= n\tau_1, \quad n=0, 1, \dots, N_{\tau}, \end{aligned} \quad (12)$$

где h_1 – шаг по горизонтальной оси; h_2 – шаг по вертикальной оси; N – число узлов сетки, изменялось от 16 до 25; τ_1 – шаг по времени. Число шагов по времени N_{τ} выбиралось таким образом, чтобы достичь стационарного состояния (в случае его существования) или режима установившихся колебаний ($N_{\tau} \sim 10\,000$). В результате система уравнений (10) с граничными условиями (11) для ее численного решения приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,k}^{n+1} &= \varphi_{i,k}^n + \tau_1 \left\{ \Delta \varphi_{i,k}^n + \frac{\text{Ra}}{2h_1} (t_{i+1,k}^n - t_{i-1,k}^n) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{4h_1 h_2} [(\psi_{i,k+1}^n - \psi_{i,k-1}^n)(\varphi_{i+1,k}^n - \varphi_{i-1,k}^n) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\psi_{i+1,k}^n - \psi_{i-1,k}^n)(\varphi_{i,k+1}^n - \varphi_{i,k-1}^n) \Big] \Big], \\
& t_{i,k}^{n+1} = t_{i,k}^n + \frac{\tau_1}{Pr} \{ \Delta t_{i,k}^n - \\
& - \frac{1}{4h_1h_2} [(\psi_{i,k+1}^{n+1} - \psi_{i,k-1}^{n+1})(t_{i+1,k}^n - t_{i-1,k}^n) - \\
& - (\psi_{i+1,k}^{n+1} - \psi_{i-1,k}^{n+1})(t_{i,k+1}^n - t_{i,k-1}^n)] \Big], \\
& \Delta \psi_{i,k}^{n+1} = -\varphi_{i,k}^{n+1}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Здесь двумерные лапласианы $\Delta \varphi_{i,k}$, $\Delta t_{i,k}$, $\Delta \psi_{i,k}$ для $q = \varphi, \psi, t$ аппроксимировались формулой

$$\begin{aligned}
\Delta q_{i,k} &= \frac{1}{h_1^2} (q_{i+1,k} - 2q_{i,k} + q_{i-1,k}) + \\
& + \frac{1}{h_2^2} (q_{i,k+1} - 2q_{i,k} + q_{i,k-1}). \quad (14)
\end{aligned}$$

Частные производные в граничных условиях (11) записывались с точностью до второго порядка малости [6] в виде зависимостей:

$$\begin{aligned}
t_{i,N}^n &= 1, \quad \psi_{i,N}^n = -Pe \cdot h_1 i, \\
t_{i,0}^n &= 0, \quad \psi_{i,0}^n = -Pe \cdot h_1 i, \\
\varphi_{i,N}^n &= \frac{-2(Pe \cdot h_1 i + \psi_{i,N-1}^n)}{h_2^2}, \\
\varphi_{i,0}^n &= \frac{-2(Pe \cdot h_1 i + \psi_{i,1}^n)}{h_2^2}, \\
\varphi_{i,N} &= -\frac{2}{h_2^2} \psi_{i,1}, \quad \varphi_{i,N} = -\frac{2}{h_2^2} \psi_{i,N-1}, \\
t_{0,k} &= t_{N,k} = 1 - k/N. \quad (15)
\end{aligned}$$

Уравнение Пуассона для функции тока ψ в формуле (13) решалось методом Либмана. В качестве начального условия выбирался равномерный нижний подогрев и линейное распределение температуры на боковой стенке. Рассматривался надкритический режим с числами Рэлея, превосходящими критическое число Рэлея.

В ходе численного решения в пакете Matlab обнаружилось, что не для всех чисел Рэлея существует стационарное температурное распределение воздуха внутри шахты. Приблизительно со значения $Ra \sim 35\,000$ для воздушных потоков после первоначальных переходных процессов и установившегося состояния (для чисел Рэлея $Ra \sim 35\,000 - 45\,000$ длится несколько секунд) наблюдается возникновение незатухающих квазипериодических синфазных колебаний полей температуры и функции тока. Подобное явление описано в работе [7], рассчитанное число Рэлея для появления незатухающих колебаний в квадратной области составило $Ra \sim 64\,000$.

Также нами исследовалась зависимость квазипериодических колебаний температуры от числа Пекле. Продемонстрировано, что с ростом числа Пекле происходит стабилизация распределения температуры, однако с ростом числа Рэлея процесс стабилизации замедляется. Например, для числа Рэлея $Ra = 40\,000$ и числа Пекле $Pe = 2$ квазипериодические колебания прекращаются и реализуется стабильное состояние. Для числа Рэлея $Ra = 10^6$ колебания температуры существуют в достаточно широком диапазоне чисел Пекле $Pe \sim 0 \div 20$. По мере роста числа Пекле период колебаний возрастает, и для $Pe = 20$ наблюдается стабильное распределение.

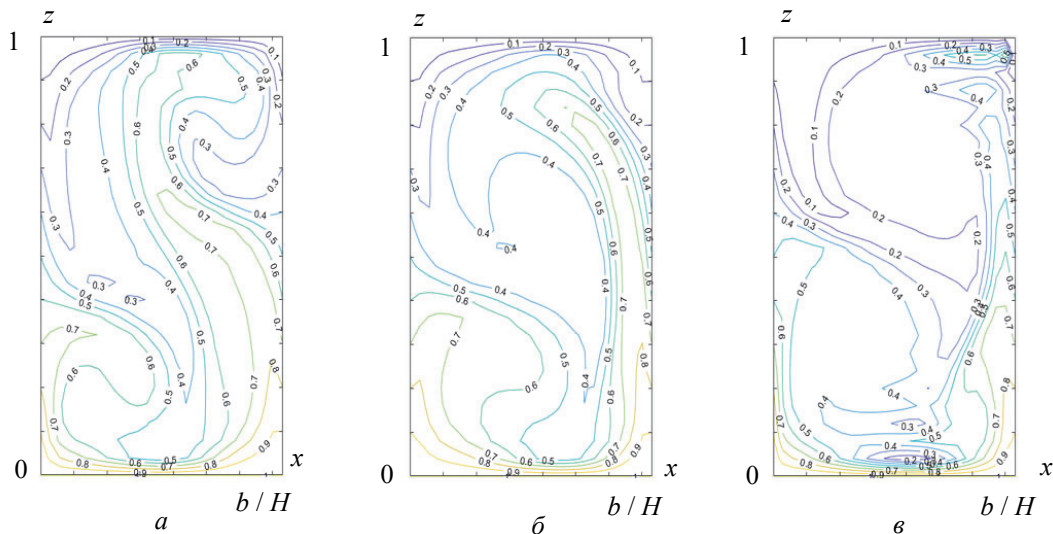


Рис. 4. Квазистационарные распределения безразмерного температурного поля в плоскости xz с числом Рэлея $Ra = 10^6$ для разных значений числа Пекле:

$a - Pe = 0, \tau' = 0,19$ с; $b - Pe = 2, \tau' = 0,16$ с; $v - Pe = 20, \tau' = 0,10$ с

Типичные конфигурации температурного поля для различных чисел Пекле приведены на рис. 4. С ростом числа Пекле происходит заметное расслоение температурного поля на мелкие и более устойчивые структуры (рис. 4, б, в). В стабильном состоянии для числа $Pe = 20$, представленном на рис. 4 в, хорошо заметны два изотермических ядра в верхней и нижней части вытяжной шахты.

Заключение. В работе экспериментально и численно исследованы процессы конвективной неустойчивости в вытяжной шахте над электроподогреваемым пучком оребренных труб. Показано, что температура боковой стенки шахты зависит от материала, который располагается над пучком оребренных труб и служит для более

равномерного по сечению шахты нагрева воздуха. Продемонстрировано, что максимальная разница температур на входе и выходе из шахты имеет место при свободном проходе воздуха через оребренные трубы. При этом характер возникающей конвективной неустойчивости воздушных потоков существенно не меняется. Показано, что внутри шахты может отсутствовать стационарное распределение температурного поля. В этом случае реализуются квазипериодические незатухающие колебания. Продемонстрировано, что с ростом числа Пекле устойчивость системы повышается, квазипериодические колебания исчезают и возникает стабильное тепловое распределение внутри рассматриваемой геометрической области.

Список литературы

1. Карлович Т. Б., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Деформация конвективных ячеек в плоском горизонтальном слое с проницаемыми границами при направленном течении жидкости // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 31–35.
2. Карлович Т. Б., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Конвекция Рэлея – Бенара в вытяжной шахте над однорядным горизонтальным пучком из оребренных труб // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 2 (248). С. 58–64.
3. Шварцблат Д. Л. О спектре возмущений и конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами // ПММ. 1968. Вып. 2. С. 276–281.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 318 с.
5. Карлович Т. Б., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Конвективная неустойчивость воздушных потоков в вытяжной шахте над четырехрядным оребренным пучком // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2021. Т. 57, № 2. С. 242–254.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / пер. с англ. В. А. Гущина, В. Я. Митницкого; под ред. П. И. Чушкина. М.: Наука, 1980. 660 с.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

References

1. Karlovich T. B., Sukhotskii A. B., Danil'chik E. S. Deformation of convective cells in a flat horizontal layer with permeable boundaries under a directional flow of a liquid. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2022, no. 2 (260), pp. 31–35 (In Russian).
2. Karlovich T. B., Sukhotskii A. B., Danil'chik E. S. Rayleigh-Benard convection in an exhaust shaft above a single-row horizontal bundle of finned tubes. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2021, no. 2 (248), pp. 58–64 (In Russian).
3. Shvartsblat D. L. On the spectrum of perturbations and convective instability of a flat horizontal liquid layer with permeable. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1968, issue 2, pp. 276–281 (In Russian).
4. Gershuni G. Z., Zhukhovitskiy E. M., Nepomnyaschiy A. A. *Ustoychivost' konvektivnykh techeniy* [Stability of convective flows]. Moscow, Nauka Publ., 1996. 319 p. (In Russian).
5. Karlovich T. B., Sukhotskii A. B., Danil'chik E. S. Convective instability of air flows in the exhaust shaft above a four-row finned bundle. *Vesti NAN Belarusi. Seriya fiz.-mat. nauk* [Vesti NAS of Belarus], series of physics and mathematics, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 242–254 (In Russian).
6. Roache P. J. Computational fluid dynamics. Hermosa Publ., Albuquerque, 1976. 446 p.
7. Gershuni G. Z., Zhukhovitskiy E. M. *Konvektivnaya ustoychivost' neszhimayemoy zhidkosti* [Convective stability of an incompressible fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 392 p. (In Russian).

Информация об авторах

Карлович Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

Карлович Алексей Олегович – студент механико-математического факультета. Белорусский государственный университет (220050, г. Минск, пр. Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: aleksei.karlovich@gmail.com

Сухоцкий Альберт Борисович – кандидат технических наук, доцент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: alk2905@mail.ru

Данильчик Екатерина Сергеевна – ассистент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: katya.156.156@gmail.com

Information about the authors

Karlovich Tatyana Borisovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Karlovich Aleksei Olegovich – student, faculty of mechanics and mathematics. Belarusian State University. (4, Nezavisimosti Ave, 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: aleksei.karlovich@gmail.com

Sukhotskii Albert Borisovich – PhD (Technical Sciences), Assistant Professor, the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alk2905@mail.ru

Danilchik Ekaterina Sergeevna – Assistant, the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: katya.156.156@gmail.com

Поступила после доработки 13.06.2023

ФИЗИКА PHYSICS

УДК 535.34+541.65

Н. Н. Крук

Белорусский государственный технологический университет

ФЕНОМЕНОЛОГИЯ МНОГОЦЕНТРОВЫХ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ЯДРЕ МАКРОГЕТЕРОЦИКЛИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

В работе представлено феноменологическое рассмотрение факторов, обуславливающих много-центровый характер межмолекулярных взаимодействий в ядре макрогетероциклических соединений, различающихся строением макроцикла и архитектурой его периферического замещения, в конденсированной фазе. Отмечено, что асимметрия молекулярной структуры вносит основной вклад в различие реакционной способности центров одного типа. Обосновано описание состояния молекулярной системы с помощью функции, которая учитывает неэквивалентность реакционных центров и взаимодействие между ними. Для описания состояния ядра макроцикла корролов предложена и успешно апробирована многоцентровая двухпараметрическая модель, учитывающая возможность участия каждого из реакционных центров в двух процессах – протонировании и депротонировании.

Ключевые слова: макрогетероцикл, реакционный центр, межмолекулярные взаимодействия, водородная связь.

Для цитирования: Крук Н. Н. Феноменология многоцентровых межмолекулярных взаимодействий в ядре макрогетероциклических соединений // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 34–39. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-6.

M. M. Kruk

Belarusian State Technological University

PHENOMENOLOGY OF MULTICENTER INTERMOLECULAR INTERACTIONS IN THE CORE OF MACROHETEROCYCLIC COMPOUNDS

The paper presents a phenomenological consideration of the factors that determine the multicenter nature of intermolecular interactions in the core of macroheterocyclic compounds, which differ in the structure of the macrocycle and the architecture of its peripheral substitution, in the condensed phase. It is noted that the asymmetry of the molecular structure makes the main contribution to the difference in the reactivity of centers of the same type. It was substantiated that state of the molecular system can be described with the function which takes into account the nonequivalence of reaction centers and the interaction between them. To describe the state of the core of the corrole macrocycle, a multicenter two-parameter model, which takes into account the possibility of participation of each of the reaction centers in two processes - protonation and deprotonation, was proposed and successfully tested.

Keywords: macroheterocycle, reaction center, intermolecular interactions, hydrogen bond.

For citation: Kruk M. M. Phenomenology of multicenter intermolecular interactions in the core of macroheterocyclic compounds. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 34–39. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-6 (In Russian).

Введение. Анализ и моделирование процессов межмолекулярного взаимодействия в растворах являются одними из важнейших междисциплинарных задач, стоящих перед современной молекулярной физикой, биологической химией, физической химией, физикой наноструктур и статистической термодинамикой. Представления о межмолекулярных

взаимодействиях эволюционировали одновременно с формированием и углублением представлений о строении и физико-химических характеристиках молекулярных систем. В простейшем случае взаимодействующие молекулы (реагенты) рассматриваются либо как материальные точки, либо сферы – черные сферы (рис. 1, а) и подразумевается, что любой контакт двух

реагентов приводит к протеканию некоторого процесса либо реакции. Однако оказалось, что измеренные константы скорости процессов во многих случаях оказываются (существенно) меньше констант скорости диффузионного сближения реагентов. Поэтому предположили наличие некоторой дополнительной стадии, которая лимитирует скорость взаимодействия. Молекулы в этом случае моделируют серыми сферами (рис. 1, б). Такая модель указывает на то, что вероятность протекания реакции при столкновении реагентов заметно ниже 1, но при этом взаимодействовать могут любые точки сферы, т. е. реакция происходит при любой взаимной ориентации реагентов.

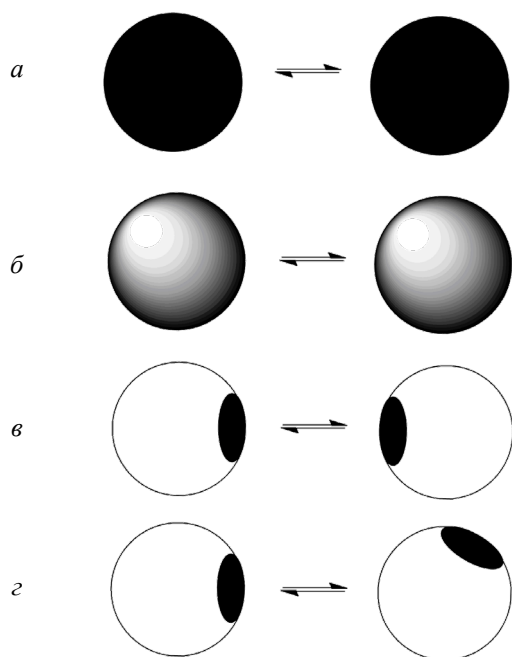


Рис. 1. Схематическое изображение моделей взаимодействия двух одинаковых молекул (см. текст для пояснения)

Открытие клеточного эффекта для межмолекулярных процессов в растворах [1], благодаря которому молекулы находятся на расстоянии, благоприятном для взаимодействия большее время, и имеют возможность повторных контактов, и обнаружение зависимости скорости межмолекулярных взаимодействий от взаимной ориентации реагентов привело к понятию анизотропии реакционной способности молекул. Полагают, что на поверхности сферы, которой моделируется молекула в этом случае, имеется небольшой реакционноспособный фрагмент – реакционный центр. Для того чтобы реакция произошла, требуется, чтобы осуществился контакт двух реакционных центров (рис. 1, в). В пределе, если размеры реагирующих молекул существенно различаются, необходимо, чтобы субстрат в результате диффузионного движения

«обнаружил» реакционный центр в макромолекуле. Если же молекулы контактируют в неблагоприятной ориентации (рис. 1, г), то реакция не происходит. Таким образом, следует говорить о процессах молекулярного распознавания в исследуемых системах, потому что межмолекулярные процессы происходят при взаимодействии отдельных функциональных групп – реакционных центров. В общем виде, если молекула содержит единственный реакционный центр, то ее состояние (способность) к участию в некотором межмолекулярном процессе может быть представлена в виде некоторой однопараметрической зависимости $S = f(x)$.

Свободные основания тетрапиррольных макроциклических соединений (рис. 2) способны к участию в различных межмолекулярных взаимодействиях благодаря наличию: а) аминогрупп пиррольных колец; б) неподеленных электронных пар у иминных атомов азота пирролениновых колец; в) реакционных центров, формируемых периферическими заместителями.

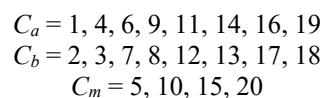
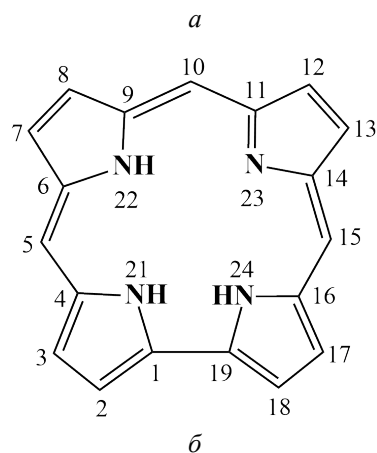
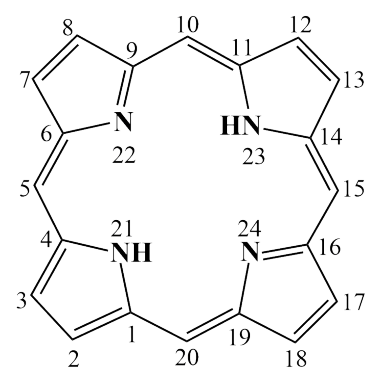


Рис. 2. Молекулярная структура свободных оснований порфирина (а) и корролла (б). Для корролла приведена структура коротковолнового таутомера Т2. Нумерация атомов дана согласно номенклатуре IUPAC

Благодаря симметричному строению макроцикла порфиринов (рис. 2, а) можно было ожидать, что реакционная способность однотипных центров будет одинаковой. Однако реакционные центры оказываются неэквивалентными из-за электронной (структурно-индуцированной электронной) межцентровой коммуникации в макроцикле. Поэтому отклик второго центра, после того как один из них уже провзаимодействовал, будет отличаться. Причем такая коммуникация может либо усиливать реакционную способность второго центра (положительная кооперативность), либо уменьшать ее (отрицательная кооперативность).

Кроме этого, следует отметить, что в конденсированной фазе даже у симметричных (симметрично замещенных) соединений может индуцироваться асимметрия молекулярной конформации. В качестве примеров можно привести существенные отклонения от сферической симметрии распределения электронной плотности атомов углерода в молекуле бензола, относящейся к точечной группе симметрии D_{6h} , в жидком состоянии [2], снижение молекулярной симметрии по механизму Яна – Теллера, которое приводит к снятию вырождения электронных состояний. Поэтому при сольватации у конформационно-подвижных тетрапиррольных макроциклов возможны заметные отклонения от симметричной молекулярной конформации.

Значительно большая асимметрия наблюдается у макроциклических соединений, которые содержат в составе различные гетероциклы либо отличаются типом соединительных мостиков между ними. Так, свободные основания корролов (рис. 2, б) отличаются тем, что два пиррольных фрагмента соединены не метиновыми мостиками, а непосредственно C–C-связью. Симметрия макроцикла корролов существенно снижается по сравнению со свободными основаниями порфиринов. Дополнительным возмущающим фактором в свободных основаниях корролов является наличие в макроциклическом ядре трех протонов, которые не могут разместиться в плоскости сокращенного макроцикла и индуцируют формирование неплоского конформера [3].

В настоящей работе представлено феноменологическое рассмотрение многоцентровых межмолекулярных кислотно-основных взаимодействий в ядре макроцикла корролов. Формальное на первый взгляд феноменологическое рассмотрение имеет эвристическую ценность [4], поскольку позволяет обобщить результаты исследования различных факторов, которые влияют на межмолекулярные взаимодействия и, таким образом, способствует установлению физической сущности их механизмов.

Основная часть. Тетрапиррольные макроциклы являются амфотерными, увеличение кислотности микроокружения (уменьшение pH) приводит к протонированию иминных атомов азота пирролениновых колец, а при уменьшении кислотности (увеличении pH) диссоциируют протоны аминогрупп пиррольных колец. Свободные основания корролов, как было отмечено выше, содержат в ядре макроцикла три протона. Такое состояние макроцикла является неустойчивым и обуславливает выраженные кислотные свойства свободных оснований корролов [5]: один из трех протонов в ядре макроцикла коррола может относительно легко диссоциировать в полярных апротонных растворителях. Установить корреляцию между смещением кислотно-основного равновесия в ядре макроцикла и каким-либо из эмпирических параметров, описывающих основность либо полярность растворителя, не удалось [6].

Если макроцикл свободных оснований порфиринов в отсутствие стерических возмущающих факторов является плоским и при симметричном периферическом замещении оба реакционных центра можно считать эквивалентными, то в случае свободных оснований корролов неплоская конформация тетрапиррольного макроцикла обуславливает различную реакционную способность отдельных пиррольных колец и стабилизация свободного основания будет определяться взаимодействием каждого из пиррольных колец с молекулами микроокружения. Рассмотрение усложняется наличием в растворе двух NH-таутомеров. Однако задача не может быть сведена к анализу двух процессов, протекающих параллельно, поскольку скорость внутримолекулярной NH-таутомеризации существенно выше скорости межмолекулярных взаимодействий [7]. В результате необходимо рассмотреть протолитическое равновесие между депротонированной формой коррола и системой двух находящихся в равновесии NH-таутомеров свободного основания.

Таким образом, рассмотрение отдельных кислотно-основных равновесий четырех различных центров в ядре макроцикла коррола целесообразно заменить рассмотрением взаимодействия четырехцентровой системы, в которой все центры находятся в состоянии термодинамического равновесия, с окружением в сольватной оболочке. Поскольку молекулы растворителя обладают как основными, так и кислотными свойствами (способностью вступать в межмолекулярные взаимодействия выступая либо акцептором, либо донором протона в образовании водородной связи), то свойства растворителя необходимо описывать с помощью двухпараметрической модели. Так, если протонирование макроцикла коррола описать

функцией $f(x)$, а депротонирование – функцией $g(x)$, то стабилизация свободного основания коррола будет определяться их линейной комбинацией. Очевидно, что весовые коэффициенты в линейной комбинации двух функций определяются количеством пиррольных и пирролениновых колец, которые соотносятся как 3 : 1 (в нормированной форме 0,75 : 0,25). Следовательно, функция, определяющая стабилизацию свободного основания коррола, может быть записана в виде $S = 0,75f(x) + 0,25g(x)$. Таким образом, стабилизация свободного основания в результате многоцентрового межмолекулярного взаимодействия при сольватации не зависит в явном виде от строения взаимодействующего NH-таутомера. В то же время дуальная роль молекул растворителя фиксируется в виде двухпараметрической модели.

Каков должен быть вид функций $f(x)$ и $g(x)$? С нашей точки зрения, для назначения обобщенных функций при рассмотрении сольватационных эффектов наиболее приемлемым является использование линейных соотношений сольватационной энергии, введенных Тафтом и др. [8], которые подразумевают, что взаимодействия растворенной молекулы с растворителем разделяются на две группы: а) неспецифические эффекты сольватации, обусловленные биполярным характером либо поляризуемостью партнеров, и б) специфические эффекты, обусловленные формированием межмолекулярных водородных связей. Причем при рассмотрении водородных связей разделяют два случая: а) растворенная молекула является донором в образовании водородной связи, а молекула растворителя – акцептором (англ., HBA – hydrogen bond acceptor), либо б) молекула растворителя является донором в образовании водородной связи (англ., HBD – hydrogen bond donor), а растворенная молекула – акцептором. Рассматриваемые соотношения сольватационной энергии подразумевают линейные соотношения обоих вкладов в наблюдаемые сольватационные эффекты. Исходя из данных соображений в качестве функции $f(x)$ нами выбран параметр Камлета – Тафта α , представляющий собой меру кислотности растворителя (HBD), а в качестве функции $g(x)$ – параметр Камлета – Тафта β , представляющий собой меру основности растворителя (HBA) [9, 10]. Эти функции характеризуют способность растворителя донировать либо акцептировать протон для образования межмолекулярной водородной связи с молекулой растворенного вещества.

Критерием достоверности предложенной функции S является однозначность при описании экспериментальной зависимости состояния ядра макроцикла коррола от свойств растворителя. Анализ представленной на рис. 3 зависимости для 10-(4,6-дихлоропиримидинил)-5,15-

димезитил-коррола указывает на адекватность предложенной модели. При этом следует отметить, что даже небольшие (не превышающие 0,1) изменения относительных весов функций $f(x)$ и $g(x)$ приводят к тому, что однозначность описания исчезает. Это говорит о том, что выбранное соотношение весов 3 : 1 не является формальным подгоночным параметром, а имеет под собой реальную физическую основу, как было указано выше.

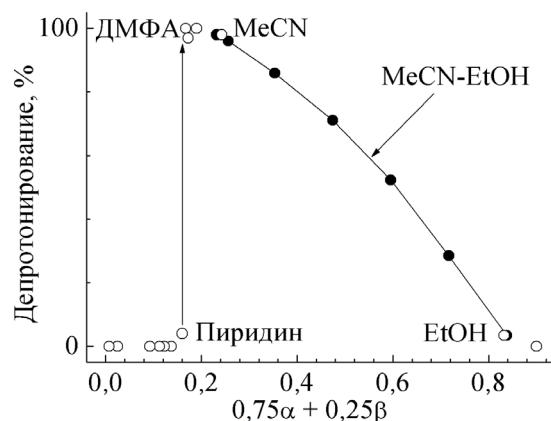


Рис. 3. Доля депротонированных молекул коррола в зависимости от функции $0,75\alpha + 0,25\beta$ для различных растворителей (○) и бинарных смесей MeCN/EtOH (●)

Представленная на рис. 3 зависимость действительно является однозначной, но не монотонной. Однако вид зависимости логично объясняется природой молекул растворителя. В области малых значений функции S сгруппированы апротонные растворители, в области больших значений – протонные. Это дает основания предположить, что быстрое депротонирование ядра макроцикла коррола в узком интервале значений функции $S = 0,16–0,18$, и медленное протонирование при увеличении функции S в диапазоне от 0,85 до 0,25 обусловлены различными причинами. Соответственно, механизмы этих процессов различны. Так, для малополярных апротонных растворителей (бензол, 1,2-дихлорбензол, этилацетат, дихлорметан, диоксан, тетрагидрофуран, пиридин), для которых значение функции S находится в диапазоне от 0,025 (бензол) до 0,160 (пиридин), по-видимому, имеет место слабая неспецифическая сольватация молекулы коррола. Данные растворители не обладают способностью к специфической сольватации отдельных центров в ядре макроцикла коррола.

Значения функции S для пиридина и диметилформамида (ДМФА) близки, однако в пиридине минорное количество молекул коррола депротонируется (не более 4%), а в диметилформамиде доля депротонированных молекул

коррола составляет 96%. Практически полное депротонирование молекул коррола наблюдалось также и в других биполярных апротонных растворителях (диметилсульфоксид, ацетон, ацетонитрил) [6]. Предложено, что переход от неполярных к биполярным апротонным растворителям приводит к скачкообразным изменениям в сольватной оболочке молекулы коррола, и в результате специфической сольватации ядра макроцикла происходит диссоциация одного из протонов [11].

Резкое увеличение вклада параметра α в функцию $S' = \alpha + \beta$ в протонных растворителях (вода, алифатические спирты) приводит к тому, что молекулы полярных протонных растворителей будут участвовать в сольватации ядра макроцикла, в ходе которой присоединяется протон и образуется свободное основание коррола. Доля депротонированных молекул в бинарных смесях ацетонитрил-этанол (MeCN/EtOH) уменьшается при постепенном увеличении объемной доли этанола в смеси (рис. 3). Очевидно, что пропорциональность изменений объемной доли протонного растворителя указывает на неспецифическое взаимодействие протонсодержащих молекул со специфически сольватированным ядром макроцикла. Переход от биполярных апротонных к протонным растворителям отражает, таким образом, константу основности pK_a ядра макроцикла.

Заключение. Таким образом, в работе представлено феноменологическое рассмотрение многоцентровых межмолекулярных взаимодействий в ядре макрогетероциклических соедине-

ний. Обоснована многоцентровая двухпараметрическая модель для объяснения зависимости состояния ядра макроцикла корролов от природы растворителя. Неэквивалентность отдельных реакционных центров и наличие быстрой NH-таутомеризации в ядре макроцикла приводит к необходимости учитывать возможность как протонирования, так и депротонирования. Предложенная модель апробирована при анализе экспериментальной зависимости, обнаруженной ранее для 10-(4,6-дихлоропиримидинил)-5,15-димезитил-коррола, и показано, что модель адекватно описывает экспериментальные результаты. Установлено, что скачкообразное изменение состояния ядра макроцикла при переходе от неполярных апротонных растворителей к биполярным апротонным обусловлено процессами специфической сольватации. В то же время зависимость состояния ядра макроцикла от объемной доли протонного растворителя в бинарном растворе при переходе от биполярных апротонных к протонным растворителям указывает на неспецифическое взаимодействие протонсодержащих молекул со специфически сольватированным ядром макроцикла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция 2025» (подпрограмма «Междисциплинарные исследования и новые зарождающиеся технологии», задание шифр 3.03.10 (НИР 2)) и гранта Президента Республики Беларусь в сфере науки на 2023 г. (Круку Н. Н.).

Список литературы

1. Frank J., Rabinovich E. Some remarks about free radicals and photochemistry of solutions // Trans. Farad. Soc., 1934. Vol. 30, P. 120–130.
2. Experimental determination of deviation from spherical electron densities of atoms in benzene molecules in the liquid state / Y. Kameda [et al.] // Bull. Chem. Soc. Jpn., 2022. Vol. 95, no. 12. P. 1680–1686.
3. Molecular structures and absorption spectra assignment of corrole NH tautomers / W. Beenken [et al.] // Journ. Phys. Chem., A. 2014. Vol. 118, no. 3. P. 862–871.
4. В. Гейзенберг Роль феноменологических теорий в системе теоретической физики // Успехи физических наук. 1967. Т. 91, вып. 4. С. 731–733.
5. How acidic are corroles and why? / A. Mahammed [et al.] // Tetrahedr. Lett. 2003. vol. 44. P. 2077–2079.
6. Solvent-Dependent Deprotonation of meso-Pyrimidinylcorroles: Absorption and Fluorescence Studies / M. M. Kruk [et al.] // J. Phys. Chem., A. 2012. vol. 116, no. 44. P. 10704–10711.
7. Thermochromism of Corrole Solutions in Ethanol / Y. H. Ajeeb [et al.] // Journ. Appl. Spectr. 2019. Vol. 86, no 5. P. 788–794.
8. Linear solvation energy relations / R.W. Taft [et al.] // Journ. Solution Chem. 1985. Vol. 14, no. 3. P. 153–186.
9. Kamlet M. J., Taft R.W. The solvatochromic comparison method. I. The β -scale of solvent hydrogen-bond acceptor (HBA) basicities // J. Am. Chem. Soc. 1976. Vol. 98, no. 2. P. 377–383.
10. Taft R.W., Kamlet M. J. The solvatochromic comparison method. II. The α -scale of solvent hydrogen-bond donor (HBD) acidities // J. Am. Chem. Soc. 1976. Vol. 98, no. 10. P. 2886–2894.
11. Kruk M. M. Solvatochromism of the free base corroles // Journ. Appl. Spectr. 2022. Vol. 89, no 4. P. 624–630.

References

1. Frank J., Rabinovich E. Some remarks about free radicals and photochemistry of solutions. *Trans. Farad. Soc.*, 1934, vol. 30, pp. 120–130.
2. Kameda Y., Kowaguchi M., Amo Y., Usuki T., Okuyama D., Sato T. J. Experimental determination of deviation from spherical electron densities of atoms in benzene molecules in the liquid state. *Bull. Chem. Soc. Jpn.*, 2022, vol. 95, no. 12, pp. 1680–1686.
3. Beenken W., Presselt M., Ngo T. H., Dehaen W., Maes W., Kruk M. M. Molecular structures and absorption spectra assignment of corrole NH tautomers. *Journ. Phys. Chem., A*, 2014, vol. 118, no. 3, pp. 862–871.
4. Heisenberg W. Role of phenomenological theories in the theoretical physics system. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Progress in Physics], 1967, vol. 91, no. 4, pp. 731–733 (In Russian).
5. Mahammed A., Weaver J. J., Gray H. B., Abdela M., Gross Z. How acidic are corroles and why? *Tetrahedr. Lett.*, 2003, vol. 44, pp. 2077–2079.
6. Kruk M. M., Ngo T. H., Savva V. A., Starukhin A. S., Dehaen W., Maes W. Solvent-Dependent Deprotonation of meso-Pyrimidinylcorroles: Absorption and Fluorescence Studies. *J. Phys. Chem., A*, 2012, vol. 116, no. 44, pp. 10704–10711.
7. Ajeeb Y. H., Minchenya A. A., Klimovich P. G., Maes W., Kruk M. M. Thermochromism of Corrole Solutions in Ethanol. *Journ. Appl. Spectr.*, 2019, vol. 86, no. 5, pp. 788–794.
8. Taft R. W., Abboud J.-L. M., Kamlet M. J., Abraham M. H. Linear solvation energy relations. *Journ. Solution Chem.*, 1985, vol. 14, no. 3, pp. 153–186.
9. Kamlet M. J., Taft R. W. The solvatochromic comparison method. I. The β -scale of solvent hydrogen-bond acceptor (HBA) basicities. *J. Am. Chem. Soc.*, 1976, vol. 98, no. 2, pp. 377–383.
10. Taft R. W., Kamlet M. J. The solvatochromic comparison method. II. The α -scale of solvent hydrogen-bond donor (HBD) acidities. *J. Am. Chem. Soc.*, 1976, vol. 98, no. 10, pp. 2886–2894.
11. Kruk M. M. Solvatochromism of the free base corroles. *Journ. Appl. Spectr.*, 2022, vol. 89, no. 4, pp. 624–630.

Информация об авторе

Крук Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: m.kruk@belstu.by

Information about the author

Kruk Mikalai Mikalaevich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m.kruk@belstu.by

Поступила 25.05.2023

УДК 531.19;538.911

И. И. Наркевич, Е. В. Фарафонтова, З. Г. Волосевич

Белорусский государственный технологический университет

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АМПЛИТУДНЫХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК ЭНЕРГИИ ОБРАЗОВАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ
ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ В НАНОРАЗМЕРНЫХ СИСТЕМАХ**

В работе выполнены первые поисковые численные расчеты, которые необходимы для последующей практической реализации идеи о принципиальной возможности сокращенного статистического описании термодинамических (тепловых) флуктуаций в макроскопических и наноразмерных молекулярных системах. Для ее реализации в рамках двухуровневого статистического метода описания свойств неоднородных систем ранее была введена бесконечная цепочка коррелятивных функций для ансамбля взаимодействующих элементарных флуктуаций плотности (ЭФП), которые с определенной вероятностью возникают случайным образом на фоне однородной макроскопической системы с заданными термодинамическими параметрами. Для описания взаимодействия ЭФП между собой и со средой, в которой они спонтанно образуются, с помощью двухуровневого статистического метода рассчитываются их эффективные потенциалы для сферической наночастицы, находящейся внутри термостата с заданными термодинамическими параметрами. Это означает, что наночастица в термостате представляет собой открытую термодинамическую систему, а эффективные потенциалы ЭФП (одиночных, парных и т. д.) для удобства можно рассматривать как энергии их образования в такой системе. Энергии образования одиночных и бинарных ЭФП численно рассчитаны для молекулярной системы с взаимодействием Леннард-Джонса, параметры которой близки к критическим. Это позволит в дальнейшем в результате численного усреднения флуктуаций поля плотности в двух точках внутри сферической наночастицы рассчитать корреляционную функцию $G(r)$ наноразмерной системы, что, понятно, не может быть получено в рамках известной флуктуационной теории, которая детально разработана для макроскопических систем.

Ключевые слова: двухуровневый статистический метод, наносистемы, флуктуации плотности в наночастицах.

Для цитирования: Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В. Статистическое исследование спектральных и амплитудных характеристик энергии образования флуктуаций в наноразмерных системах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 40–46. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-7.

I. I. Narkevich, E. V. Farafontova, Z. G. Volosevich

Belarusian State Technological University

**STATISTICAL RESEARCH OF AMPLITUDE AND SPECTRAL
CHARACTERISTICS OF DENSITY FIELD FLUCTUATIONS FORMATION
ENERGY IN NANOSIMENSIONAL SYSTEMS**

In the study the first exploratory numerical calculations were performed. They are necessary for subsequent practical realization of the possibility idea of principal accelerated statistical thermodynamic fluctuation description for macroscopic and molecular systems. To implement it with the help of two-level statistical approach to inhomogeneous systems properties description before this work was introduced an infinite chain of correlative functions for an interacting elementary density fluctuations (EDF) ensemble. Fluctuations in this model are randomly generated with certain probabilities against the background uniform macroscopic systems with defined thermodynamic parameters. To describe EDF interactions between one another and with environment, in which they are spontaneously generated, with two-level statistical approach their effective potentials are calculated for spheric nanoparticle inside the thermostat with certain thermodynamic parameters. It means, that a nanoparticle inside the thermostat is an open thermodynamic system, and EDF (unary, binary, etc) effective potentials can be considered as their formation energies in such a system. Formation energies of unary and binary EDF are numerically calculated for a molecular system with close-to-critical parameters of Lennard-Jones interaction model. It will make possible further after numerical averaging of density field fluctuations to calculate a $G(r)$ correlative function of nanosimentional system, which evidently cannot be obtained in case of well-known fluctuation theory, designed carefully for macroscopic systems.

Keywords: two-level statistical method, nanosystems, density fluctuation in nanoparticles.

For citation: Narkevich I. I., Farafontova E. V., Volosevich Z. G. Statistical research of amplitude and spectral characteristics of density field fluctuations formation energy in nanosimensional systems. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 40–46. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-7 (In Russian).

Введение. Разработанный ранее двухуровневый статистический метод [1, 2] описания свойств неоднородных молекулярных систем позволяет разработать совершенно новый подход для учета вкладов от тепловых флуктуаций в термодинамические характеристики равновесных систем. Этот подход использует хорошо известную идею о сокращенном статистическом описании систем многих реальных частиц (атомов, молекул и т. д.) для разработки соответствующей теории описания термодинамических флуктуаций поля плотности, созданного системой элементарных флуктуаций плотности (ЭФП), как квазичастиц, которые спонтанно возникают и исчезают на фоне однородного поля плотности равновесной термодинамической системы. Естественно, что они взаимодействуют с этой системой и между собой, образуя полноценный статистический ансамбль квазичастиц, состояние которого описывается соответствующими эффективными потенциалами [3, 4]. Основная особенность этого нового статистического подхода состоит в том, что его можно использовать при изучении флуктуаций как в макроскопических, так и в наноразмерных системах (наночастицах), тогда как широко известные результаты теории флуктуаций [5, 6] относятся фактически к бесконечным системам. В связи с этим в конкретных расчетах этой теории поле параметра порядка разлагается в ряд Фурье по плоским пространственным волнам и выполняется интегрирование по всему бесконечному объему.

В данной работе для наноразмерной системы, которая находится в равновесии с окружающей ее макроскопической системой (термостатом), предлагается описывать флуктуации поля плотности с помощью набора сферических пространственных волн. Их центры совпадают с центрами элементарных ячеек метода условных распределений Ротта [7], на которые мысленно разделяется весь объем неоднородной системы. Двухуровневый статистический метод позволяет рассчитывать термодинамические потенциалы таких неоднородных систем с произвольным полем плотности, которое задано дискретно для всей совокупности элементарных ячеек. В связи с этим появилась возможность рассчитывать эффективные потенциалы одиночных сферических элементарных флуктуаций поля плотности со всевозможными амплитудами и волновыми числами, а также их групп, в частности бинарных флуктуаций с двумя центрами, находящимися на расстоянии r друг от друга. Этого вполне достаточно для того, чтобы

с их помощью можно было выполнить усреднение флуктуаций плотности в двух точках изучаемой системы, которые совпадают с центрами бинарных флуктуаций. Понятно, что это не может быть реализовано в рамках хорошо известной феноменологической флуктуационной теории, в которой с неизбежностью приходится использовать эффективный гамильтониан системы в виде разложения большого термодинамического потенциала Ω по степеням параметра порядка и его первых производных [5].

Таким образом, в рамках двухуровневого статистического метода сформулирована идея о принципиальной возможности реализации сокращенного статистического описания термодинамических флуктуаций с помощью статистического ансамбля взаимодействующих ЭФП, которые возникают случайным образом на фоне однородной макроскопической системы с заданными термодинамическими параметрами. Для этого используется цепочка эффективных потенциалов ($\Psi\{x_i\}$, $\Psi\{x_i, x_j\}$ и так далее), которые, являясь функционалами от соответствующих полей флуктуаций плотности, описывают взаимодействие одиночных ЭФП со средой и друг с другом. В результате большой термодинамический потенциал $\Omega\{\rho_i\}$ неоднородной системы с произвольным флуктуирующим полем плотности ρ_i , которое сформировано с помощью соответствующего ансамбля ЭФП, можно представить в виде разложения по неприводимым эффективным потенциалам Ψ [8]:

$$\Omega\{\rho_i\} = \Omega\{\rho_{cp}\} + \sum_{i=1}^M \Psi\{x_i\} + \sum_{i<j}^M \Psi\{x_i, x_j\} + \sum_{i<j<k}^M \Psi\{x_i, x_j, x_k\}; \quad (1)$$

$$\Psi\{x_i\} = \tilde{\Omega}\{x_i\}; \quad (2)$$

$$\Psi\{x_i, x_j\} = \tilde{\Omega}\{x_i, x_j\} - \tilde{\Omega}\{x_i\} - \tilde{\Omega}\{x_j\}; \quad (3)$$

$$\Psi\{x_i, x_j, x_k\} = \tilde{\Omega}\{x_i, x_j, x_k\} - \tilde{\Omega}\{x_i, x_j\} - \tilde{\Omega}\{x_j, x_k\} - \tilde{\Omega}\{x_i, x_k\}. \quad (4)$$

Здесь $\tilde{\Omega}\{x_i\}$ – флуктуационная часть большого термодинамического потенциала системы с одиночной сферической ЭФП; $\tilde{\Omega}\{x_i, x_j\}$ – аналогичный потенциал системы с двумя ЭФП, которые в соответствии с принципом суперпозиции образуют бинарную флуктуацию с двумя центрами, находящимися на расстоянии r друг от друга.

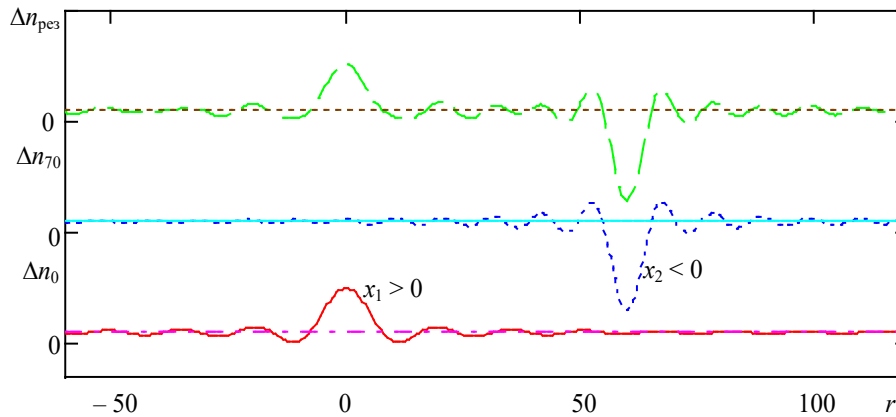


Рис. 1. Профили плотности для двух разноименных элементарных флуктуаций Δn_0 и Δn_{70} и их общий профиль $\Delta n_{\text{pes}} = \Delta n_0 + \Delta n_{70}$

Первое интегро-дифференциальное уравнение для младшей коррелятивной функции $W_1\{x_i\}$, описывающей распределение значений параметров одиночных ЭФП с центрами в различных точках (элементарных ячейках) изучаемой системы, имеет следующий вид [8]:

$$\frac{\partial W_1\{x_i\}}{\partial x_i} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Psi\{x_i\}}{\partial x_i} W_1\{x_i\} + \frac{1}{\theta} \sum_{j \neq i}^M \int \frac{\partial \Psi\{x_i, x_j\}}{\partial x_i} W_2\{x_i, x_j\} dx_j = 0. \quad (5)$$

Для практической реализации идеи о сокращенном описании термодинамических флуктуаций в среде со средней плотностью n_c будем использовать ЭФП в виде сферических волн с различными амплитудами x и волновыми числами k [3]:

$$\Delta n(x, k, r) = n\{\rho_l\} - n_c = x \frac{\sin(kr)}{kr}. \quad (6)$$

В качестве примера на рис. 1 представлены радиальные профили двух одиночных ЭФП с противоположными значениями амплитуд ($x_1 > 0$ и $x_2 < 0$), а также профиль бинарной ЭФП (верхняя кривая), полученной в соответствии с принципом суперпозиции для двух одиночных ЭФП.

Учитывая вышесказанное, отметим также, что в случае наночастицы, имеющей собственную сферическую границу внутри термостата, ее двухточечная, т. е. бинарная корреляционная функция $G(\vec{r})$, будет зависеть не только от модуля радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ между двумя центрами и его ориентации, но и от вектора $\vec{r}_1$.

Основная часть. Численные расчеты выполнены с помощью специальных компьютерных программ, разработанных с использованием системы MathCad, для наночастицы как термодинамической

системы с параметрами в окрестности критической точки жидкость – газ. При этом все величины обезразмерены с помощью линейного и энергетического параметров потенциала Леннард-Джонса. Конкретные расчеты выполнены для сферической наночастицы радиусом $R = 31,4$, что примерно соответствует 15 нанометрам. Она находится в термостате с температурой $\theta = 3,5$ и средней плотностью $\rho = n_c / \omega$ ($n_c = 0,505$ – среднее число заполнения элементарных ячеек простой кубической решетки, ω – объем элементарных ячеек, для которых расстояние между ближайшими центрами $d = 1,096$). Для этих параметров химический потенциал термостата $\mu = -3,05$ при учете взаимодействия каждой молекулы с их первыми и вторыми ближайшими соседями в решетке.

При обсуждении полученных в работе численных результатов потенциалы $\Omega\{x_i\}$ и $\Omega\{x_i, x_j\}$ для одиночных и бинарных ЭФП будем рассматривать в качестве энергий их образования на фоне однородной среды, которые зависят от соответствующих наборов амплитуд и волновых чисел.

На рис. 2–6 изображены амплитудные и спектральные зависимости энергии образования одиночных сферических ЭФП, которые имеют заданные значения амплитуд x (в интервале от минус 0,05 до плюс 0,05) и волновых чисел k ($k \leq 0,4$). Максимальная амплитуда указанного интервала соответствует десяти процентам отклонения плотности среды в центре ЭФП от ее однородного значения в термостате, а волновое число $k = 0,4$ соответствует длине волны $\lambda = 15,7$, которая равна половине радиуса сферической наночастицы.

Амплитудные зависимости энергии образования одиночных ЭФП с заданными значениями волновых чисел k , представленные на рис. 2, демонстрируют монотонное увеличение энергии с увеличением как положительных, так и отрицательных

значений амплитуд, что указывает на все уменьшающуюся вероятность возникновения таких флуктуаций плотности.

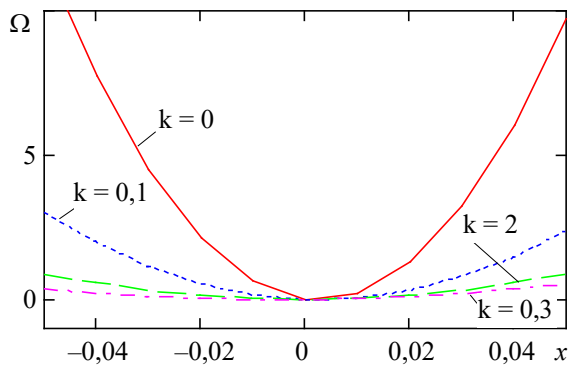


Рис. 2. Амплитудные зависимости энергии образования одиночных ЭФП с заданными значениями волновых чисел k

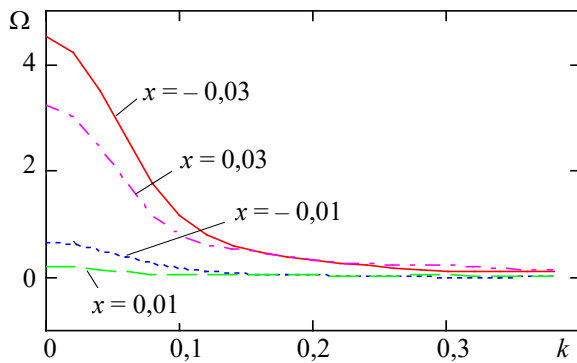


Рис. 3. Спектральные зависимости энергии образования одиночных ЭФП с заданными значениями амплитуд x

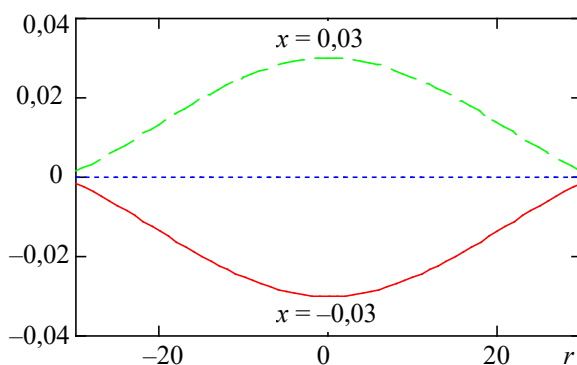


Рис. 4. Радиальные профили ЭФП с противоположными значениями амплитуд x ($x = -0,03$ и $x = 0,03$) в центре наночастицы и волновым числом $k = 0,1$, которое соответствует большим значениям энергии образования флуктуаций

Спектральные зависимости энергии ЭФП с заданными значениями амплитуд, изображенные на

рис. 3, показывают, что энергия их образования постепенно уменьшается с увеличением волновых чисел k (т. е. с уменьшением длины волны λ). Следовательно, вероятность их образования увеличивается, однако область локализации больших значений флуктуаций плотности постепенно уменьшается (рис. 4, 5) и для волнового числа $k = 1,2$ эта область уже сжата до молекулярных размеров (рис. 6). При этом значения отклонений плотности во всем остальном объеме наночастицы стремятся к нулю. Поскольку энергии образования таких ЭФП уменьшаются при увеличении волновых чисел k , то и их вклад в термодинамические характеристики системы постепенно уменьшается.

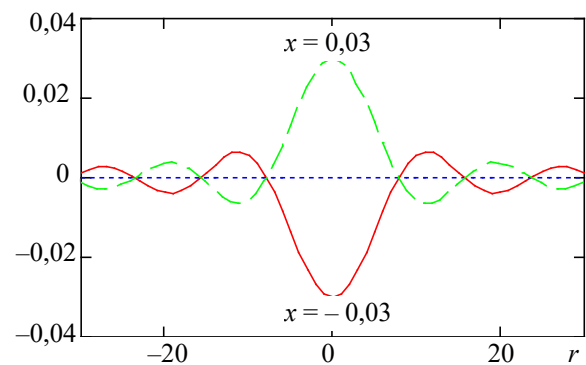


Рис. 5. Радиальные профили ЭФП с противоположными значениями амплитуд x ($x = -0,03$ и $x = 0,03$) в центре наночастицы и волновым числом $k = 0,4$, которое соответствует малым значениям энергии образования флуктуаций

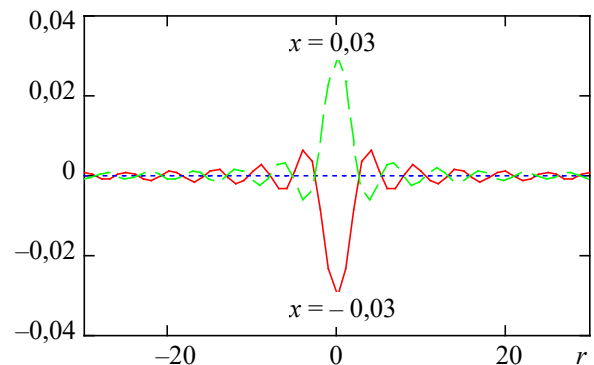


Рис. 6. Радиальные профили ЭФП с противоположными значениями амплитуд x ($x = -0,03$ и $x = 0,03$) в центре наночастицы и волновым числом $k = 1,2$, которое соответствует очень малым значениям энергии образования флуктуаций

На рис. 7, 8 изображены спектральные зависимости энергии образования бинарных ЭФП с расстоянием между их центрами $r = 4$ и противоположными значениями амплитуд x в этих

центрах. Эти энергии являются функциями четырех переменных (двух амплитуд и двух волновых чисел), поэтому на рис. 7, 8 представлены спектры для k_1 и k_2 соответственно при заданных значениях остальных трех переменных.

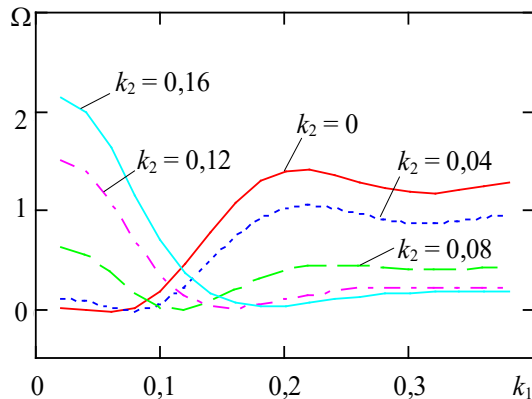


Рис. 7. Спектральные зависимости от волнового числа k_1 для энергии образования бинарных ЭФП с противоположными значениями амплитуд x ($x = -0,02$ и $x = 0,02$) центрами, находящимися на расстоянии $\Delta r = 2$ слева и справа от центра наночастицы и имеющими заданные значения волнового числа k_2

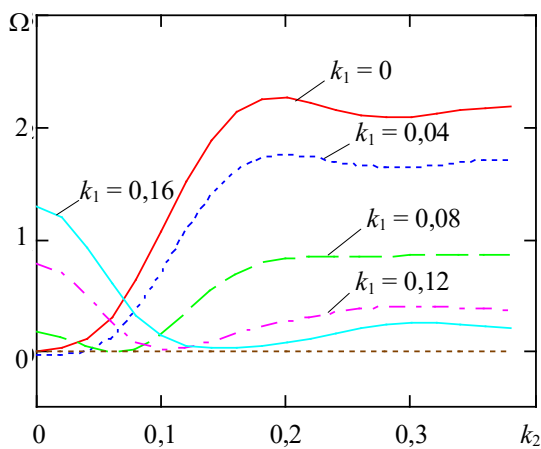


Рис. 8. Спектральные зависимости от волнового числа k_2 для энергии образования бинарных ЭФП с противоположными значениями амплитуд x ($x = -0,02$ и $x = 0,02$) центрами, находящимися на расстоянии $\Delta r = 2$ слева и справа от центра наночастицы и имеющими заданные значения волнового числа k_1

Из рис. 7, 8 видно, что спектры энергии для k_1 и k_2 имеют качественно одинаковый вид. В области относительно малых значений волновых чисел (k_1 и k_2 меньше 0,05) значения энергии бинарных флуктуаций близки к нулю, что связано с «частичным гашением» одиночных флуктуаций противоположных знаков, которые их образуют (рис. 9).

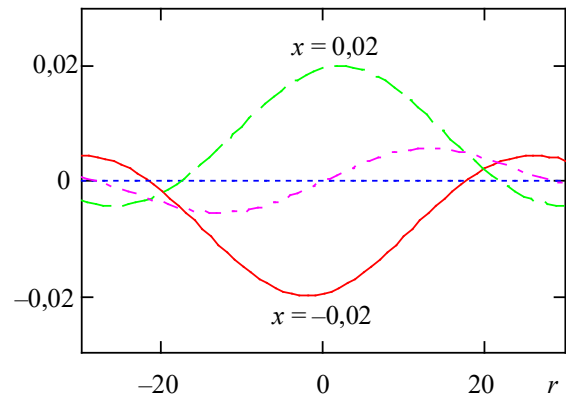


Рис. 9. Радиальные профили двух ЭФП с противоположными значениями амплитуд x ($x = -0,02$ и $x = 0,02$) и центрами, находящимися на расстоянии $\Delta r = 2$ слева и справа от центра наночастицы и имеющими волновые числа $k_1 = k_2 = 0,16$, которые соответствуют практически нулевой энергии образования бинарных ЭФП

Вне этой области энергии бинарных ЭФП с сильно различающимися волновыми числами k_1 и k_2 принимают достаточно большие значения, которые постепенно уменьшаются при их сближении, так что при $k_1 = k_2$ энергия достаточно мала, т. е. снова имеет место «частичное гашение» флуктуаций (рис. 10).

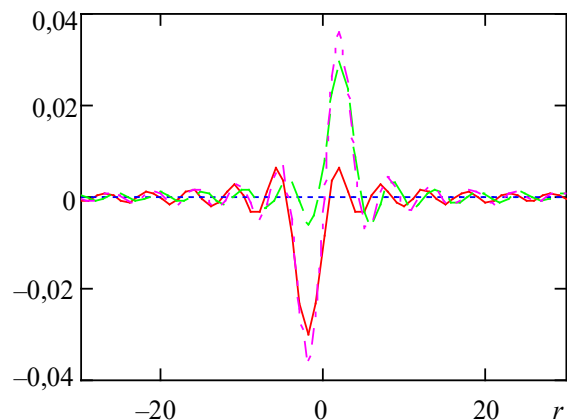


Рис. 10. Радиальные профили двух ЭФП с противоположными значениями амплитуд x ($x = -0,02$ и $x = 0,02$) и центрами, находящимися на расстоянии $\Delta r = 2$ слева и справа от центра наночастицы и имеющими волновые числа $k_1 = k_2 = 0,38$, которые соответствуют практически нулевой энергии образования бинарных ЭФП

На рис. 11, 12 представлены спектральные зависимости энергии образования бинарных ЭФП с расстоянием между их центрами $r = 4$ и одинаковыми значениями амплитуд x в этих центрах. В данном случае происходит взаимное усиление флуктуаций (рис. 13, 14). В силу симметрии полей

таких флуктуаций их спектральные зависимости от k_1 и k_2 одинаковы, а энергия их образования монотонно уменьшается с возрастанием волновых чисел k_1 и k_2 .

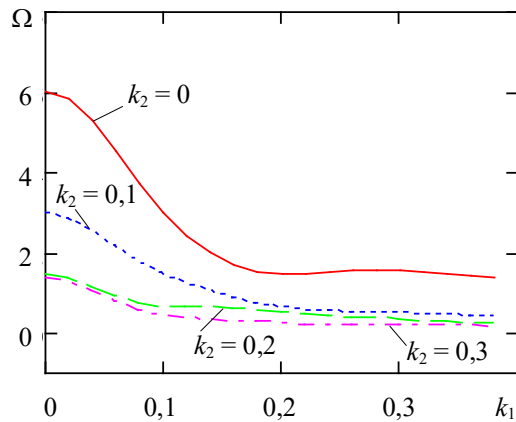


Рис. 11. Спектральные зависимости от волнового числа k_1 для энергии образования бинарных ЭФП с одинаковыми значениями амплитуд $x = 0,02$ и центрами, находящимися на расстоянии $\Delta r = 2$ слева и справа от центра наночастицы и имеющими заданные значения волнового числа k_2

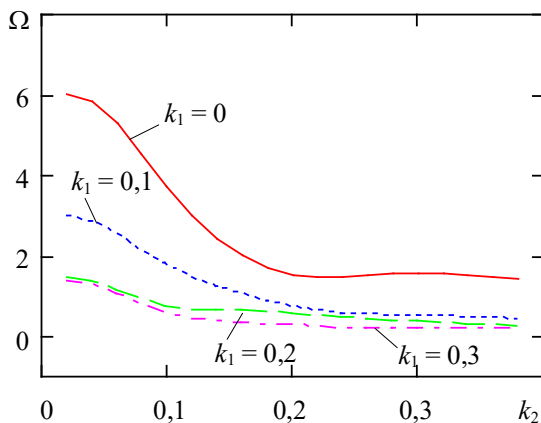


Рис. 12. Спектральные зависимости от волнового числа k_2 для энергии образования бинарных ЭФП с одинаковыми значениями амплитуд $x = 0,02$ и центрами, находящимися на расстоянии $\Delta r = 2$ слева и справа от центра наночастицы и имеющими заданные значения волнового числа k_1

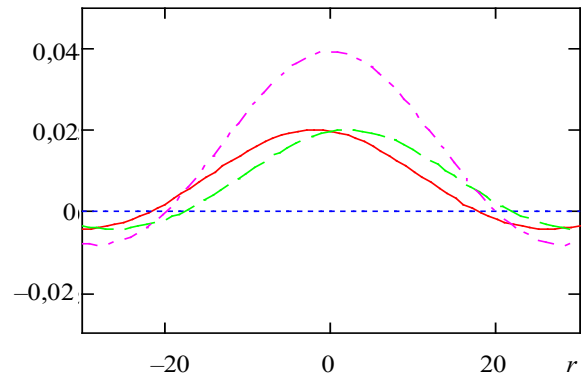


Рис. 13. Радиальные профили двух ЭФП с одинаковыми значениями амплитуд $x = 0,02$ и центрами, находящимися на расстоянии $\Delta r = 2$ слева и справа от центра наночастицы и имеющими волновые числа $k_1 = k_2 = 0,16$

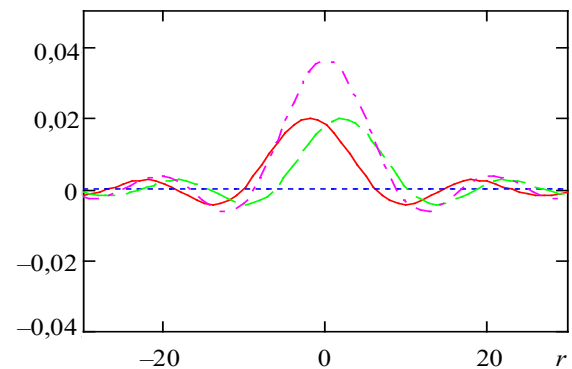


Рис. 14. Радиальные профили двух ЭФП с одинаковыми значениями амплитуд $x = 0,02$ и центрами, находящимися на расстоянии $\Delta r = 2$ слева и справа от центра наночастицы и имеющими волновые числа $k_1 = k_2 = 0,38$

Заключение. Выполненные в работе численные расчеты показали, что сформулированная ранее идея о принципиальной возможности сокращенного статистического описания флуктуаций поля плотности может быть практически реализована при исследовании вкладов тепловых флуктуаций в термодинамические характеристики наноразмерных систем, что, в принципе, невозможно сделать известными из литературы методами.

Список литературы

1. Narkevich I. Statistical theory of nonuniform systems and reduced description in the density fluctuation theory // *Physica*. 1982. Vol. 112 A. P. 167–192.
2. Наркевич И. И. Двухуровневый статистический метод описания неоднородных систем. Ч. 1. Симбиоз методов коррелятивных функций и термодинамических функционалов плотности: монография. Нордерштедт: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2019. 114 с.
3. Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В. Практическая реализация идеи о сокращенном описании флуктуаций поля плотности с помощью двухуровневого статистического метода // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика*. 2022. № 2 (260). С. 49–54.
4. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Two-level statistical description of structure of homogeneous macroscopic system and spherical crystalline nanoparticles // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2019. No. 10 (4). P. 365–376.

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика: в 2 ч. М.: Наука. 1987. Ч. 1. 586 с.
6. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. 382 с.
7. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979. 280 с.
8. Наркевич И. И. Сокращенное описание неоднородных систем на основе условных пространственных корреляционных функций плотности // Известия АН БССР, серия физико-математических наук. 1980. № 5. С. 107–112.

References

1. Narkevich I. Statistical theory of nonuniform systems and reduced description in the density fluctuation theory. *Physica*, 1982, no 112 A, pp. 167–192.
2. Narkevich I. I. *Dvukhurovnevyy statisticheskiy metod opisaniya neodnorodnykh sistem. Simbioz metodov korrelyativnykh funktsiy i termodinamicheskikh funktsionalov plotnosti* [Two-level statistical method for describing heterogeneous systems. Symbiosis of methods of correlative functions and thermodynamic functionals of density]. Norderstedt, LAP LAMBERT Academic Publishing RU Publ., 2019. 114 p. (In Russian).
3. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Practical implementation of the idea of a reduced description of density field fluctuations using a two-level statistical method. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2022, no. 2, pp. 49–54 (In Russian).
4. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Two-level statistical description of structure of homogeneous macroscopic system and spherical crystalline nanoparticles. *Nanoscience and Technology: International Journal*, 2019, no. 10 (4), pp. 365–376.
5. Landau L. D., Lifshits E. M. *Statisticheskaya fizika* [Statistical physics: in 2 part], Moscow, Nauka Publ., 1987. Part 1. 586 p. (In Russian).
6. Patashinsky A. Z., Pokrovsky V. L. *Fluktuatsionnaya teoriya fazovykh perekhodov* [Fluctuation theory of phase transitions]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 382 p. (In Russian).
7. Rott L. A. *Statisticheskaya teoriya molekulyarnykh sistem* [Statistical theory of molecular systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p. (In Russian).
8. Narkevich I. I. Abbreviated description of inhomogeneous systems based on conditional spatial density correlation functions. *Izvestiya AN BSSR* [News of the Academy of Sciences of the BSSR], series of physical and athematical sciences, 1980, no 5, pp. 107–112 (In Russian).

Информация об авторах

Наркевич Иван Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: narkevich@belstu.by

Фарафонтова Елена Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: farafontova@belstu.by

Волосевич Злата Геннадьевна – студентка. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь)

Information about the authors

Narkevich Ivan Ivanovich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: narkevich@belstu.by

Farafontova Elena Valer'yevna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: farafontova@belstu.by

Volosevich Zlata Gennadievna – student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus)

Поступила 20.04.2023

УДК 531.19;538.911

Е. В. Фарафонтова, И. И. Наркевич, В. А. Язёнок
Белорусский государственный технологический университет

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ АДсорбЦИИ НА СФЕРИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦАХ ОТ ИХ РАЗМЕРОВ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Для статистического описания зависимости адсорбции из газовой фазы от температуры и размера сферических наночастиц используется ранее полученная замкнутая система интегральных и алгебраических уравнений, описывающая структурные и термодинамические характеристики неоднородных (гетерогенных) молекулярных систем. Она получена в рамках двухуровневого статистического метода, который основывается на совместном использовании метода коррелятивных функций Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ), метода условных коррелятивных функций Ротта и метода термодинамических функционалов плотности. В результате установлена связь между макроскопическими характеристиками кристаллических наночастиц и микроскопическими параметрами системы взаимодействующих частиц (атомов или молекул) при температуре ниже температуры тройной точки.

В области фазового перехода «кристаллическая наночастица – газообразная среда» радиальный профиль плотности аппроксимируется с помощью трехпараметрической функции, содержащей гиперболический тангенс. Один параметр определяет числа заполнения для однородной жидкой либо газообразной среды, которая находится в равновесии с кристаллической сферической наночастицей, а два других являются вариационными параметрами при решении вариационной задачи по отысканию минимума большого термодинамического потенциала гетерогенной системы.

Двухуровневый статистический метод позволил получить выражение для большого термодинамического потенциала, который является функционалом искомого поля плотности. В результате варьирования этого потенциала, рассчитаны характеристики адсорбированного вещества из газовой фазы на наночастицах разных размеров. Прослежено радиальное смещение узлов ГЦК решетки вблизи границ наночастиц, что дало возможность приступить к описанию зависимости адсорбции из газовой фазы от температуры.

Ключевые слова: двухуровневый статистический метод, наночастица, поле плотности, вариационный метод, гетерогенная система, адсорбция на наночастицах.

Для цитирования: Фарафонтова Е. В., Наркевич И. И., Язёнок В. А. Статистическое исследование зависимостей адсорбции на сферических наночастицах от их размеров и температуры // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 47–52. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-8.

E. V. Farafontova, I. I. Narkevich, V. A. Yazenok
Belarusian State Technological University

STATISTICAL DESCRIPTION OF ADSORPTION ON SPHERICAL NANOPARTICLES FROM THEIR DIMENSIONS AND TEMPERATURE

For a statistical description of the of adsorption dependence from the gas phase on the temperature and dimensions of spherical nanoparticles, is used the previously obtained closed system of integral and algebraic equations, which describes the structural and thermodynamic characteristics of unhomogeneous (heterogeneous) molecular systems. It was obtained in with of a two-level statistical method, which is based on the joint use of the Bogolyubov – Born – Green – Kirkwood – Yvon (BBGKI) correlative functions method, the Rott conditional correlative functions method and the thermodynamic density functionals method. As a result, a relationship has been established between the macroscopic characteristics of crystalline nanoparticles and the microscopic parameters of a system of interacting particles (atoms or molecules) at temperatures below the triple point temperature.

In the region of the “crystalline nanoparticle – gaseous medium” phase transition, the radial density profile is approximated using a three-parameter function containing a hyperbolic tangent. One parameter determines the occupation numbers for a homogeneous liquid or gaseous medium, which is in equilibrium with a crystalline spherical nanoparticle, and the other two are variational parameters in solving the variational problem of finding the large thermodynamic potential minimum of a heterogeneous system.

The two-level statistical method made it possible to obtain an expression for a large thermodynamic potential, which is a functional of the desired density field. As a result of varying this potential,

calculations were made for the amount of adsorbed substance from the gas phase on nanoparticles of different sizes, it was possible to follow the radial displacement of the fcc-lattice sites near their boundaries, and proceed to describe the dependence of adsorption from the gas phase on temperature.

Keywords: two-level statistical method, nanoparticle, density field, variation method, heterogeneous system, adsorption on nanoparticles.

For citation: Farafontova E. V. Narkevich I. I., Yazenok V. A. Statistical description of adsorption on spherical nanoparticles from their dimensions and temperature. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 47–52. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-8 (In Russian).

Введение. Для описания равновесных неоднородных конденсированных систем был разработан двухуровневый статистический метод [1], который базируется на совместном использовании трех методов: метода коррелятивных функций Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ), метода условных коррелятивных функций Ротта [2] и метода функционалов плотности. Разработанный двухуровневый статистический метод позволил замкнуть цепочку интегро-дифференциальных уравнений для коррелятивных функций и решить вопрос о способе нормировки этих функций для неоднородных многокомпонентных систем. В результате было получено статистическое выражение для большого термодинамического потенциала Ω , который описывает равновесные характеристики таких систем.

В разработанном подходе весь объем V системы мысленно разделен на микроячейки объемом ω_i ($i = 1, 2, \dots, M$). Эти ячейки среды имеют внутреннюю микроструктуру, которая описывается с помощью коррелятивных функций $\hat{F}_{11}$ распределения молекул (или атомов) внутри этих микроячеек. Макроскопическая структура всей системы описывается совокупностью всех чисел заполнения n_i микроячеек молекулами, которая определяет искомое равновесное поле плотности неоднородной системы ($\rho_i = n_i / \omega_i$). Следует отметить, что микроячейки условных распределений образуют реальную решетку для кристаллического состояния вещества и гипотетическую решетку для жидкости или газа. В результате вблизи границы кристаллической наночастицы удалось обнаружить пространственную релаксацию параметров кристаллической решетки, т. е. форма и размеры ячеек претерпевают существенные изменения [3].

Замкнутая система интегральных уравнений для потенциалов ϕ_{ij} средних сил, полученная в рамках двухуровневого статистического метода, решалась численно методом итераций с помощью разработанной компьютерной программы в системе Mathcad. Эти потенциалы описывают взаимодействие произвольной выделенной молекулы неоднородной среды в микроячейке ω_i с другими молекулами, которые статистически распределены в соседних микроячейках объемами ω_j [4]. Общая система интегральных и

алгебраических уравнений была предварительно преобразована для описания гетерогенной системы «кристаллическая наночастица в однородной газообразной среде», и методика преобразований подробно изложена в работах [3, 5, 6].

Наличие статистического выражения для большого термодинамического потенциала $\Omega\{n_i\} = F\{n_i\} - \mu \sum n_i$ как функционала искомого поля плотности чисел заполнения n_i микроячеек позволило в результате его варьирования более детально исследовать пространственную релаксацию параметров ГЦК решетки вблизи границ наночастиц, провести расчеты по определению величины адсорбированного вещества на наночастицах разных размеров, а также изучить зависимость адсорбции из газовой фазы от температуры.

1. Статистический расчет поля плотности чисел заполнения микроячеек системы в окрестности кристаллической наночастицы. Так как кристаллическая наночастица имеет симметричную сферическую форму, то поле плотности зависит только от радиусов r_p координатных сфер с номерами p относительно центра наночастицы ($p = 1, 2, \dots, P$). Для отыскания радиального профиля чисел заполнения $n(r_p)$ для газообразной молекулярной системы используем выражение, которое аппроксимируем с помощью трехпараметрической функции, содержащей гиперболический тангенс [2, 3, 6, 7], т. е.

$$n(r_p) = n_x - (n_x - n_\infty) \operatorname{th}\{\kappa(r - r_{\text{nano}})\}, \quad p > p_{\text{nano}}.$$

Здесь n_x и κ – вариационные параметры теории; третий параметр n_∞ определяет значения чисел заполнения для однородной жидкой либо газовой среды, находящейся в равновесии с исследуемой кристаллической наночастицей; r_{nano} – радиус наночастицы, соответствующий номеру p_{nano} на границе кристаллической наночастицы.

В численных расчетах значения радиусов r_p координатных сфер приведены в единицах линейного параметра σ потенциала Леннарда-Джонса, а температура θ определена в единицах энергетического параметра ε этого же потенциала.

Структура сферической кристаллической наночастицы и окружающей ее среды с неоднородным

радиальным профилем плотности описывается дискретными наборами чисел заполнения n_p , среднеквадратичных отклонений σ_p ($\sigma_p = \sqrt{3/5}b_p$) молекул от центров ячеек и радиусов b_p сфер, внутри которых нормированные унарные функции $\hat{F}_{11}$ распределения молекул считаются постоянными.

Минимум функционала $\Omega\{n_p\}$ с профилем вида вышеуказанной формулы определялся численно для разных заданных значений параметра κ при изменении параметра n_x от 0 до 0,1.

Для примера на рис. 1 приведены зависимости большого термодинамического потенциала $\Omega\{n_p\}$ от параметра n_x при трех заданных разных значениях параметра κ . Расчеты проведены для наночастицы диаметром порядка $d = 2,36$ нм, что соответствует наночастице, состоящей из $p_{nano} = 10$ координационных сфер, и температуре $\theta = 0,5$, которая ниже, чем температура тройной точки простых молекулярных систем.

На рис. 1 показано, что абсолютный минимум функционала $\Omega\{n_p\}$ при данной температуре реализуется при значениях $\kappa \approx 4,5$ и $n_x \approx 0,064$, что соответствует равновесному состоянию термодинамической системы. Результаты расчетов изотермических профилей структурных характеристик сферической наночастицы, находящейся в равновесии с окружающей ее газовой средой, представлены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что на границе кристаллической наночастицы с числами заполнения ячеек $n_p \approx 0,999$ образуется адсорбционный газобразный слой с повышенными значениями плотности. В объеме кристаллической наночастицы наблюдается пространственная релаксация параметров ГЦК решетки, о чем свидетельствует увеличение среднеквадратичных отклонений σ_p молекул от центров ячеек (узлов решетки) при приближении к границе наночастицы, т. е. при увеличении номера p координационной сферы.

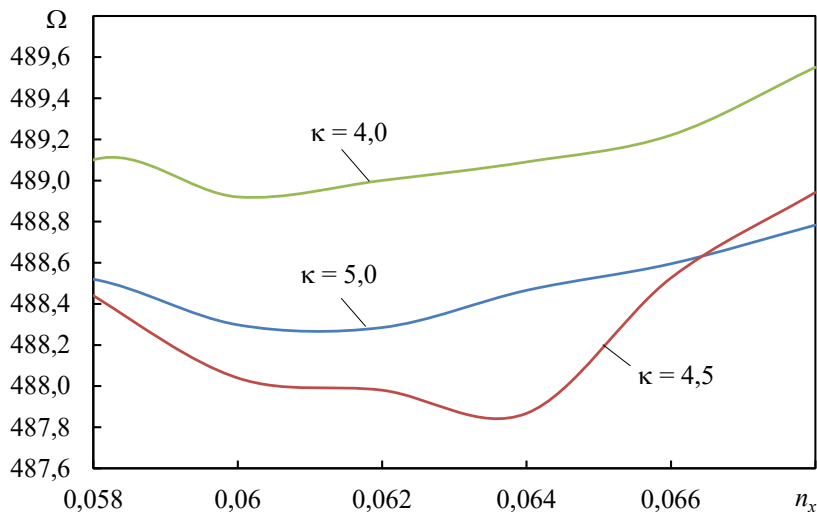


Рис. 1. Зависимости большого термодинамического потенциала Ω при температуре $\theta = 0,5$ от вариационного параметра n_x при разных значениях параметра κ

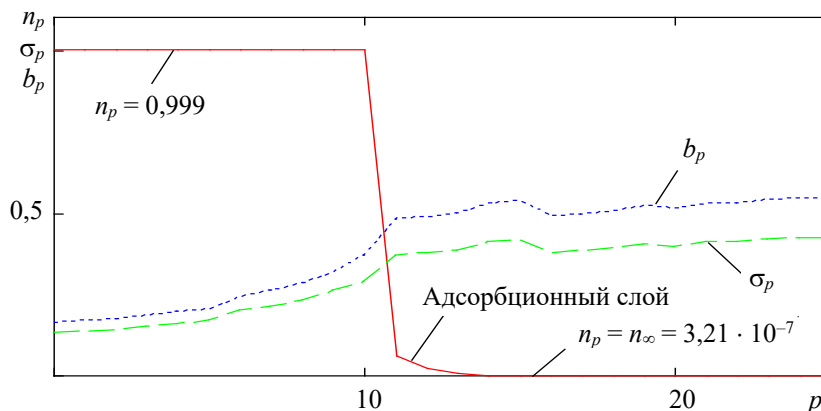


Рис. 2. Зависимости плотности n_p , среднеквадратичных отклонений σ_p и радиусов b_p сфер от номеров p координационных сфер гетерогенной системы

Микроструктура наночастицы и адсорбционного слоя описывается с помощью унарных функций $\hat{F}_{11}$ распределения молекул в окрестности узлов деформированной ГЦК решетки. На рис. 3 представлены радиальные профили функций $\hat{F}_{11}$ для разных значений номеров p координационных сфер гетерогенной системы в равновесном состоянии.

Первые четыре профиля при $p = 0, 5, 8, 10$ описывают микрораспределения молекул, образующих кристаллическую наночастицу ($p_{nano} = 10$ – ее граница), а профиль при $p = 14$ описывает распределение молекул в микроячейках, относящихся к координационным сферам адсорбционного слоя. При $p = 20$ наблюдается делокализованное квазикристаллическое распределение молекул по всему объему микроячеек, а при $p = 25$ функция распределения имеет уже постоянное значение, что соответствует однородной газовой фазе.

2. Исследование адсорбции из газовой фазы на кристаллической наночастице с учетом пространственной релаксации параметров решетки. Рассчитанные равновесные поля плотности гетерогенной системы при температуре

ниже тройной точки ($\theta_{tr} = 0,6$) позволили определить поверхностную плотность $\rho_s = N_a/S$ адсорбированных молекул на поверхностях наночастиц разных размеров (N_a – число адсорбированных молекул, S – площадь сферической поверхности наночастицы с радиусом r_{nano}).

На рис. 4 сплошными линиями изображены рассчитанные зависимости поверхностной плотности ρ_s и числа N_a адсорбированных молекул от радиуса r_{nano} при температуре $\theta = 0,6$. Из рисунка видно, что с увеличением радиуса r_{nano} наночастицы число частиц в адсорбционном слое, а следовательно, и поверхностная плотность ρ_s адсорбированных молекул монотонно возрастают. Однако есть основания предполагать, что при значительном увеличении радиуса r_{nano} поверхностная плотность ρ_s будет приближаться к своему максимальному значению, соответствующему адсорбции на плоской границе раздела фаз.

На рис. 5 приведены результаты расчетов поверхностной плотности адсорбированных молекул из газовой фазы вещества на поверхности кристаллической наночастицы диаметром $d = 2,36$ нм при температурах $\theta = 0,4; 0,5; 0,6$.

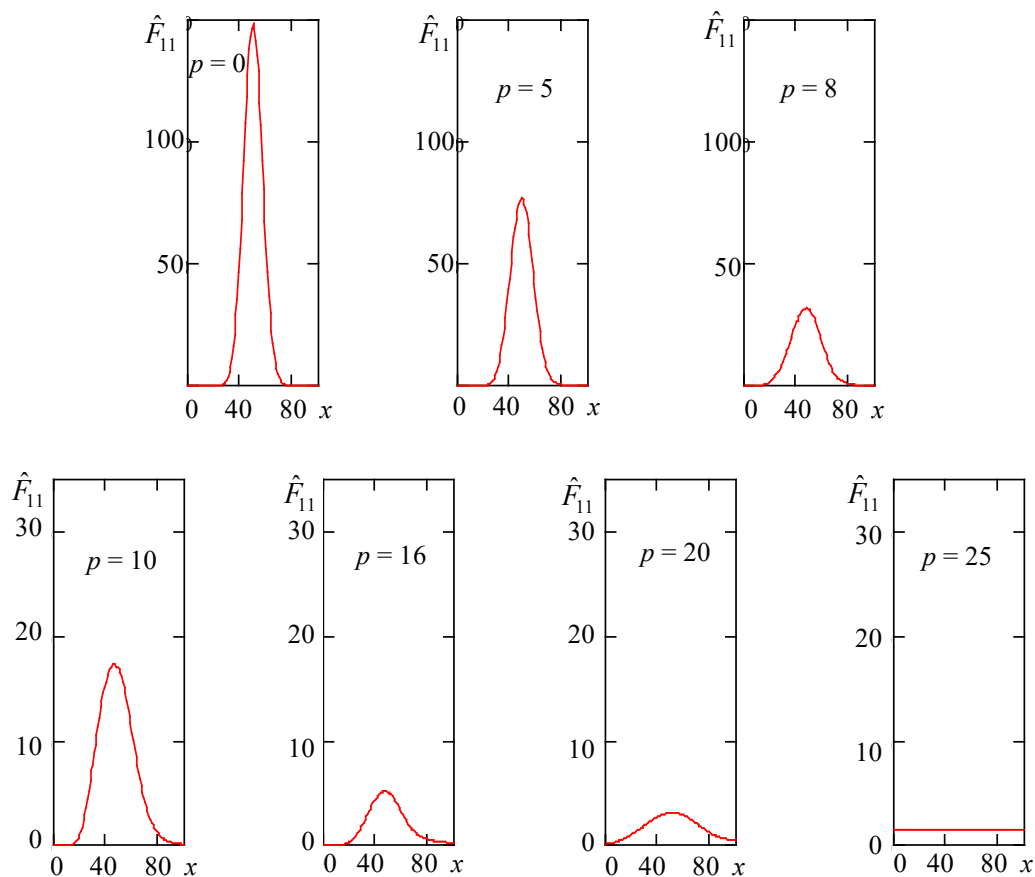


Рис. 3. Радиальные профили функций $\hat{F}_{11}$, описывающих распределение молекул в микроячейках, центры которых принадлежат координационным сферам с номерами p ГЦК решетки

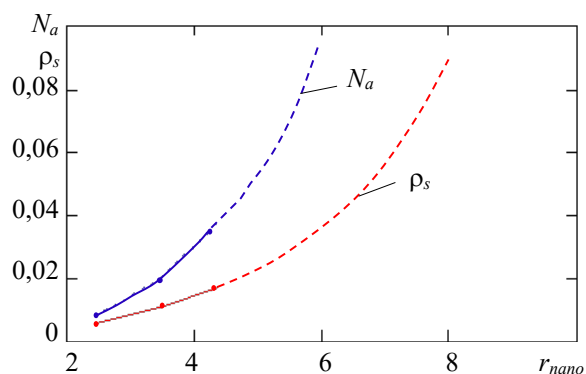


Рис. 4. Графики зависимости поверхностной плотности ρ_s адсорбированных молекул и числа N_a молекул в адсорбционных слоях наночастиц разных радиусов r_{nano}

Из рис. 5 видно, что с увеличением температуры θ поверхностная плотность адсорбированных молекул на поверхности наночастицы, а следовательно, и количество молекул в адсорбированном слое уменьшается, что согласуется с литературными данными [8].

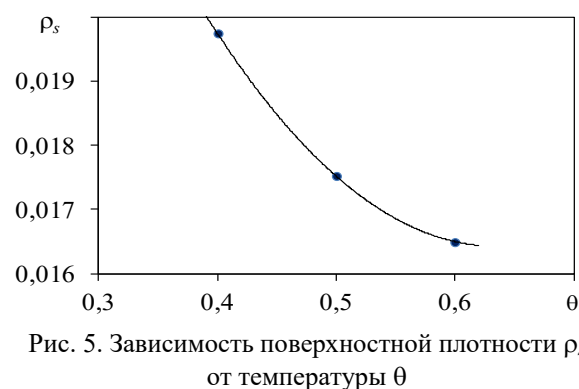


Рис. 5. Зависимость поверхностной плотности ρ_s от температуры θ

Закключение. С помощью компьютерной программы по определению профиля плотности кристаллических сферических наночастиц разных размеров в газовой среде с учетом пространственной релаксации параметров ГЦК решетки в объеме наночастицы рассчитаны равновесные поля плотности в межфазной области гетерогенной системы при температуре ниже тройной точки. Это позволило исследовать адсорбцию на кристаллических наночастицах с учетом изменения их микро- и макроструктуры.

Список литературы

1. Наркевич И. И. Двухуровневый статистический метод описания неоднородных систем. Ч. 1. Симбиоз методов коррелятивных функций и термодинамических функционалов плотности: монография. Нордерштедт: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2019. 114 с.
2. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979. 280 с.
3. Решение модифицированного интегрального уравнения для потенциалов средних сил и расчет параметров фазовых переходов в гетерогенных системах, содержащих кристаллические наночастицы / И. И. Наркевич [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2020. № 2 (236). С. 48–56.
4. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Two-level statistical description of structure of homogeneous macroscopic system and spherical crystalline nanoparticles // Nanoscience and Technology: International Journal. 2019. No. 10 (4). P. 365–376.
5. Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В. Разработка компьютерной программы для расчета структурных и термодинамических характеристик кристаллических наночастиц разных размеров // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2019. № 2 (224). С. 34–39.
6. Farafontova E., Narkevich I. Statistical-variational calculation of structural and thermodynamic characteristics of system «crystalline nanoparticle – homogeneous gaseous environment» / Actual Problems of Solid State Physics: proc. book IX Intern. Scient. Conf., Minsk, November 22–26, 2021: in 2 b. / SSPA “Scientific-Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus”; edit. byard: V. M. Fedosyuk (chairman) [et al.]. Minsk: Publisher A. Varaksin, 2021. B. 1. P. 152–155.
7. Фарафонтова Е. В., Наркевич И. И. Статистическое описание адсорбции из газовой фазы на сферических наночастицах с учетом пространственной релаксации кристаллической решетки // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 55–59.
8. Полтораки О. М. Термодинамика в физической химии. М.: Высшая школа, 1991. 319 с.

References

1. Narkevich I. I. *Dvukhurovnevyy statisticheskiy metod opisaniya neodnorodnykh sistem. Simbioz metodov korrelyativnykh funktsiy i termodinamicheskikh funktsionalov plotnosti* [Two-level statistical method for describing heterogeneous systems. Symbiosis of methods of correlative functions and thermodynamic functionals of density]. Norderstedt, LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2019. 114 p. (In Russian).
2. Rott L. A. *Statisticheskaya teoriya molekulyarnykh sistem* [Statistical theory of molecular systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p. (In Russian).

3. Narkevich I. I., Farafontova E. V., Kulesh A. A., Rogach A. A. Solution of the Modified Integral Equation for Medium Force Potentials and Calculation of the Parameters of Phase Transitions in Heterogeneous Systems Containing Crystalline Nanoparticles. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2020, no. 2 (236), pp. 48–56 (In Russian).

4. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Two-level statistical description of structure of homogeneous macroscopic system and spherical crystalline nanoparticles. *Nanoscience and Technology: International Journal*, 2019, no. 10 (4), pp. 365–376.

5. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Development of a computer program for the calculating of the structural and thermodynamic characteristics of crystalline nanoparticles of different sizes. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2019, no. 2, pp. 34–39 (In Russian).

6. Farafontova E., Narkevich I. Statistical-variational calculation of structural and thermodynamic characteristics of system «crystalline nanoparticle – homogeneous gaseous environment». *Actual Problems of Solid State Physics: proc. book IX Intern. Scient. Conf.*, Minsk, November 22–26, 2021. Minsk, Publisher A. Varaksin Publ., 2021, pp. 152–155.

7. Farafontova E. V. Narkevich I. I. Statistical description of adsorption from the gas phase on spherical nanoparticles taking into account the spatial relaxation of the crystal lattice. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2022, no. 2 (260), pp. 55–59 (In Russian).

8. Poltorak O. M. *Termodinamika v fizicheskoy khimii* [Thermodynamics in physical chemistry]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991. 319 p. (In Russian).

Информация об авторах

Фарафонтова Елена Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: farafontova@belstu.by

Наркевич Иван Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: narkevich@belstu.by

Язёнок Валерия Андреевна – студентка. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь).

Information about the authors

Farafontova Elena Valer'yevna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: farafontova@belstu.by

Narkevich Ivan Ivanovich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: narkevich@belstu.by

Yazenok Valeria Andreevna – student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus).

Поступила 20.04.2023

УДК 537.633.2

В. Р. Мадьяров

Белорусский государственный технологический университет

**ИЗМЕРЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ КРЕМНИЯ С ПОМОЩЬЮ
ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОПУСКАНИЯ МИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛН**

Известно, что измерения интенсивности СВЧ-излучения, прошедшего через полупроводниковую пластину, дают информацию о проводимости зондируемой среды. Коэффициент пропускания СВЧ-излучения полупроводника зависит от его диэлектрической проницаемости и удельной проводимости. Выполненные в данной работе расчеты показывают, что для полупроводников широкого применения с проводимостью $\sigma > 30$ См/м можно выделить диапазон частот в области 20–80 ГГц, на котором зависимость коэффициента пропускания от частоты зондирующего излучения будет близка к линейной. Удельная проводимость определяется по наклону этой зависимости. Из сравнения данных, полученных для пластин различной толщины, установлено, что на результат измерения значительное влияние оказывают многократные внутренние отражения от граней образца, если длина волны становится сравнимой с его толщиной. Наряду с этим возможно образование стоячей волны, в результате чего возникает дополнительное интерференционное гашение излучения. Значения удельной проводимости, полученные с помощью линейных участков частотных характеристик в диапазоне 40–75 ГГц, хорошо согласуются с расчетными данными собственной проводимости образца при температурах порядка комнатной в предположении, что концентрация носителей заряда подчиняется бальцмановскому распределению.

Ключевые слова СВЧ-излучение, волновод, электромагнитные волны, коэффициент пропускания, удельная проводимость.

Для цитирования: Мадьяров В. Р. Измерение проводимости кремния с помощью частотных характеристик пропускания миллиметровых волн // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. С. 53–57. DOI: 10.5265/2520-6141-2023-272-2-9.

V. R. Madyarov

Belarussian State Technological University

**MEASUREMENTS OF SILICON CONDUCTIVITY BY MEANS FREQUENCY
FIGURES IN MICROWAVE REGION**

Measurements of intensity of the radiation passed through semiconductor wafer provide the information on conductivity of the sample material to be probed. Microwave radiation transmission coefficient of the medium depends on dielectric permeability and specific conductivity of the medium. Estimation shows that for the majority of widely used semiconductors with conductivity $\sigma > 30$ S/m it is possible to allocate frequency range 20–80 GHz where frequency response of probing radiation transmission coefficient is very close to the linear. Specific conductivity is possible to calculate using slope of the measured linear dependence. Comparison between the data obtained for wafers of two different thicknesses shows that measured results are considerably influenced by multiple internal reflections from both sides of the sample when the wavelength becomes comparable with sample thickness. In addition, cancellation due to interference between incident and reflected waves may also be effective. Therefore, samples for measurements are appropriately used with thickness that much less comparable to probing wavelength. Specific conductivity values obtained by means of linear part of frequency response for silicon wafers in the region 40–75 GHz are in good agreement with the estimated data of intrinsic conductivity of the probed sample at room temperatures if Boltzman distribution is assumed for charge carriers.

Keywords microwave radiation, waveguide, electromagnetic waves, transmission coefficient, specific conductivity.

For citation: Madyarov V. R. Measurements of silicon conductivity by means frequency figures in microwave region. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 53–57. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-9 (In Russian).

Введение. Для исследования электрических свойств полупроводниковых материалов применяются бесконтактные методы, с помощью которых можно избежать влияния на результат

измерения побочных ЭДС [1]. Из этих методов измерения в СВЧ-диапазоне представляются наиболее перспективными, так как сравнительно просто позволяют определить подвижность

носителей заряда, удельную проводимость и диэлектрическую проницаемость материала. В результате измерений этих параметров можно оценить время релаксации и эффективную массу носителей заряда, а также их концентрацию [2]. Известны методы определения параметров переноса в полупроводниках, основанные на измерении фазы и амплитуды отраженных от образца СВЧ-волн [3]. Особый интерес представляют методы зондирования, в которых информацию об этих параметрах можно получить путем прямого измерения потока энергии волны, прошедшей через объем исследуемого образца, так как для этого требуется сравнительно небольшой набор измерительного оборудования и упрощается обработка результатов. Однако в этом случае возрастают требования как к чувствительности регистрирующей аппаратуры, так и к мощности источника излучения. В данной работе описана методика и приведены результаты определения проводимости плоских полупроводниковых образцов на основе измерений коэффициента пропускания излучения в диапазоне частот 40–75 ГГц.

Основная часть. Определение коэффициента пропускания проводилось по величине затухания потока излучения, направленного перпендикулярно к поверхности образца. Частота зондирующего излучения должна быть намного ниже частоты отсечки электромагнитной волны (плазменной частоты) $\omega_{\text{пл}}$, которая определяется выражением

$$\omega_{\text{пл}} = \left(\frac{4\pi n e^2}{\epsilon_0 m^*} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

где n – концентрация носителей заряда (электронов) в объеме полупроводникового образца; e – элементарный заряд; ϵ_0 – электрическая постоянная; m^* – эффективная масса носителей заряда. Оценки по формуле (1) для концентрации носителей $n = 5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ и массы $m^* = 0,55m_0$ (m_0 – масса электрона) дают значение $\omega_{\text{пл}} = 1,9 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ или $\nu_{\text{пл}} = 3 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$.

Для уменьшения дифракционных эффектов и связанных с ними потерь мощности зондирующей электромагнитной волны в измерительном тракте должно выполняться условие $\lambda < l$, где λ – длина зондирующей волны в пустом измерительном тракте, l – поперечный размер образца. При $l \sim 1 \text{ см}$ частота зондирующего излучения должна быть порядка 50–100 ГГц. Характерная глубина ослабления зондирующего излучения на таких частотах, равная $(\mu_0 \omega \sigma)^{-1/2}$, в полупроводнике с удельной проводимостью $\sigma \sim 10^3 \text{ См/м}$ составляет $\sim 0,3 \text{ мм}$. Поэтому для определения параметров полупроводников с достаточно высокой концентрацией

примеси следует использовать образцы с толщиной в доли миллиметра и регистрирующую аппаратуру с высокой чувствительностью.

В измерениях коэффициента пропускания использовался плоский образец, помещенный в прямоугольный металлический волновод. Для волны H_{10} , распространяющейся вдоль волновода в немагнитной среде с удельной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ϵ , комплексная постоянная распространения [4]

$$\gamma_{10} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon^* - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}, \quad (2)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота зондирующей волны; c – скорость света в вакууме; $\epsilon^* = \epsilon - i(\sigma / \epsilon_0 \omega)$ – комплексная диэлектрическая проницаемость; a – ширина волновода.

Для большинства полупроводников (Si, Ge, GaAs, CdS и др.) значения ϵ лежат в пределах от 12 до 20, а отношение $\lambda / 2a < 1$, так как $\lambda < \lambda_c$, где $\lambda_c = 2a$ – критическая длина волны H_{10} . Поэтому $\epsilon \gg \lambda / 2a$ и формулу (2) можно упростить:

$$\gamma_{10} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon^*} = \alpha + i\beta. \quad (3)$$

Выделив вещественную и мнимую части ϵ^* в (3), получим формулы для коэффициентов α и β , от которых зависят изменение амплитуды и фазы прошедшей через образец волны:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0 \omega} \right)^2}}; \quad (4)$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0 \omega} \right)^2}}.$$

Выражение для комплексного коэффициента пропускания τ образца толщиной d (отношение потока энергии излучения, прошедшего через образец, к потоку энергии падающего излучения) имеет вид

$$\tau = (1 - \rho)^2 e^{-2\beta d} = |\tau| e^{i\varphi}, \quad (5)$$

где ρ – комплексный коэффициент отражения. Выражение для модуля ρ получается из граничных условий для векторов волны $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на границе с поверхностью образца [4]:

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{\epsilon^*} - 1}{\sqrt{\epsilon^*} + 1} \right)^2. \quad (6)$$

Формулы (4)–(6) будем использовать как основу для определения σ и ϵ зондируемого образца по данным измерений модуля и фазы φ коэффициентов пропускания или отражения.

На рис. 1 приведены зависимости модуля τ от частоты для разных значений удельной проводимости образца n -Si с толщиной $d = 0,5$ мм, полученные с помощью расчета по формуле (4). Значения коэффициентов отражения β и ρ рассчитывались по формулам (4) и (6) соответственно. В расчетах учитывалось уменьшение ε с ростом частоты в диапазоне 30–80 ГГц в соответствии с зависимостью Друде $\varepsilon \sim [1 + (\omega\tau_p)^2]^{-1}$, где τ_p – время релаксации носителей заряда, $\tau_p \sim 10^{-12}$ с. В этом диапазоне время релаксации τ_p становится сравнимым с периодом электромагнитных колебаний [4].

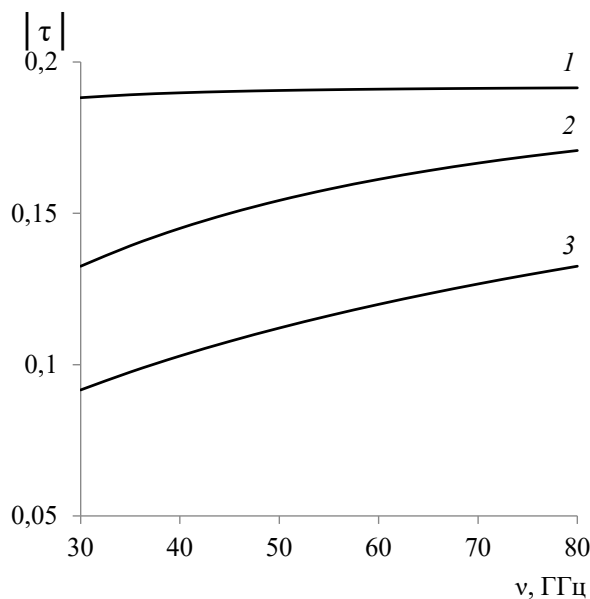


Рис. 1. Расчетные зависимости модуля коэффициента пропускания от частоты зондирующей волны для разных значений удельной проводимости σ :
1 – 1 См/м; 2 – 10 См/м; 3 – 50 См/м;
(n -Si, диэлектрическая проницаемость в постоянном поле $\varepsilon_{ст} = 12,3$)

Для значения $\sigma = 1$ См/м в диапазоне частот 30–80 ГГц коэффициент τ практически не зависит от частоты. Для значений удельной проводимости $\sigma > 30$ См/м, как показывают расчеты, можно выделить диапазон частот зондирования до ~ 80 ГГц, в котором зависимость τ от частоты близка к линейной.

Преобразование формулы (5) для больших значений σ , соответствующих условию $\sigma/\varepsilon\varepsilon_0\omega \gg 1$, дает упрощенное выражение для коэффициента пропускания τ :

$$|\tau| \approx 2\pi\sqrt{\varepsilon} \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \nu. \quad (7)$$

Из соотношения (7), пренебрегая изменением ε с частотой в узком диапазоне частот, можно получить выражение для удельной проводимости, которое позволяет определить σ

по тангенсу угла наклона частотной характеристики:

$$\sigma = 2\pi\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon} \left(\frac{d\tau}{d\nu} \right)^{-1} \approx 5,6 \cdot 10^{-11} \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{d\tau}{d\nu} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Для измерений использовалась схема «на прохождение». Электромагнитные колебания от генераторов, работающих в диапазоне 35–53 и 53–78 ГГц, проходили через ферритовый вентиль в металлический прямоугольный волновод. Ширина a металлических волноводов обеспечивала распространение волны H_{10} . Волна, прошедшая через образец, попадала на термисторный датчик. Напряжение с измерительного резистора, включенного последовательно с датчиком, регистрировалось микровольтметром измерителя Ф 136, обеспечивающим измерение напряжения до 100 нВ. Измеряемое напряжение пропорционально потоку энергии прошедшей через образец электромагнитной волны. Оценки показывают, что предельные значения удельной проводимости, ограниченные чувствительностью датчика и микровольтметра, составляют порядка 10^3 См/м.

На рис. 2 сопоставляются измеренные зависимости коэффициента пропускания τ для образцов n -Si различной толщины с расчетными частотными характеристиками модуля коэффициента пропускания τ , полученными по формуле (5) с применением (4) и (6).

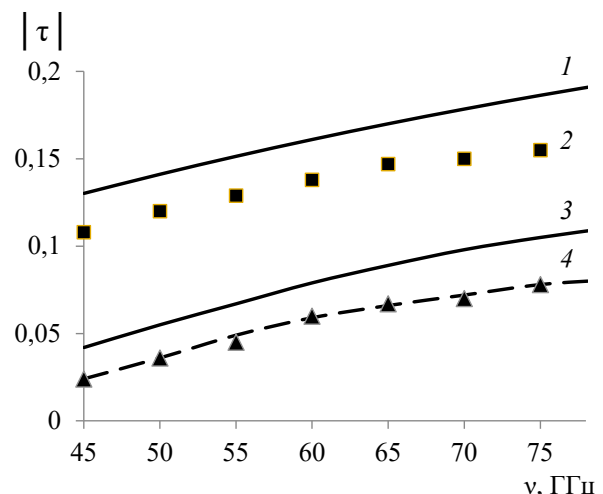


Рис. 2. Измеренные зависимости коэффициента пропускания от частоты для образцов n -Si толщиной $d = 0,5$ мм (2) и 1,0 мм (4) с одинаковой удельной проводимостью $\sigma_{ст} = 100$ См/м. Сплошные кривые 1 и 3 – расчет модуля τ по формулам (4)–(6) для образцов n -Si $d = 0,5$ и 1,0 мм соответственно (внутренние отражения не учитывались). Пунктирная линия – расчет модуля τ для образца n -Si толщиной $d = 1$ мм с учетом многократных внутренних отражений по формуле (10)

В расчетах использовались значения удельной проводимости на постоянном токе $\sigma_{ст} = 100$ См/м и диэлектрической проницаемости в постоянном поле $\epsilon_{ст} = 12,4$, соответствующие этим параметрам для измеряемых образцов.

Для образца толщиной 0,5 мм наблюдается близкая линейной частотная зависимость, которая хорошо согласуется с расчетной. Однако на частотах свыше ~ 60 ГГц происходит заметное отклонение измеренной зависимости от линейной.

Данные, полученные для образца толщиной 1,0 мм, значительно отклоняются от расчетной кривой, полученной в предположении однократного прохождения объема образца.

Для выяснения причин заметного уменьшения коэффициента пропускания излучения по сравнению с расчетным рассматривалась модель, в которой учитывалось внутреннее затухание зондирующей волны в сочетании с многократными внутренними отражениями от граней образца.

Пусть интенсивность I_0 первой отраженной от образца волны определяется ρI_0 . Тогда интенсивность прошедшей в объем образца волны будет равна $(1 - \rho)I_0$. Из образца после первого внутреннего отражения от его грани выйдет волна с интенсивностью $I_0(1 - \rho)^2 \exp(-\beta d)$, так как при каждом однократном отражении от грани выполняется равенство $\tau + \rho = 1$. Коэффициент пропускания для первой прошедшей сквозь образец волны после первого внутреннего отражения равен $(1 - \rho)^2 \exp(-\beta d)$.

После двойного прохождения вторая волна, вышедшая со стороны падения, будет иметь интенсивность $I_0 \rho (1 - \rho)^2 \exp(-2\beta d)$. Интенсивность волны, отразившейся от грани со стороны падения и прошедшей образец, после его третьего прохождения объема образца будет равна $I_0 \rho^2 (1 - \rho)^2 \exp(-3\beta d)$.

Таким образом, интенсивности волн, выходящих из образца со стороны падения, будут равны $\rho I_0, I_0 \rho (1 - \rho)^2 \exp(-2\beta d), I_0 \rho^3 (1 - \rho)^2 \exp(-4\beta d), \dots, I_0 \rho^{2k-1} (1 - \rho)^2 \exp(-2k\beta d)$. Суммирование интенсивностей этих волн дает полную интенсивность отраженного от образца излучения и приводит к формуле для расчета полного коэффициента отражения:

$$\rho^* = \rho + (1 - \rho)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{2k-1} e^{-2k\beta d} = \rho + \frac{\rho(1 - \rho)^2}{e^{2\beta d} - \rho^2}. \quad (9)$$

Аналогично суммирование интенсивностей волн, выходящих из образца, дает формулу для расчета полного коэффициента пропускания:

$$\tau^* = (1 - \rho)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{2k} e^{-(2k+1)\beta d} = \frac{(1 - \rho)^2}{e^{\beta d} - \rho^2 e^{-\beta d}}. \quad (10)$$

Выделив из выражений (9) и (10) вещественную и мнимую части, можно определить модуль и фазу коэффициентов отражения и пропускания.

Зависимость модуля коэффициента пропускания с учетом условия $\sigma / \epsilon \epsilon_0 \omega \gg 1$, рассчитанная по формуле (10), представлена на рис. 2 пунктирной линией.

Показано, что данные, полученные из измерений, хорошо согласуются с расчетной кривой, построенной с учетом затухания зондирующих волн в образце вследствие многократных внутренних отражений от его граней. Таким образом, наблюдаемое отклонение от линейной зависимости можно объяснить, если учесть увеличение затухания зондирующих волн в образце вследствие внутренних отражений при большей толщине образца.

В области частот 60–70 ГГц длина волны $\lambda = c / \nu (\epsilon)^{1/2}$ в материале образца составляет $\sim 1,2$ мм и становится сравнимой с его толщиной. Поэтому после каждого прохождения волны в объеме образца и последующего отражения возможно образование стоячей волны, в результате чего возникает дополнительное интерференционное гашение излучения.

На рис. 3 сопоставлены расчетные и измеренные зависимости удельной проводимости σ от температуры. Значения σ определялись с помощью формулы (8) по наклону линейной части частотной характеристики в области частот 40–75 ГГц.

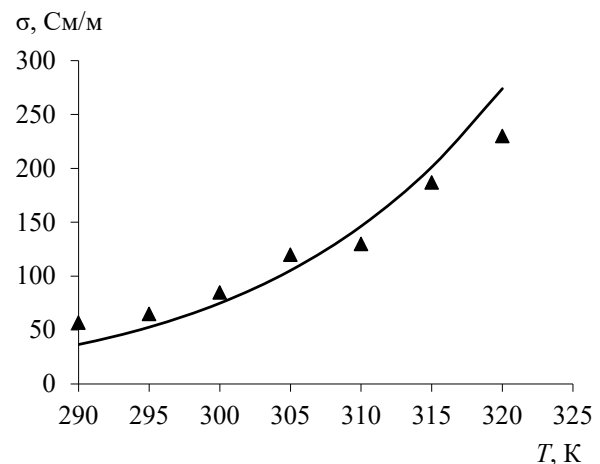


Рис. 3. Расчетная (сплошная линия) и измеренная зависимости удельной проводимости образца n-Si толщиной $d = 0,5$ мм от температуры. Концентрация носителей заряда в образце при $T = 293$ К составляла $n = 1,5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$

Расчетная зависимость удельной проводимости от температуры построена с использованием выражения для удельной проводимости [5]:

$$\sigma = \sigma_0 T^{3/2} \exp(-W / 2kT), \quad (11)$$

где σ_0 – удельная проводимость при температуре $T = 293$ К; W – ширина запрещенной зоны исследуемого образца ($W = 1,1$ эВ). Использование формулы (11) предполагает, что проводимость в исследуемом образце при температурах, близких к комнатной, является собственной, а распределение носителей заряда по энергии является больцмановским.

В диапазоне температур $T = 290$ – 320 К для образца n -Si толщиной $0,5$ мм наблюдается удовлетворительное соответствие расчетных и измеренных данных удельной проводимости.

Заключение. Предложена упрощенная методика определения удельной проводимости плоского полупроводникового образца с удельной

проводимостью в диапазоне 10 – 10^3 См/м по линейной области частотной характеристики коэффициента пропускания излучения миллиметрового диапазона. Показано, что проводить измерения целесообразно на образцах, толщина которых значительно меньше длины волны зондирующего излучения из-за влияния отражений от граней образца и уменьшения энергии прошедшей волны, а также вследствие возможного эффекта интерференционного гашения. Значения удельной проводимости, полученные с помощью частотных характеристик, хорошо согласуются с расчетными данными собственной проводимости образца при температурах, близких к комнатной.

Список литературы

1. Кучис Е. В. Гальваноманнитные эффекты и методы их исследования. М.: Советское радио, 1990. 263 с.
2. Козарь А. В., Пирогов Ю. А. Селин В. И. Об отражении СВЧ волны от полупроводниковой пластины конечной толщины // Вестник Московского университета. Сер.: физика. астрономия., 1973. Т. 14, № 6. С. 729–733.
3. Мадьяров В. Р. Исследование релаксационных свойств полупроводников с помощью интерферометрии миллиметрового диапазона // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физико-математические науки и информатика. С. 54–56.
4. Murata K., Hanawa A., Nozaki R. Broadband complex permittivity measurement techniques of materials with thin configuration at microwave frequencies // J. Appl. Phys. 2005. Vol. 98, no. 8. P. 084107/1–084107/8.
5. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 543 с.

References

1. Kuchis E. V. *Galvanomagnitnyye efekty i metody ikh issledovaniya* [Galvanomagnetic effects and methods to study them]. Moscow, Sovetskoye radio Publ., 1990. 263 p. (In Russian).
2. Kozar A. V., Pirogov Yu. A., Selin V. I. On microwave reflection from semiconductor wafer of a final thickness. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya Fizika. Astronomiya* [Bulletin of Moscow university], series: Physics. Astronomy, 1973, vol. 14, no. 6, pp. 729–733 (In Russian).
3. Madyarov V. R. Studies of semiconductor relaxation properties by means of microwave interferometry in millimeter range. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 54–56 (In Russian).
4. Murata K., Hanawa A., Nozaki R. Broadband complex permittivity measurement techniques of materials with thin configuration at microwave frequencies. *J. Appl. Phys.*, 2005, vol. 98, no. 8, pp. 084107/1–084107/8.
5. Nikolskiy V. V., Nikolskiy T. I. *Elektrodinamika i rasprostraneniye radiovoln* [Electrodynamics and propagation of radio waves]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 543 p. (In Russian).

Информация об авторе

Мадьяров Владимир Рафкатович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: Madyarov@belstu.by

Information about the author

Madyarov Vladimir Rafkatovich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Madyarov@belstu.by

Поступила после доработки 15.03.2023

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 681.53

**Д. А. Гринюк, Н. М. Олиферович, И. Г. Сухорукова,
Т. А. Дейнека, М. В. Клютко**

Белорусский государственный технологический университет

УМЕНЬШЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОМЕХ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО КАНАЛА НА ЗАМКНУТУЮ СИСТЕМУ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В статье проведено исследование по применению управляемых ограничителей для подавления помех в измерительном канале замкнутых контуров регулирования. Наличие шумов в измерительном канале при управлении технологических процессов затрудняет использование дифференцирования для улучшения динамики, а также способствует снижению срока эксплуатации исполнительных механизмов систем управления.

Для уменьшения влияния шумов измерительного канала на процесс регулирования в качестве фильтра был использован управляемый ограничитель. Предложены различные точки установки и варианты рассматриваемой структуры. С целью оценки эффективности структуры для подавления помех была проведена настройка для объектов с различной динамикой. На основании анализа литературы и предварительных исследований был выбран интегральный критерий для ПИД-регулятора и найдены параметры при различном уровне шумов.

Проведена оценка потенциальных возможностей управляемого ограничителя со статическим уровнем ограничения. Приведены зависимости влияния параметров ограничителя на время переходного процесса и величину дисперсии шумов на выходе регулятора. Динамическое изменение уровня ограничения обеспечило еще большее снижение шумов. Сделан вывод о более устойчивой работе ограничителя с динамическим уровнем при изменении параметров системы. Каскадное применение управляемых ограничителей позволяет повысить качество подавления шумов, но не так, как динамическое изменение уровня ограничения. Приведен алгоритм настройки системы с управляемым ограничителем для получения субоптимального подавления шумов.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, управляемый ограничитель, ПИД-регулятор.

Для цитирования: Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г., Дейнека Т. А., Клютко М. В. Уменьшение влияния помех измерительного канала на замкнутую систему регулирования // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 58–70. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-10.

**D. A. Hryniuk, N. M. Oliferovich, I. G. Suhorukova,
T. A. Deineka, M. V. Kliutko**
Belarusian State Technological University

REDUCING THE INFLUENCE OF MEASURING CHANNEL INTERFERENCE IN A CLOSED-LOOP CONTROL SYSTEM

In the article, a study of the use of controlled limiters to suppress interference in the measuring channel of closed control loops was carried out. The presence of noise in the measuring channel during the control of technological processes makes it difficult to use differentiation to improve the dynamics, and also helps to reduce the life of the actuators of control systems.

To reduce the effect of measuring channel noise on the regulation process, a controlled limiter was used as a filter. Various installation points and variants of the considered structure are proposed. In order to evaluate the effectiveness of the noise suppression structure, tuning was carried out for objects with different dynamics. Based on the analysis of the literature and preliminary studies, an integral criterion for the PID controller was chosen and the parameters were found at different noise levels.

An assessment of the potential capabilities of a controlled limiter with a static level of limitation has been carried out. The dependences of the influence of the limiter parameters on the time of the transient process and the magnitude of the noise dispersion at the controller output are given. Dynamically changing the clipping level provided even more noise reduction. The conclusion is made about more stable operation of the limiter with a dynamic level when changing the system parameters. Cascading the use of controlled limiters improves the quality of noise suppression, but not as much as dynamically changing the clipping level. An algorithm for tuning a system with a controlled limiter to obtain suboptimal noise suppression is presented.

Keywords: non-linear filtering, controlled limiter, PID controller.

For citation: Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G., Deineka T. A., Klyutko M. V. Reducing the influence of measuring channel interference in a closed-loop control system. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 58–70. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-10 (In Russian).

Введение. В области автоматического управления в последние годы получили распространение разнообразные встроенные компьютеры и программируемые устройства, которые потенциально могут улучшить качество управления. Однако наблюдается большое различие между теорией и практикой. По этой причине наиболее часто используемыми структурами регулирования по-прежнему остаются различные варианты ПИД-регуляторов, несмотря на множество ограничений и недостатков данного алгоритма. Здесь сказывается длительная история применения, универсальность, а также наличие устойчивых методик настройки, которые легко применимы инженерами без углубленных знаний теории управления. Однако это приводит к тому, что очень часто ПИД-регуляторы используются не оптимально. Это, в свою очередь, обусловлено целым комплексом проблем:

- нехватка времени и сил у технического персонала;
- отсутствие необходимых знаний для эффективного проектирования используемых контроллеров;
- сложность формирования критериев, поскольку в каждом случае создание параметров критерия должно привязываться к технологии [1];

– недостатки самого ПИД-регулятора, которые требуют внесения коррекции классического и т. д. [2].

На сегодняшний день многие практические приложения последних технологических достижений выполняются без соответствующей теоретической проработки (проектирования). Ситуацию также усугубляет еще и тот факт, что длительное развитие теории автоматического управления создало огромное количество различных подходов, детальное изучение и оценка которых требует сверхчеловеческих усилий.

Требования к формированию постоянного потока научных статей от исследователей в университетах создает множество модных решений, которые не всегда оптимальны при применении в технических решениях.

Постановка задачи. Сегодня появилось много решений по улучшению динамики регулирования за счет введения в структуру регулирования ПИД-регулятора элементов ускоренного реагирования на изменения разности между выходным сигналом от измерительного преобразователя и сигналом задания [2–6]. Здесь проявился недостаток классического ПИД-регулирования: сложность обеспечения быстродействия при наличии высокого уровня шумов в измерительном канале [7]. Эта проблема еще больше усугубляется

преобразованием аналогового сигнала в цифровой в технических устройствах регулирования [8]. По этой причине большинство типичных алгоритмов ПИД-регулирования имеют различные варианты встроенных решений по сглаживанию тренда от измерительного устройства. В некоторых присутствует фильтр низкой частоты (ФНЧ) первого порядка. В аналоговых устройствах это было реализовано на резисторах и конденсаторах. В цифровых устройствах автоматизации можно встретить или цифровую реализацию ФНЧ, или фильтр бегущего среднего [9].

Как отмечают авторы большинства работ, которые занимаются поиском рациональных решений проблемы наличия шумов в измерительном канале, параметры фильтра влияют на оптимальные настройки ПИД-регулятора [10, 11]. Фильтр всегда формирует временную задержку, т. е. влияет на общую динамику канала управления. Повышение порядка фильтра, даже за счет простоты настройки фильтра Баттерворта, не решает проблему ухудшения динамики.

В прикладных работах предлагаются простые решения по выбору постоянной времени фильтра [12]. Другая часть исследователей концентрирует усилия на поиск критериев, алгоритмов совместной или последовательной настройки этих двух динамических звеньев в канале управления. Последовательная настройка не позволяет получить оптимальные характеристики, а совместная требует временных затрат вычислительных устройств для поиска большого количества параметров.

Перспективным решением является использование фильтра Калмана для подавления помех в измерительном тракте [13, 14]. Однако применение данного решения и ему подобных связано с необходимостью точного знания динамики канала управления. Объект должен иметь допустимую нелинейность, а шумы в измерительном тракте должны быть близки по параметрам к гаусовским. Это очень часто затруднительно для многих прикладных задач. Однако в случае наличия вышеуказанных условий использование фильтра Калмана является перспективным.

Выбор критерия настройки параметров систем – это комплексная задача, и здесь нет одного решения. Шум в измерительном канале обостряет разные проблемы регулирования. Необходимость подавления шумов может быть вызвана желанием иметь минимальные отклонения на выходе для технологических объектов. Это обычно характерно для динамических задач. В случае высокой инерционности объекта он сам выступает в качестве сглаживающего фильтра и наличие шумов в измерительном тракте приводит к динамической работе исполнительных устройств, что снижает надежность

их эксплуатации. При этом особенность данных динамических объектов такова, что желание увеличить быстродействие системы приводит к значениям времени дифференцирования значительно больше 1, что многократно увеличивает амплитуду шумов сигнала управления исполнительным механизмом.

В каждом из этих двух случаев критерий будет свой. Если брать за основу интегральные критерии, то в первом случае можно рекомендовать критерии вида [15]

$$I_{10} = \int_0^{tm} t^n |e(t)| dt; \quad (1)$$

$$I_{12} = \int_0^{tm} t^n e(t)^2 dt, \quad (2)$$

где $e(t) = (SP - y)$ – сигнал ошибки между сигналом задания и выходным сигналом; SP – сигнал задания; y – выходное значение замкнутой системы; t – время; tm – время моделирования; n – показатель штрафа, который в зависимости от целей может иметь значение 0, 1, 2, ...

Когда надежность работы исполнительного механизма является первоочередной задачей, то лучше использовать критерии вида

$$I_{20} = \int_0^{tm} t^n (c|e(t)| + d|u(t)|) dt; \quad (3)$$

$$I_{21} = \int_0^{tm} t^n (ce(t)^2 + du(t)^2) dt, \quad (4)$$

где c , d – коэффициенты перераспределения влияния $e(t)$ и $u(t)$ на результат настройки; $u(t)$ – сигнал управления с регулятора или разница между текущим сигналом управления и его стационарным значением.

Коэффициенты c и d обычно принимают одинаковыми.

Следует отметить, что интегральные критерии не являются единственным показателем, который используется для поиска оптимальных параметров ПИД-регулятора.

Нелинейные фильтры. Использование нелинейных фильтров для решения проблемы шумов не является редким. Как уже отмечалось выше, некоторые технические устройства имеют встроенный фильтр бегущего среднего. Иногда там же присутствует функция исключения из текущих значений значения с наибольшим отклонением. Фильтр Калмана тоже по сути является нелинейным. Используют его для фильтрации с применением метода наименьших квадратов ФМНК [16–18].

Как показано в источнике [15], фильтр бегущего среднего и ФМНК демонстрируют лучшую

динамику на переходных процессах. Однако следует отметить, что для них характерен проигрыш ФНЧ по цене и качеству при стационарных режимах. И как отмечалось в работе [16], выходом может быть комбинация работы ФНЧ и ФМНЧ в зависимости от текущей динамики.

При необходимости ограничения скорости регулирования ПИД-регулятора применяются структуры с ограничителями [19]. Фактически они также представляют собой нелинейные фильтры. Ранее уже были предложены структуры (рис. 1) динамического управления ограничением по уменьшению действия помех [20, 21]. Их можно применить и для улучшения работы ПИД-регулятора в условиях помех.

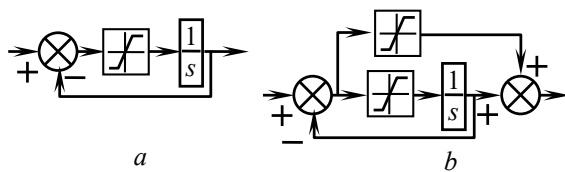


Рис. 1. Ограничитель скорости (a) и ограничитель скорости и амплитуды (b)

Фильтр на основе управляемого ограничителя (ФУО). Управляемый ограничитель является нелинейным прибором, поэтому эффективность места его установки во многом зависит от целей и динамики объекта управления.

В случае необходимости обеспечить снижение шумов не только для повышения надежности работы исполнительного механизма, но и для удобства наблюдения за техническим параметром, ФУО следует располагать после измерительного преобразователя. При необходимости обеспечить легкий режим работы только исполнительного механизма ФУО можно установить уже после вычисления ошибки. Частным случаем такого варианта может быть установка управляемого ограничителя уже после усиления сигнала ошибки. Особенно, если коэффициент усиления регулятора значительно больше 1. Это улучшит его работу, поскольку всегда существуют ограничения, связанные с цифровой обработкой информации. Как вариант, можно использовать ФУО только для пропорциональной kp и дифференциальной td составляющих регулятора, поскольку интегральная часть ti сама по себе хорошо снижает влияние шума. Фильтрацию с помощью управляемого ограничителя лучше производить только для контура обратной связи, так как он может вносить существенные нелинейные искажения в измерительный канал. Для контроля за параметрами лучше применять классические подходы к фильтрации.

Может быть предложено несколько вариантов структур управляемого ограничителя (рис. 2),

в которых коэффициент a формирует некоторое компромиссное значение между уровнем снижения амплитуды помех и временными задержками.

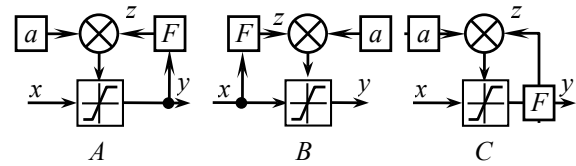


Рис. 2. Структуры ФУО:

F – сглаживающий фильтр; z – сигнал после фильтра

Значение z в самом простом случае может представлять параметр на выходе фильтра с управлением уровнем ограничения функции верхней и нижней границы:

$$\begin{cases} s_{up} = \bar{x} + a, \\ s_{down} = \bar{x} - a. \end{cases} \quad (5)$$

Для уменьшения временных задержек при динамическом изменении входного параметра x рациональным будет учитывать и скорость изменения входного параметра.

Например, формировать уровень ограничения по функции

$$\begin{cases} s_{up} = \bar{x} + \left| b \frac{d\bar{x}}{dt} \right| + a, \\ s_{down} = \bar{x} + \left| b \frac{d\bar{x}}{dt} \right| - a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} s_{up} = \bar{y} + \left| b \frac{d\bar{y}}{dt} \right| + a, \\ s_{down} = \bar{y} + \left| b \frac{d\bar{y}}{dt} \right| - a. \end{cases} \quad (6)$$

Еще одним вариантом может быть каскадное построение ФУО, при котором последующий каскад будет иметь меньшее значение a , чем предыдущий.

Методика исследования. Для оценки предложена структура замкнутого регулирования, представленная на рис. 3. Для комплексной оценки предложенного решения в данной структуре величина запаздывания принимала значения $\tau = [0,1 \ 1 \ 5 \ 15]$.

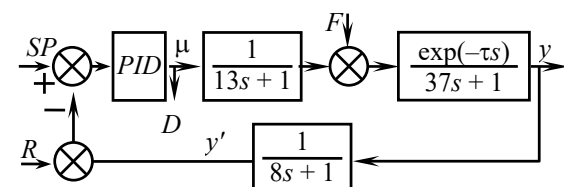


Рис. 3. Структура объекта исследования:

y' – сигнал датчика; s – оператор передаточной функции в преобразовании Лапласа

Дисперсия создавалась встроенным генератором в Matlab со следующими значениями $R = [0 \ 0,00003 \ 0,0001 \ 0,0003 \ 0,001 \ 0,003 \ 0,01]$.

Для выбора критерия настройки была произведена настройка данной структуры по различным интегральным критериям.

$$IAE = I_1 = \int_0^{t_M} |x| dt \rightarrow \min; \quad (7)$$

$$ITAE = I_2 = \int_0^{t_M} |x| t dt \rightarrow \min; \quad (8)$$

$$I_3 = \int_0^{t_M} |x| t^2 dt \rightarrow \min; \quad (9)$$

$$I_4 = \int_0^{t_M} (|x| + |u|) dt \rightarrow \min; \quad (10)$$

$$ISE = I_5 = \int_0^{t_M} x^2 dt \rightarrow \min; \quad (11)$$

$$I_6 = \int_0^{t_M} x^2 t dt \rightarrow \min; \quad (12)$$

$$I_7 = \int_0^{t_M} x^2 t^2 dt \rightarrow \min; \quad (13)$$

$$I_8 = \int_0^{t_M} (x^2 + u^2) dt \rightarrow \min. \quad (14)$$

Результат настройки можно видеть на рис. 4, 5 и в табл. 1. Наличие шума больше влияет на критерии с временным штрафом I_2 – I_3 . Отличие в настройках для квадратичных критериев I_5 – I_8 незначительны.

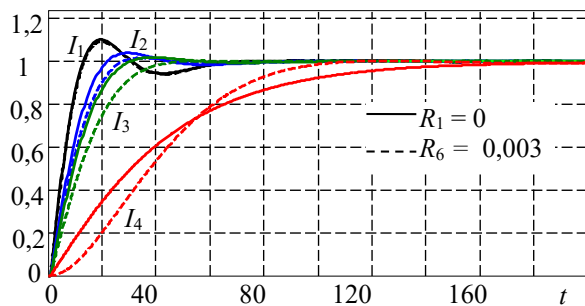


Рис. 4. Настройка ПИД-регулятора по интегральным критериям I_1 – I_4

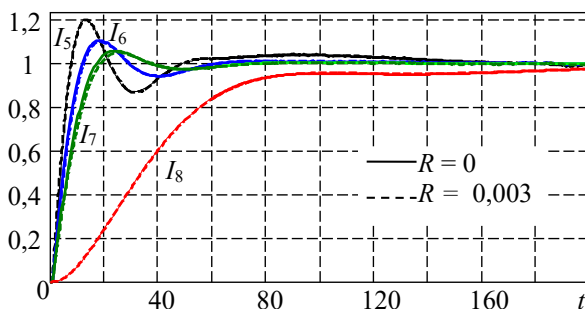


Рис. 5. Результаты настройки объекта по интегральным критериям I_5 – I_8

Таблица 1

Настройки ПИД-регулятора для критериев I_1 – I_8

ПИД	R	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
kp	R_1	3,98	3,27	2,82	1,05	3,84	3,96	3,57	0,995
	R_6	3,92	2,95	2,35	1,04	3,88	3,93	3,47	0,852
ti	R_1	13,7	16,5	18,8	51,5	9,29	12,5	14,7	49,5
	R_6	14,1	18,1	22,2	51,6	9,39	12,7	15,4	50,0
td	R_1	59,6	39,5	31,5	0,0091	94,1	63,8	48,0	9,20
	R_6	58,7	34,4	24,6	0,0001	93,5	62,5	45,0	0,0003

Интегральные критерии, которые учитывают отклонение сигнала управления с регулятора, фактически исключают дифференциальную составляющую из регулятора. Данные критерии могут быть использованы, когда вопрос надежной работы исполнительных механизмов стоит на первом месте.

Переходной процесс для критерия I_3 соответствует компромиссу между быстродействием, перерегулированием и величиной td . Перерегулирование минимально, по времени регулирования проигрыш небольшой в отличие от остальных критериев.

Для оценки эффективности произведена проверка некоторых вариантов применения ФУО. Общая настройка производилась последовательно. Сначала путем минимизации интегрального критерия I_3 осуществлялась настройка ПИД-регулятора. Затем путем минимизации дисперсии на стационарном участке переходного процесса находились постоянная фильтра и коэффициент a уравнения (5). Для нахождения скорости использовался реальный фильтр высокой частоты. Его параметры определялись путем минимизации времени переходного процесса (ВПП) или путем минимизации произведения времени переходного процесса и дисперсии D на стационарном участке на выходе из регулятора (ВППД) (рис. 3). В качестве фильтра использовался фильтр низкой частоты первого порядка. Для этих целей можно применять также фильтр бегущего среднего либо фильтр с использованием метода наименьших квадратов [16].

В процессе исследования ставилась задача определения постоянной времени T для ФНЧ и значения запаса по ограничению a (5), при котором будет обеспечиваться оптимальное подавление шумов. Для динамического изменения запаса по ограничению и реализации производной (6) был применен фильтр высокой частоты (ФВЧ) с параметрами настройки b и T_M первого порядка:

$$W(s) = \frac{bs}{T_M s + 1}. \quad (15)$$

Впоследствии, для динамического регулирования планируется рассмотреть варианты с использованием возможностей, которые дает аппроксимация тренда методом наименьших квадратов.

ФУО со статическими параметрами. Результаты настройки ПИД-регулятора по критерию I_3 для различных вариантов объекта и уровня шумов можно видеть в табл. 2. Как следует из таблицы, наличие шума способствует снижению kp и td и увеличению ti . При наличии значительной величины запаздывания изменение параметров настройки несущественно, чего не скажешь об объектах с $\tau = 0,1$ с и $\tau = 1$ с. При высоком значении шума настройки приходят к значениям ПИД-регулятора, которые мало зависят от величины запаздывания.

Таблица 2

Настройки ПИД-регулятора

ПИД	τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
kp	0,1	2,907	2,549	2,425	2,272	2,064	1,879	1,309
	1	2,710	2,417	2,316	2,201	2,013	1,855	1,316
	5	2,061	1,949	1,904	1,861	1,810	1,724	1,324
	15	1,304	1,299	1,293	1,292	1,278	1,270	1,267
td	0,1	31,81	27,13	25,43	23,17	20,09	17,48	10,72
	1	29,85	25,97	24,53	22,86	20,02	17,69	11,17
	5	23,43	21,83	21,18	20,57	19,70	18,23	13,13
	15	16,33	16,30	16,27	16,34	16,14	16,10	16,17
ti	0,1	18,02	20,30	21,28	22,66	24,82	27,11	36,72
	1	19,37	21,46	22,34	23,48	25,57	27,65	36,88
	5	25,78	27,00	27,55	28,15	28,98	30,47	38,28
	15	41,99	42,15	42,25	42,32	42,74	43,07	43,38

На рис. 6–9 приведены сравнительные графики переходных процессов при варианте построения ФУО на базе ФНЧ с постоянной времени T и значением запаса по ограничению a для варианта, который соответствует минимуму времени переходного процесса по уровню 3% от сигнала задания. Как показано на графиках, введение ФУО не сильно повлияло на динамику. Введение данного нелинейного фильтра играет положительную роль и выполняет «быстрое торможение» при выходе на установившееся значение подобно структурам на рис. 1.

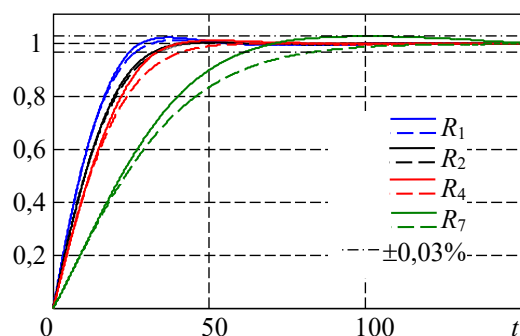


Рис. 6. Переходной процесс без (сплошная линия) и с ФУО (штриховая) при функции управления (5) в измерительном тракте и $\tau = 0,1$

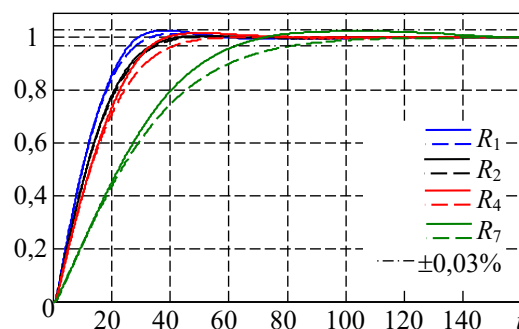


Рис. 7. Переходной процесс без (сплошная линия) и с ФУО (штриховая) при функции управления (5) в измерительном тракте и $\tau = 1$

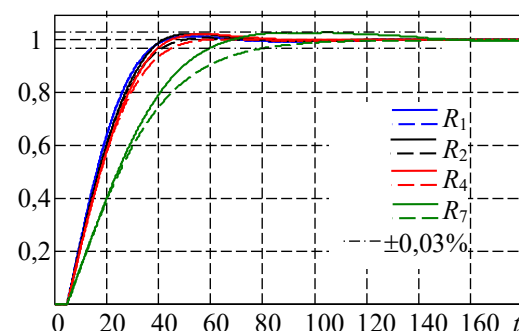


Рис. 8. Переходной процесс без (штриховая линия) и с ФУО (сплошная линия) при функции управления (5) в измерительном тракте и $\tau = 5$

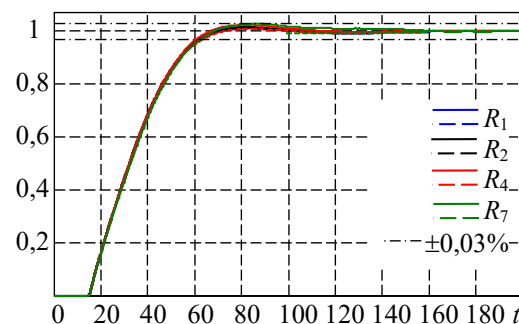


Рис. 9. Переходной процесс без (сплошная линия) и с ФУО (штриховая) при функции управления (5) в измерительном тракте и $\tau = 15$

Для объекта управления с временем запаздывания, которое сравнимо с постоянной времени объекта, наблюдается практическое совпадение. Это является следствием того, что минимизация критерия I_3 при настройке привела к меньшим значениям времени дифференцирования и коэффициенту усиления, что ограничило скорость изменения параметров при переходе от одного устойчивого состояния к другому.

В результате введения ФУО значения интегрального критерия, по которому были настроены контуры регулирования, показали изменение меньше чем на 1%. Более того, как показывает

табл. 3, время переходного процесса за редким исключением уменьшилось.

Если время переходного процесса изменилось незначительно, то дисперсия уменьшилась на несколько порядков (табл. 4). При том чем выше уровень шума, тем эффективнее работает ФУО.

Таблица 3

Отношение времени переходного процесса без ФУО и с ФУО при минимизации по ВВП

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	1,012	1,197	1,196	1,179	1,316	1,282	1,342
1	1,091	1,177	1,166	1,171	1,316	1,284	1,347
5	1,045	1,061	1,071	1,109	1,179	1,190	1,352
15	0,996	1,019	1,029	1,054	1,063	1,062	1,074

Таблица 4

Отношение дисперсии на выходе из ПИД без ФУО и с ФУО при минимизации по ВВП

τ	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	697,0	2 162	7 774	24 545	58 223	148 320
1	698,6	2 159	7 757	24 525	53 237	195 344
5	698,0	2 155	7 671	19 904	35 530	152 292
15	928,3	2 636	8 259	15 825	16 050	31 093

Использование для выбора параметров ФУО минимизации произведения дисперсии на время переходного процесса не позволяет говорить о возможности получения компромиссных настроек для обеспечения лучшего подавления шумов без существенного ухудшения динамики. Сделать системные выводы из табл. 5 сложно. Примерно в половине случаев время переходного процесса изменяется незначительно, тогда как в остальных случаях изменяется в разы.

Как и следовало ожидать, минимизация по ВВПД позволила резко увеличить эффективность подавления помех (табл. 6). Высокая вероятность ухудшения динамики регулирования не позволяет рекомендовать данный критерий для настройки ФУО. Использование непосредственно дисперсии для поиска параметров дает еще большее ухудшение динамики.

Таблица 5

Отношение времени переходного процесса без ФУО и с ФУО при минимизации по ВВПД

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	1,012	1,197	1,192	0,150	1,316	0,207	0,190
1	1,002	1,177	1,168	1,171	1,316	0,206	0,184
5	0,998	1,061	0,305	0,319	0,174	0,167	0,173
15	0,996	0,303	0,305	0,164	0,165	0,143	0,221

Таблица 6

Отношение дисперсии на выходе из ПИД без ФУО и с ФУО при минимизации по ВВПД

τ	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	1 054	2 943	7 515	24 385	512 149	2 865 683
1	1 046	2 930	7 496	24 355	513 411	2 833 657
5	1 027	10 033	28 843	171 666	503 934	2 904 934
15	5 803	17 692	91 185	299 121	891 645	1 665 370

Графики на рис. 10, 11 демонстрируют сложность настройки параметров ФУО. Больше всего трудностей с определением запаса по ограничению a . Ограничение по верхнему значению обусловлены фиксированным временем моделирования в 500 с. Нижняя граница обусловлена фактически динамикой объекта и настройками регулятора. Особенности динамики объекта управления существенно не сказываются на характере кривых. Из-за наличия шумов могут наблюдаться локальные минимумы, но следует отметить, что если строить поисковый алгоритм, то следует начинать от минимальных значений параметров настройки. С некоторого значения будет наблюдаться резкое снижение времени переходного процесса, после которого перед выходом на плато следует искать глобальный минимум.

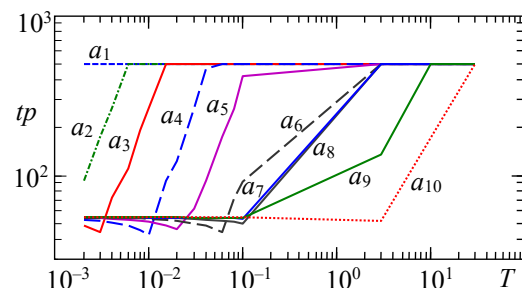


Рис. 10. Время переходного процесса tp от T при $\tau = 0,1$, R_6 и значениях a в (5):

$a_1 = 0,00001$; $a_2 = 0,00004$; $a_3 = 0,0001$; $a_4 = 0,0003$;
 $a_5 = 0,0008$; $a_6 = 0,002$; $a_7 = 0,006$; $a_8 = 0,015$;
 $a_9 = 0,04$; $a_{10} = 0,1$

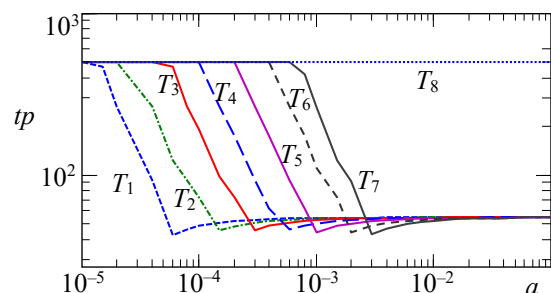


Рис. 11. Время переходного процесса tp от a при $\tau = 0,1$; R_6 и значениях T :

$T_1 = 0,002$; $T_2 = 0,004$; $T_3 = 0,008$; $T_4 = 0,015$;
 $T_5 = 0,03$; $T_6 = 0,06$; $T_7 = 0,1$; $T_8 = 30$

Графики зависимости дисперсии от постоянной времени незначительно отличаются от уровня шума и динамических характеристик объекта управления (рис. 12, 13). Минимальная дисперсия наблюдается в пределах 0,005–0,010 с.

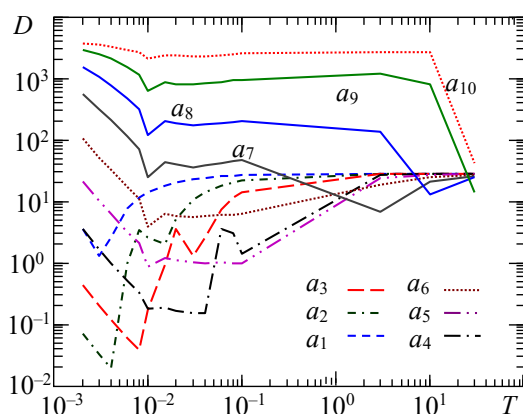


Рис. 12. Зависимость дисперсии D от T при $\tau = 0,1$; R_6 и следующих значениях a в (5):
 $a_1 = 0,00001$; $a_2 = 0,00004$; $a_3 = 0,0001$; $a_4 = 0,0003$;
 $a_5 = 0,0008$; $a_6 = 0,002$; $a_7 = 0,006$; $a_8 = 0,015$;
 $a_9 = 0,04$; $a_{10} = 0,1$

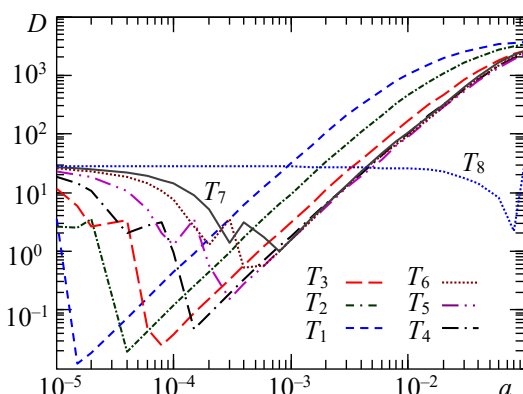


Рис. 13. Зависимость дисперсии D от a при $\tau = 0,1$; R_6 и значениях T :
 $T_1 = 0,002$; $T_2 = 0,004$; $T_3 = 0,008$; $T_4 = 0,015$;
 $T_5 = 0,03$; $T_6 = 0,06$; $T_7 = 0,1$; $T_8 = 30$

Ломанный характер зависимостей (рис. 12, 13) дисперсии от запаса по ограничению во многом определяется стабильным нахождением выхода в режиме ограничения. Но в целом тенденция такова: чем меньше запас по ограничению, тем меньше дисперсия. Оптимальные значения параметров ФОУ приведены в табл. 7–10.

Таблица 7

Значение a для минимума ВВП

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$
1	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$
5	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
15	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-4}$

Таблица 8

Значение a для минимума D

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
1	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
5	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
15	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$

Таблица 9

Значение T для минимума ВВП

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	0,004	0,002	0,002	0,010	0,003	0,002	0,010
1	0,003	0,002	0,002	0,010	0,003	0,010	0,002
5	0,002	0,002	0,002	0,010	0,002	0,004	0,003
15	0,002	0,004	0,003	0,004	0,003	0,008	0,010

Таблица 10

Значение T для минимума D

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	0,080	0,010	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
1	0,040	0,010	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
5	0,003	0,010	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
15	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002

ФОУ с динамическим изменением смещения (ДФОУ). Настройка статического ФОУ фактически является поиском компромисса. Снижение параметров способствует снижению дисперсии, однако происходит ухудшение динамики регулирования. Напрашивается решение увеличивать параметр a , когда наблюдается динамика тренда. Как отмечалось выше и исследовалось в работе [20], использование фильтра высокой частоты является одним из решений.

Ввиду желания оценить возможности последовательной настройки, совместная оптимизация параметров a , T , b , T_M не производилась. Исходя из результатов, полученных в предыдущем пункте, были приняты следующие фиксированные значения: $T = 0,002$ и $a = 0,00002$, которые соответствуют минимуму D .

Результатом использования данной структуры является уменьшение времени переходного процесса (табл. 11, 12) и снижение дисперсии (табл. 13, 14). Динамическое изменение уровня ограничения позволило снизить чувствительность к параметрам настройки. Для ФОУ характерно было, что уменьшение значений a и T вело к постепенному улучшению характеристики, а после прохождения минимума – к резкому ухудшению (рис. 10–13).

Время переходного процесса для ДФОУ в основном улучшилось, но незначительно (табл. 13),

тогда как снижение дисперсии произошло существенное, на несколько порядков.

Таблица 11

Отношение времени переходного процесса с ДФОР и без ДФОР при минимизации по ВВП

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	1,152	1,267	1,238	1,191	1,565	1,434	1,470
1	1,112	1,228	1,209	1,453	1,464	1,413	1,523
5	1,075	1,101	1,118	1,123	1,176	1,266	1,491
15	1,030	1,054	1,074	1,085	1,082	1,111	1,129

Таблица 12

Отношение времени переходного процесса с ДФОР и с ФОР при минимизации по ВВП

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	1,138	1,059	1,035	1,010	1,189	1,119	1,095
1	1,019	1,043	1,037	1,241	1,113	1,101	1,131
5	1,029	1,038	1,044	1,013	0,998	1,064	1,103
15	1,034	1,0343	1,044	1,029	1,018	1,046	1,051

Таблица 13

Отношение дисперсии на выходе из ПИД с ДФОР и без ДФОР при минимизации по ВВП

τ	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	5 364	17 233	49 536	164 795	475 908	1 549 980
1	5 366	17 200	50 531	163 346	474 879	1 553 644
5	5 370	17 086	49 336	160 414	463 545	1 526 908
15	5 414	17 319	50 116	159 780	451 372	1 273 354

Таблица 14

Отношение дисперсии на выходе из ПИД с ДФОР и с ФОР при минимизации по ВВП

τ	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	7,696	7,971	6,372	6,714	8,174	10,45
1	7,681	7,967	6,514	6,660	8,920	7,953
5	7,693	7,929	6,432	8,059	13,05	10,03
15	5,832	6,570	6,068	10,10	28,12	40,95

Влияние параметров ФВЧ на работу системы регулирования представлено на рис. 14–17. Параметры b и T_M начинают сильно влиять на время переходного процесса только при большом значении постоянной времени ФВЧ. Повышение порядка этого фильтра способствует дальнейшему снижению дисперсии.

График на рис. 16 демонстрирует наличие минимума дисперсии в зоне близких значений T_M для разных значений параметра b , что снижает трудности оптимизации.

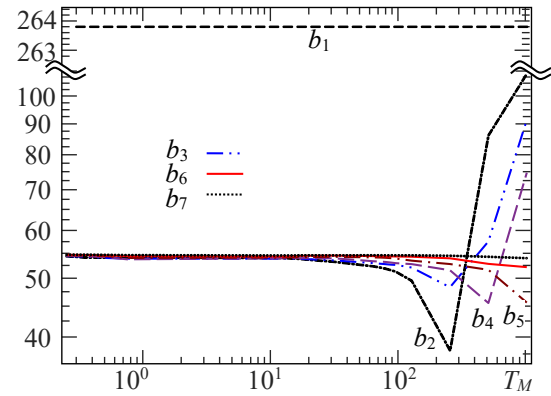


Рис. 14. Время переходного процесса tp от T при $\tau = 0,1$; R_6 и значениях b (14): $b_1 = 0$; $b_2 = 0,0372$; $b_3 = 0,0625$; $b_4 = 0,1$; $b_5 = 0,2$; $b_6 = 0,5$; $b_7 = 2$

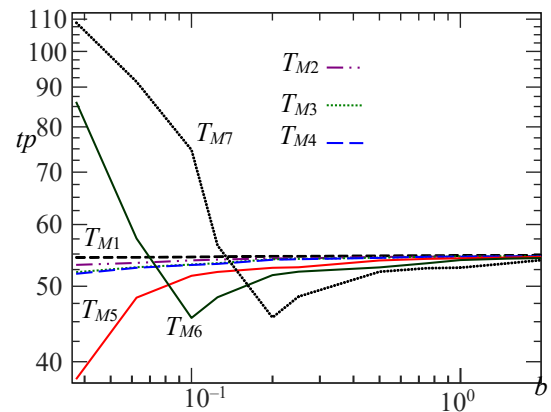


Рис. 15. Время переходного процесса tp от b при $\tau = 0,1$; R_6 и значениях T_M : $T_{M1} = 0,25$; $T_{M2} = 32$; $T_{M3} = 72$; $T_{M4} = 80$; $T_{M5} = 256$; $T_{M6} = 512$; $T_{M7} = 1024$

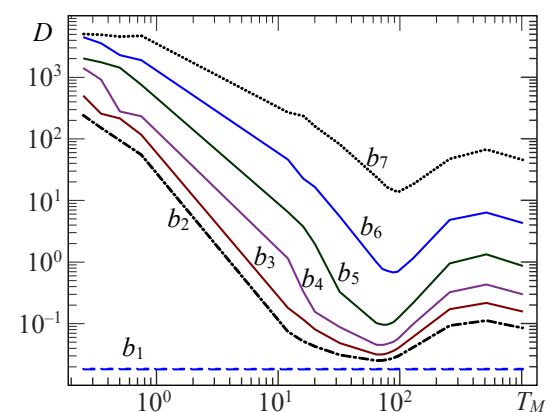


Рис. 16. Зависимость дисперсии D от T при $\tau = 0,1$; R_6 и значениях b (14): $b_1 = 0$; $b_2 = 0,0372$; $b_3 = 0,0625$; $b_4 = 0,1$; $b_5 = 0,2$; $b_6 = 0,5$; $b_7 = 2$

В табл. 15, 16 приведены значения параметров ФВЧ, которые обеспечивают минимальное значение времени регулирования.

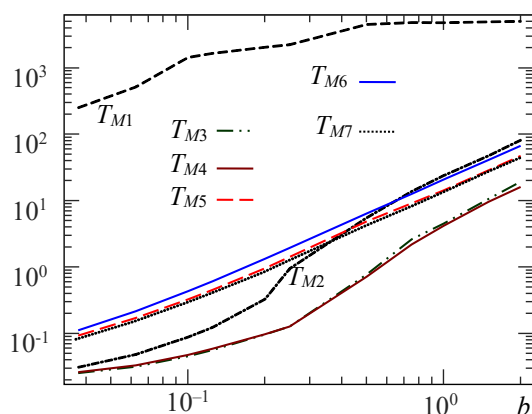


Рис. 17. Зависимость дисперсии D от b при $\tau = 0,1$; R_6 и значениях T_M : $T_{M1} = 0,25$; $T_{M2} = 32$; $T_{M3} = 72$; $T_{M4} = 80$; $T_{M5} = 256$; $T_{M6} = 512$; $T_{M7} = 1024$

В случае выбора для оптимизации произведения дисперсии на время регулирования, оптимальное значение T_M находится в пределах 64–72, а $b = 0,0372$. Минимизация по величине дисперсии приводит практически к тем же параметрам ФВЧ. Время переходного процесса останется на уровне значений, если бы не применялись ФОУ. Выбор таких параметров для управляемого ограничителя с динамическим изменением уровня ограничения позволяет снизить дисперсию на 6–35%.

Каскадный ФОУ (КФОУ). Как уже отмечалось выше, еще одним вариантом улучшения подавления шумов может быть каскадное использование ФОУ. В данной работе был проверен вариант с двумя управляемыми ограничителями. Результат эффективности применения данного решения можно видеть в табл. 17–20.

По времени переходного процесса КФОУ проигрывает несколько ФОУ (табл. 17, 19).

Таблица 15
Значение b для минимума ВВП

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	0,0625	0,1000	0,1000	0,1000	0,0625	0,0372	0,1000
1	0,0625	0,1000	0,1000	0,0372	0,0372	0,0372	0,1000
5	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,0625
15	0,0625	0,0625	0,0625	0,0372	0,1000	0,0625	0,1000

Таблица 16
Значение T_M для минимума ВВП

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	256	512	512	512	512	256	1024
1	256	512	512	256	256	256	1024
5	512	512	512	512	512	512	512
15	512	512	512	256	512	256	256

Таблица 17
Отношение времени переходного процесса с КФОУ и с ФОУ при минимизации по ВВП

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	1,103	1,025	1,065	1,121	1,029	1,089	1,077
1	1,011	1,013	1,066	1,096	1,026	1,067	1,083
5	1,007	1,050	1,054	1,046	1,008	1,042	1,056
15	1,037	1,024	1,020	1,006	1,009	1,018	1,027

Эффективность подавления помех обеспечивается лучше только в условиях сильного уровня помех (R_6, R_7 , табл. 18, 20).

Таблица 18
Отношение дисперсии с ФОУ и с КФОУ при минимизации по ВВП

τ	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	0,552	0,619	0,416	0,059	1,884	3,013
1	0,551	1,065	0,368	0,059	1,763	2,288
5	0,683	1,079	0,372	0,625	3,914	0,692
15	1,682	1,357	0,835	0,092	2,667	3,714

Таблица 19
Отношение времени переходного процесса с КФОУ при минимизации по ВВПД и с ФОУ по ВВП

τ	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	1,103	1,025	1,065	1,121	1,029	1,089	1,077
1	1,011	1,013	1,066	1,096	1,026	1,067	1,083
5	1,007	1,050	1,054	1,046	1,008	1,042	1,056
15	1,037	1,024	1,020	1,006	1,009	1,018	1,027

Выбор параметров для данной структуры по критерию ВВПД позволяет за счет незначительного ухудшения времени регулирования (табл. 19) намного улучшить подавление шума (табл. 20). Результаты почти сравнимы с КФОУ по этому параметру. Применение более совершенного поискового алгоритма может более точно ответить на потенциальную возможность структуры. Однако следует отметить, что структура КФОУ обеспечивает лучшую робастность при изменении параметров шума и динамики системы.

Таблица 20
Отношение дисперсии с ФОУ при минимизации по ВВПД и с КФОУ по ВВПД

τ	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
0,1	4,913	5,301	4,394	4,695	5,822	7,517
1	4,906	5,331	4,456	4,699	6,504	5,789
5	4,765	5,320	4,492	5,736	9,524	8,181
15	3,971	4,792	4,514	7,053	18,66	39,53

Оптимальное значение по критерию ВВП уровня ограничения a для первого каскада было в диапазоне 0,00015–0,0011 (среднее 0,00067), для второго каскада – 0,0001–0,00035 (0,00033). Постоянная времени первого каскада 0,009–0,600 (среднее 0,0536), для второго каскада второго 0,008–0,020 (среднее 0,0158).

Оптимальное значение по критерию ВВПД уровня ограничения a для первого каскада было в диапазоне 0,0001–0,0002 (среднее 0,000108), для второго каскада – 0,0001. Постоянная времени первого каскада 0,0225–0,1200 (среднее 0,0536), для второго каскада второго 0,002–0,011 (среднее 0,011).

Заключение. Предложенные структуры управляемых ограничителей показали себя достойными для практического использования. Из рассмотренных вариантов самые лучшие результаты продемонстрировал ДФОР. Применение для определения ФВЧ позволит получить еще больший эффект. Такие результаты может продемонстрировать и алгоритм квадратичного сглаживания, что будет проверено в следующих работах.

Применение сложных многопараметрических алгоритмов поиска может позволить одновременно оптимизировать параметры ПИД-регулятора и ДФОР и получить еще большую эффективность, однако такое решение имеет преимущественно теоретическую основу. При оптимизации, с учетом наличия случайной составляющей, можно будет наблюдать множество локальных экстремумов.

Для прикладного использования следует рекомендовать последовательный синтез.

1. Настройка ПИД-регулятора с учетом параметров шума с помощью интегрального критерия. Для этого лучше использовать метод, предложенный в [22–24]. Вариация только sample time может гарантировать минимум интегрального критерия. После этого получаем по формулам три настройки регулятора.

2. Находим настройки для статического ФОР, обеспечивая в первую очередь подавление шумов.

3. Настраиваем ФНЧ или другое решение для увеличения ограничения при динамических процессах и обеспечения быстрого действия.

Список литературы

1. Somefun O. A., Kayode A., Folasade D. The dilemma of PID tuning // Annual Reviews in Control. 2021. No. 52. P. 65–74.
2. A review of PID control, tuning methods and applications / R. P. Borase [et al.] // International Journal of Dynamics and Control. 2021. No. 9. P. 818–827.
3. Hu X., Hou G., Tan W. Tuning of PIDD² controllers for oscillatory systems with time delays // Frontiers in Control Engineering. 2023. No. 3. P. 32.
4. Feng W., O'reilly J., Balance D. J. MIMO nonlinear PID predictive controller // IEE Proceedings of Control Theory and Applications. 2002. Vol. 149, issue 3. P. 203–208. DOI: 10.1049/ip-cta:20020339.
5. Design and implementation of high-order PID for second-order processes with time delay / W. Han [et al.] // Frontiers in Control Engineering. 2022. Vol. 149. P. 1–12. DOI: 10.3389/fcteg.2022.953477.
6. Huba M., Vrancic D., Bistak P. PID control with higher order derivative degrees for IPDT plant models // IEEE Access. 2021. Vol. 9. P. 2478–2495. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3047351.
7. Liptak B. G. Process control and optimization. Vol. II. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2006. 2460 p.
8. Digital self-tuning controllers: algorithms, implementation and applications / V. Bobal [et al.]. Springer, 2005. 317 p.
9. King M. Process control: a practical approach. John Wiley & Sons, 2016. 620 p.
10. Soltesz K., Grimholt Ch., Skogestad S. Simultaneous design of PID controller and measurement filter by optimization // IET Control Theory and Applications. 2017. Vol. 11. P. 341–348. DOI: 10.1049/iet-cta.2016.0297.
11. Vrančić D., Huba M. High-order filtered PID controller tuning based on magnitude optimum // Mathematics. Vol. 9. P. 1340. DOI: 10.3390/math9121340.
12. Segovia V. R., Tor H., Karl J. A. Design of measurement noise filters for PID control // IFAC Proceedings. 2014. Vol. 47, no. 3. P. 8359–8364.
13. A measurement noise rejection method in the feedback control system based on noise observer / Z. Ning [et al.] // IEEE Sensors Journal. 2021. Vol. 21, issue 2. P. 1686–1693. DOI: 10.1109/JSEN.2020.3015837.
14. Моделирование и настройка систем с нелинейной динамикой / Д. А. Гринюк [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 2 (248). С. 65–71.
15. Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г. Использование алгоритмов аппроксимации для сглаживания трендов измерительных преобразователей // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2017. № 2 (200). С. 82–87.
16. Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г. Оптимизация процесса сглаживания сигналов // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 2 (248). С. 72–79.

17. Hryniuk D., Suhorukova I., Oliferovich N. Adaptive smoothing and filtering in transducers // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, Lithuania, 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/eStream39242.2016.7485917.
18. Hägglund T. Signal Filtering in PID Control // IFAC Proceedings Volumes (IFAC Papers-OnLine). 2012. Vol. 2, issue 3. P. 1–10. DOI: 10.3182/20120328-3-IT-3014.00002.
19. Оптимизация параметров фильтра с управляемым ограничителем для слабых сигналов / Д. А. Гринюк [и др.] // Наука и Техника. 2003. № 5. С. 32–34. DOI: 10.21122/2227-1031-2003-0-5-32-34.
20. Bialecki Y., Hryniuk D. Controlled Limiter in the Synchronous Detection Circuit // Science – Future of Lithuania Elektronika ir elektrotechnika Electronics and Electrical Engineering. 2017. Vol. 9, issue 3. P. 289–292.
21. Deadbeat регулятор с прогнозируемым уровнем сигнала управления / Н. М. Олиферович [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2018. № 2 (212). С. 89–95.
22. Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г. Метод настройки ПИД-регулятора через deadbeat-регулятор на различные интегральные критерии // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2019. № 2 (224). С. 66–73.
23. Hryniuk D., Oliferovich N., Suhorukova I. Approximation PID-Controllers through Deadbeat controller and its tuning // Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference Vilnius, Lithuania, 2019. P. 1–6. DOI: 10.1109/eStream.2019.8732172.
24. Hryniuk D., Oliferovich N., Suhorukova I. Deadbeat controller with a prescribed controlled variable for several steps // Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference Vilnius, Lithuania, 2020. P. 1–6. DOI: 10.1109/eStream50540.2020.9108878.

References

1. Somefun O. A., Kayode A., Folasade D. The dilemma of PID tuning. *Annual Reviews in Control*, 2021, vol. 52, pp. 65–74.
2. Borase R. P., Maghade D. K., Sondkar S. Y., Pawar S. N. A review of PID control, tuning methods and applications. *International Journal of Dynamics and Control*, 2021, vol. 9, pp. 818–827.
3. Hu X., Hou G., Tan W. Tuning of PID controllers for oscillatory systems with time delays. *Frontiers in Control Engineering*, 2023, vol. 3, p. 32.
4. Feng W., O'reilly J., Ballance DJ. MIMO nonlinear PID predictive controller. *IEE Proceedings of Control Theory and Applications*, 2002, vol. 149, no. 3, pp. 203–208.
5. Han W., Hu X., Damiran U., Tan W. Design and implementation of high-order PID for second-order processes with time delay. *Frontiers in Control Engineering*, 2022, vol. 149, pp. 1–12. DOI: 10.3389/fcteg.2022.953477.
6. Huba M., Vrancic D., Bistak P. PID control with higher order derivative degrees for IPDT plant models. *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 2478–2495. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3047351.
7. Liptak B. G. Process control and optimization. Vol. II. CRC Press, Taylor & Francis Publ., 2006. 2460 p.
8. Bobal V., Bohm J., Fessl J., Machacek J. Digital self-tuning controllers: algorithms, implementation and applications. Springer Publ., 2005. 317 p.
9. King M. Process control: a practical approach. John Wiley & Sons Publ., 2016. 620 p.
10. Soltész K., Grimholt Ch., Skogestad S. Simultaneous design of PID controller and measurement filter by optimization. *IET Control Theory and Applications*, 2017, vol. 11, pp. 341–348. DOI: 10.1049/iet-cta.2016.0297.
11. Vrančić D., Huba M. High-order filtered PID controller tuning based on magnitude optimum. *Mathematics*, vol. 9, p. 1340. DOI: 10.3390/math9121340.
12. Segovia V. R., Tor H., Karl J. A. Design of measurement noise filters for PID control. *IFAC Proceedings*, 2014, vol. 47, no. 3, p. 8359–8364.
13. Ning Z., Yao M., Huang Y., Zhou X., Zhang Ch. A measurement noise rejection method in the feedback control system based on noise observer. *IEEE Sensors Journal*, 2021, vol. 21, issue 2, pp. 1686–1693. DOI: 10.1109/JSEN.2020.3015837.
14. Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G., Orobei I. O. Modeling and tuning control objects with nonlinear dynamics. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2021, no. 2 (248), pp. 65–71 (In Russian).
15. Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Orobei I. O. The use of algorithmic approaches for smoothing of measurement information. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2 (200), pp. 82–87 (In Russian).
16. Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G. Signal smoothing optimization. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2021, no. 2 (248), pp. 72–79 (In Russian).

17. Hryniuk D., Suhorukova I., Oliferovich N. Adaptive smoothing and filtering in transducers. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, 2016, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream39242.2016.7485917.
18. Hägglund T. Signal Filtering in PID Control. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC Papers-OnLine)*. 2012, vol. 2, issue 3, pp. 1–10. DOI: 10.3182/20120328-3-IT-3014.00002.
19. Hryniuk D. A., Zharskii S. E., Orobei I. O., Strunevskaja T. N. Optimization of filter parameters with controlled saturation/limiter of low level signals. *Nauka i Tekhnika* [Science & Technique], 2003, no. 5, pp. 32–34. DOI: 10.21122/2227-1031-2003-0-5-32-34 (In Russian).
20. Bialecki Y., Hryniuk D. Controlled Limiter in the Synchronous Detection Circuit. *Science – Future of Lithuania Elektronika ir elektrotechnika Electronics and Electrical Engineering*, 2017, vol. 9, issue 3, pp. 289–292.
21. Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Orobei I. O., Suhorukova I. G. Deadbeat controller with predictable level of control signal. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 2 (212), pp. 89–95 (In Russian).
22. Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G. Method of PID-controller tuning through deadbeat-regulator for various integral criteria. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2019, no. 2 (224), pp. 66–73 (In Russian).
23. Hryniuk D., Oliferovich N., Suhorukova I. Approximation PID-controllers through deadbeat controller and its tuning. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, 2019, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2019.8732172.
24. Hryniuk D., Oliferovich N., Suhorukova I. Deadbeat controller with a prescribed controlled variable for several steps. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, 2020, pp. 1–6. DOI: 10.1109/eStream50540.2020.9108878.

Информация об авторах

Гринюк Дмитрий Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniukda@gmail.com

Олиферович Надежда Михайловна – старший преподаватель кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: oliferovich@belstu.by

Сухорукова Ирина Геннадьевна – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina_x@rambler.ru

Дейнека Татьяна Александровна – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tdein@rambler.ru.

Клютко Михаил Викторович – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: mkliutko@gmail.com

Information about the authors

Hryniuk Dzmitry Anatol'yevich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

Oliferovich Nadezhda Mikhaylovna – Senior Lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oliferovich@belstu.by

Suhorukova Irina Gennad'yevna – Senior Lecturer, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina_x@rambler.ru

Deineka Tatyana Aleksandrovna – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tdein@rambler.ru.

Klyutko Mikhail Viktorovich – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mkliutko@gmail.com

Поступила после доработки 15.05.2023

УДК 681.53

Н. М. Олиферович, Д. А. Гринюк, К. А. Базарбаев, И. О. Оробей, И. Г. Сухорукова
Белорусский государственный технологический университет

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ

В статье проведено сравнение разных подходов к активной идентификации в условиях явного проявления нелинейных свойств теплового объекта и средств измерения. В исследованиях рассматривался вариант выбора методов, которые пригодны для идентификации динамики в режиме реального времени.

Идентификация объекта производилась тремя методами. Первый метод предполагает непрерывное формирование меандрового сигнала. Изменялся период меандрового сигнала с целью выявления его минимального значения для обеспечения устойчивой идентификации. Для получения параметров передаточной функции был использован метод минимизации переходных процессов за несколько периодов. Поскольку объект проявлял флуктуацию характеристики в течение периода одного меандра, была выполнена компенсация путем аппроксимации квадратичной зависимостью методом наименьших квадратов. Данное решение позволило обеспечить меньшую вариацию результатов идентификации в течение времени наблюдения.

В качестве второго и третьего метода была использована частотная идентификация параметров передаточной функции с помощью формирования четырех сигналов разной частоты, которые не были кратны гармонике. Во втором случае сигналы были гармонические с амплитудами, которые примерно обратны коэффициентам передачи частотной характеристики объекта исследования. Третий вариант предполагал использование сигналов той же частоты, но прямоугольной формы. По результатам полученной частотной характеристики производилось определение параметров передаточной функции. Компенсация долговременных трендов позволила повысить качество идентификации. Использование прямоугольных сигналов обеспечило большее количество точек на амплитудной характеристике и устойчивость определения параметров динамики.

Ключевые слова: нелинейная динамика, идентификация, динамика воздушного теплообменника.

Для цитирования: Олиферович Н. М., Гринюк Д. А., Базарбаев К. А., Оробей И. О., Сухорукова И. Г. Сравнительный анализ алгоритмов идентификации объектов с нелинейной динамикой // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 71–79. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-11.

N. M. Oliferovich, D. A. Hryniuk, Q. A. Bazarbaev, I. O. Orobei, I. G. Suhorukova

Belarusian State Technological University

COMPARATIVE ANALYSIS OF ALGORITHMS FOR OBJECTS WITH NONLINEAR DYNAMICS IDENTIFICATION

The article compares different approaches to active identification under the conditions of an explicit manifestation of the nonlinear properties of a thermal object and measuring instruments. The studies considered the choice of methods that are suitable for identifying dynamics in real time.

The object identification was carried out by three methods. The first method involves the continuous formation of a meander signal. The period of the meander signal was changed in order to identify its minimum value to ensure stable identification. To obtain the parameters of the transfer function, the method of minimizing transient processes for several periods was used. Since the object exhibited characteristic fluctuations during the period of one meander, compensation was made by approximating the quadratic dependence using the least squares method. This decision made it possible to provide a smaller variation in the identification results during the observation time.

As the second and third methods, frequency identification of the transfer function parameters was used by forming four signals of different frequencies, which are not multiple harmonics. In the second case, the signals were harmonic with amplitudes that are approximately inverse to the transfer coefficients of the frequency response of the object of study. The third option involved the use of signals of the same frequency, but of a rectangular shape. Based on the results of the obtained frequency response, the parameters of the transfer function were determined. Compensation of long-term trends has improved

the quality of identification. The use of rectangular signals provided a greater number of points on the amplitude characteristic and the stability of determining the dynamics parameters.

Keywords: nonlinear dynamics, identification, heat exchanger dynamics.

For citation: Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Bazarbaev Q. A., Orobei I. O., Suhorukova I. G. Comparative analysis of algorithms for objects with nonlinear dynamics identification. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 71–79. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-11 (In Russian).

Введение. Идентификация процесса, или системная идентификация, является очень активной областью исследований с широкими вариантами для построения алгоритмов [1–9]. Идентификация процесса – это методология и приемы выбора исходя из входных и выходных данных процесса и с учетом определенного критерия, математической модели заданного типа, которая может наилучшим образом представить реальный процесс (точнее, данные процесса). Таким образом, для идентификации процесса используются следующие три компонента.

1. Данные процесса. Поскольку идентификация процесса является методом анализа данных, их качество определяет качество окончательной модели. Целью идентификации процесса (черного ящика) является «ввод данных, вывод модели». Однако, если данные процесса не содержат достаточно полной информации, идентификация процесса часто может стать «мусором на входе и мусором на выходе».

2. Модель процесса. Процесс может быть представлен различными моделями, такими как линейная или нелинейная, переменная во времени или неизменная во времени, детерминированная или стохастическая, дискретная или непрерывная, временная или частотная, с сосредоточенными или с распределенными параметрами, описываемыми разностным уравнением или дифференциальным уравнением, вводом-выводом или с пространством состояний [10]. Однако наиболее часто используемым типом модели для идентификации процесса являются линейные, инвариантные во времени (LTI) разностные уравнения.

3. Критерии. Идентификация процесса направлена на поиск математической модели, которая «наиболее точно» аппроксимирует взаимосвязь между входными и выходными данными процесса. Критерий определяет, в каком смысле модель является «лучшей». Часто для этих целей используют понятие «адекватность модели». Наиболее часто используемым критерием для идентификации процесса является критерий наименьших квадратов, квадратичная функция ошибок оценивания. Другими словами, идентификация процесса – это метод, управляемый данными, при котором процесс «черного ящика» систематически нарушается и собираются ответные данные. После чего динамическое причинно-следственное

поведение абстрагируется в математическую модель, основанную на входных/выходных ответных данных при допущении конкретной структуры модели и определенных критериев согласия [11].

Классификация методов идентификации. Поскольку разработано много типов моделей процессов, существует также множество способов получения моделей процессов. Статические модели обычно разрабатываются на основе теории процессов или инженерных экспериментов. Статические коэффициенты уравнения обычно определяются по экспериментальным данным с помощью, например, линейной регрессии, решением нелинейных уравнений и т. д. Коэффициенты динамики могут быть также получены посредством теоретического моделирования или экспериментальной идентификации процесса. Теоретическое моделирование базируется на основании возможности описать физические явления объекта набором дифференциальных уравнений. Другим вариантом является идентификация динамики на основе экспериментальных данных, построение модели на основе физических знаний о поведении процесса, тогда как идентификация процесса строит модель на основе данных о процессе. Первый вариант называют «белым» ящиком, а второй – «черным». Между этими крайними точками существуют различные промежуточные варианты («серые» ящики). Информация о структуре сложного объекта может быть получена из теории, тогда как значения модели – из экспериментальных данных. К «серым» ящикам можно отнести имитационное моделирование сложных систем на основании теоретических уравнений и получение коэффициентов модели динамики, пригодных для практического использования по результатам обработки результатов численного моделирования.

Методы идентификации можно классифицировать по разным критериям:

- структурная и параметрическая;
- получение параметров моделей после проведения эксперимента или непрерывный анализ;
- идентификация параметров линейной или нелинейной модели;
- пассивное наблюдение за объектом или активное воздействие по управляющим каналам на объект.

Активная идентификация может проводиться с помощью ступенчатых (детерминированных), частотных или случайных воздействий. Иногда форма детерминированных воздействий может варьироваться в зависимости от свойств объекта и особенностей эксплуатации объекта.

В последнее время начала активно развиваться идентификация нелинейных свойств объектов для обеспечения их качественного управления.

Исторически системная идентификация для нелинейных систем [11, 12] развивалась путем сосредоточения внимания на определенных классах систем. В целом можно выделить пять основных подходов, каждый из которых определяется классом модели: модели серии Вольтерра, блочные модели, нейросетевые модели, модели NARMAX и модели в пространстве состояний. Классификация методов идентификации нелинейных моделей не является устоявшейся. В литературе можно встретить и другие подходы. Например, в работе [13] представлен подход на основании получаемого результата. Так, результатом параметрической идентификации нелинейных моделей могут быть: дифференциальные уравнения, NARMAX-модели, вейвлет-модели, ANN-модели. При непараметрической идентификации: модели на основе рядов Вальтера, модели в виде фазовых портретов, частотные характеристики, разгонные характеристики. К полупараметрическим моделям относят модели на нечеткой логике и нейро-нечеткие модели. В блок-ориентированных подходах выделяют: модели Гаммерштайна (Хаммерстайна, Hammerstein); Винера и Хаммерстайна – Винера [7].

Хотя есть много вещей, связанных с машинным обучением, статистическим обучением и другими областями, каждая область имеет свои особенности.

Под NARMAX-моделями понимают нелинейный вариант моделей авторегрессии со скользящим средним и экзогенным вводом. Идентификация данных моделей предусматривает несколько этапов: 1) динамические тесты и сбор данных; 2) выбор математического представления; 3) определение структуры модели; 4) оценка параметров; 5) проверка; 6) анализ модели.

Данные модели очень популярны в современной литературе, и можно встретить большое количество вариаций алгоритмов реализации.

Artificial neural network (ANN) – упрощенная модель биологической нейронной сети, представляющая собой совокупность искусственных нейронов, взаимодействующих между собой. Это направление активно развивается на фоне общего интереса к нейронным сетям.

Идентификация динамики технологических объектов. Идентификация на практическом

уровне требует от пользователя осуществить рациональный выбор типа модели, способа определения ее параметров, критерия оценки адекватности модели исходя из места ее приложения. Наиболее часто проблема идентификации стоит перед разработчиками систем управления, поэтому большинство книг управления содержат разделы по идентификации объектов управления [2, 10]. А в связи развитием возможностей вычислительной техники большинство современных средств регулирования содержат в том или ином виде встроенные механизмы идентификации каналов управления с автоподстройкой настроек регуляторов.

В [14, 15] был предложен способ идентификации в реальном времени на основании формирования смеси гармонических сигналов с целью определения динамических характеристик каналов управления, а также проведены испытания данного подхода на тепловом объекте [16, 17]. Идентификация с помощью гармонических сигналов также представлена в других вариантах [18]. Несмотря на положительный результат, использование гармонических сигналов не позволяет получить оценку нелинейных параметров объекта.

С этой целью, в том же ключе, как и гармонические сигналы, можно использовать смесь меандровых (ступенчатых) сигналов. Такой подход к оценке динамики может позволить получить более робастный процесс идентификации за счет использования в условиях высокого проявления квантования входными АЦП микропроцессорных средств регулирования малых возмущений.

Использование ступенчатых сигналов может позволить производить оценку нелинейности динамики объекта управления за счет изменения скважности меандрового сигнала.

Эксперимент. Объектом параметрической идентификации, как и прошлых экспериментах [16, 17, 19, 20], был тот же воздушный теплообменник, значение температуры которого на выходе можно контролировать с помощью двух датчиков температуры с металлической штангой θ_1 и на объекте. Сигналы этих датчиков обрабатываются разными аналогово-цифровыми преобразователями. Активное воздействие на температуру производилось путем управления частотой вентилятора.

Объект характеризуется определенной стохастичностью динамики, так как, несмотря на то, что воздушный теплообменник находится в помещении, но в течение даже нескольких часов нельзя обеспечить постоянство процессов теплообмена. Перед началом эксперимента объект прогревался в течение времени, превышающего время разгона. Оценка динамики производилась

во всех экспериментах путем смещения от одного и того же значения частоты питающего напряжения двигателя вентилятора ($f = 16,28$ Гц). Для идентификации были использованы три варианта:

- классический одиночный меандровый сигнал со смещением в ту и другую стороны от стационарного значения с поддержанием отклонения до окончания переходного процесса;

- смесь четырех меандровых сигналов с коэффициентом скважности 0,5. Амплитуда первого сигнала $\pm 0,226$ Гц питающего напряжения, частота и амплитуда второго сигнала в $\sqrt{2}$ и 1,5 больше соответственно. Третий имеет амплитуду в 4 раза больше, чем первый, а частоту в $\sqrt{6}$ больше первого. А последнего, четвертого, частота выше в $\sqrt{30}$;

- смесь четырех гармонических сигналов со значениями частот и соотношением амплитуд, как у предыдущего варианта. Амплитудное значение гармонических сигналов $\sqrt{2}$ больше у меандровых для сохранения одинакового энергетического воздействия на объект исследования.

В процессе проведения экспериментов изменялся период сигналов активной идентификации. Для второго и третьего вариантов проводились испытания при пропорциональном увеличении амплитуд всех тестовых сигналов для каждого из вариантов идентификации.

Обработка результатов и обсуждение. При классическом подходе к идентификации (КИ) амплитуда температуры менялась не более чем на 2°C . Обработка результатов первого варианта проводилась путем аппроксимации экспериментальных данных апериодическим звеном второго порядка с постоянными T_1 и T_2 . В данном варианте изменение частоты вентилятора происходило 5–7 раз. За это время динамика канала варьировалась. Проводился поиск оси усреднения температур θ_{11} и θ_{21} .

Поскольку среднее значение в течение отдельных экспериментов плавало (рис. 1), то для уменьшения данного аспекта на результат аппроксимации было предложено аппроксимировать весь период квадратичной функцией по методу наименьших квадратов и произвести коррекцию для датчиков по отдельности θ_{12} и θ_{22} [21, 22]. Затем производилось вычитание. Это дало положительный эффект: ошибка аппроксимации err уменьшилась (табл. 1) для варианта с периодом 3500 с (рис. 1). В опыте с периодом 4500 с (рис. 2) наблюдается дрейф среднего значения температуры в течение эксперимента, но не столь значительный. Коррекция по данному параметру не позволила значительно уменьшить ошибку аппроксимации.

Следует отметить, что выбранный подход получения значений передаточной функции объекта управления рационален с практической точки зрения, однако даже визуально наблюдаются несовпадения исходных трендов и результатов аппроксимации. Особенно в точках выхода на установившееся значение. Увеличение длительности меандрового сигнала позволяет более адекватно определять коэффициент передачи объекта k . Динамические параметры практически совпадают.

Таблица 1

Идентификация при периоде меандра 3500 с

Параметр	T_1	T_2	k	err
θ_{11}	355,0	264,1	–1,439	0,1293
θ_{21}	255,2	365,2	–1,491	0,1263
θ_{12}	373,6	207,2	–1,316	0,0978
θ_{22}	504,5	135,5	–1,481	0,1047

Таблица 2

Идентификация при периоде меандра 4500 с

Параметр	T_1	T_2	k	err
θ_{11}	300,0	264,2	–1,421	0,0848
θ_{21}	450,0	150,0	–1,564	0,0767
θ_{12}	296,2	264,2	–1,383	0,0823
θ_{22}	504,5	107,4	–1,556	0,0870

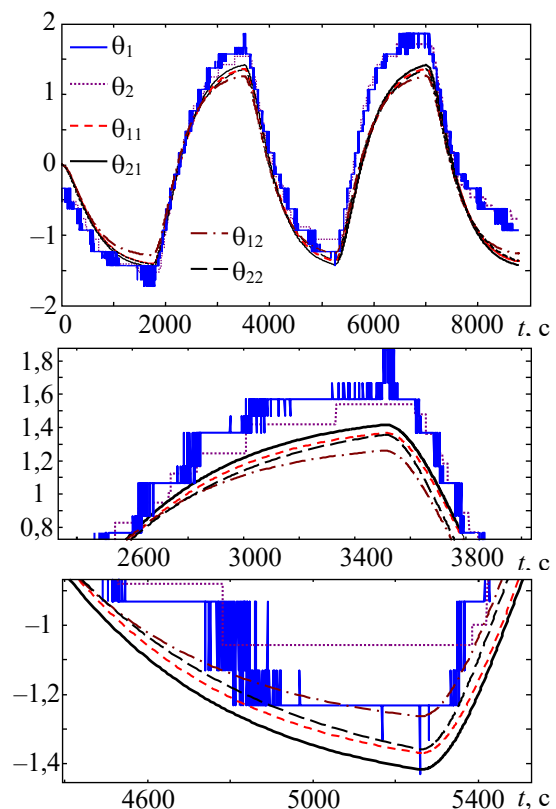


Рис. 1. Измерительные тренды и результаты их аппроксимации при периоде 3500 с

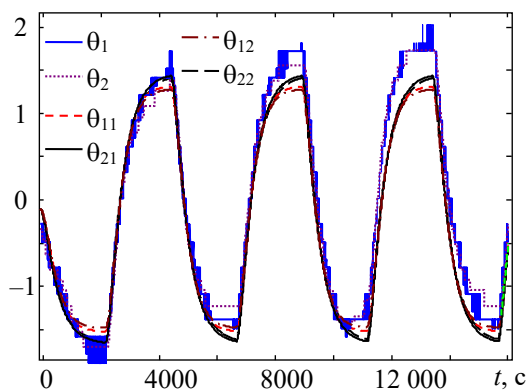


Рис. 2. Измерительные тренды и результаты их аппроксимации при периоде 4500 с

Проблема качества аппроксимации в большей степени обусловлена нелинейностью объекта управления. Для таких объектов следует использовать алгоритмы идентификации в реальном времени, которые будут учитывать свойства подобных объектов. Передаточная функция с усредненными параметрами, которая получена в ходе обработки результатов экспериментов, вполне позволяет решать актуальную задачу поиска и корректировки настроек регулятора стабилизации при таком построении объекта. Недостатком данного подхода является необходимость существенного длительного отклонения выходного параметра, что в условиях реальных объектов не всегда приемлемо. В случае повышенных требований к качеству регулирования следует учитывать нелинейные свойства объекта.

Гармоническая идентификация (ГИ) параметров динамики объектов регулирования уже обсуждалась [16, 17]. И в одном, и в другом случае (рис. 3) мы столкнулись с проблемой, что алгоритм хорошо работает на линейных моделях, пускай и с наличием квантования, но не всегда приемлем к нелинейным объектам.

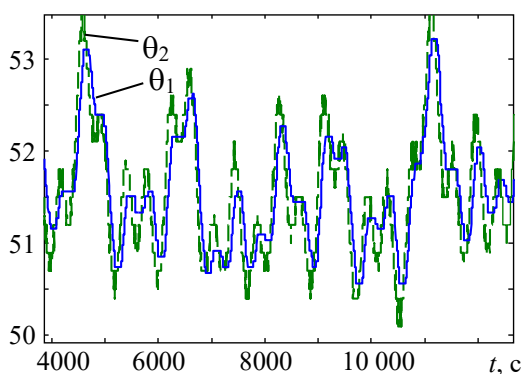


Рис. 3. Один из измерительных трендов температуры при ГИ

Для получения значений передаточной функции объекта временной тренд от воздействия 4–5 гармонических сигналов умножался

на соответствующие синусоидальные сигналы и суммировался за 1–4 периода. Затем по полученному спектру производилась аппроксимация передаточной функцией второго порядка.

В результате идентификации постоянные времени колебались в широком диапазоне (табл. 3). Наибольшие расхождения с предыдущими результатами наблюдались в определении коэффициента передачи объекта. Выбранные частоты для его характеристики не подходят.

Таблица 3

Результаты ГИ при опорном периоде 3500 с

Параметр	Усред.	T_1	T_2	k	err
θ_{11}	4	376,5	196,9	-6,85	$8,97 \cdot 10^{-4}$
θ_{21}		307,2	219,8	-6,61	$1,4 \cdot 10^{-3}$
θ_{12}		378,5	182,3	-5,87	$2,46 \cdot 10^{-4}$
θ_{22}		414,8	129	-6,25	$8,03 \cdot 10^{-4}$
θ_{11}	3	396,0	73,1	-4,83	$2,50 \cdot 10^{-4}$
θ_{21}		283,5	188,5	-4,93	$6,64 \cdot 10^{-4}$
θ_{12}		294,9	180,0	-4,71	$1,30 \cdot 10^{-4}$
θ_{22}		528,5	49,92	-6,01	$5,07 \cdot 10^{-4}$
θ_{11}	2	284,2	211,7	-6,31	$4,67 \cdot 10^{-3}$
θ_{21}		337	179,7	-6,92	$6,86 \cdot 10^{-3}$
θ_{12}		249,3	226,3	-5,36	$2,98 \cdot 10^{-3}$
θ_{22}		304,5	163,2	-5,44	$4,07 \cdot 10^{-3}$
θ_{11}	1	218,6	203,1	-6,17	$1,24 \cdot 10^{-2}$
θ_{21}		236,1	181,7	-6,6	$1,24 \cdot 10^{-2}$
θ_{12}		146,1	77,79	-1,99	$4,40 \cdot 10^{-3}$
θ_{22}		119	48,42	-1,88	$4,80 \cdot 10^{-3}$

Третий вариант идентификации (ММИ) предполагал одновременное использование множества меандровых сигналов, как и для ГИ. Визуально колебания температуры имели тот же вид, что и при гармонической идентификации (рис. 4).

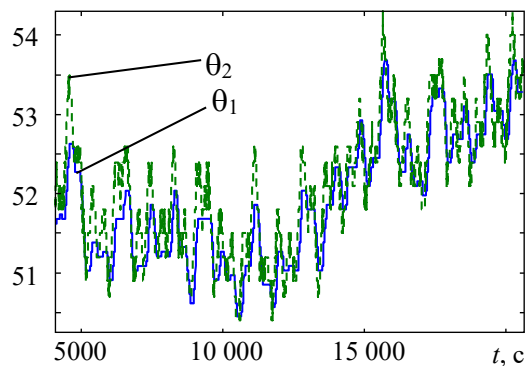


Рис. 4. Один из измерительных трендов температуры при ММИ

Использование для идентификации смеси меандровых сигналов призвано повысить робастность идентификации данного подхода. Как

было показано в [15], для успешной идентификации требуется актуальная информация по всему спектру частотной характеристики объекта наблюдения. Чем больше точек на АЧХ, тем адекватнее может производиться оценка динамики в реальном времени.

Обработка данных может быть осуществлена разными способами. В отличие от гармонических сигналов, меандровый сигнал формирует сразу несколько гармонических сигналов, которые могут быть хорошо выделены с помощью методов спектрального анализа. Поскольку меандровые сигналы идентификации имели скважность 2, то формально должны быть только нечетные гармоники, однако мощность четных гармоник соизмерима с нечетными вследствие наличия в объекте нелинейностей. Выбранные частоты меандровых сигналов не формируют совпадающих гармоник по частоте от разных меандров в диапазоне частотной характеристики объекта управления, по этой причине хорошо выделялись их амплитуды путем умножения измерительного тренда на синус и косинус соответствующей частоты на диапазоне 1–2 периодов самого медленного меандра. Выделенные амплитуды корректировались с учетом подаваемых амплитуд и с учетом разложения меандра в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k 2\pi f t)}{k}, \quad (1)$$

где t – время; A – амплитуда; k – номер гармоники; f – частота сигнала.

Полученные амплитуды от разных меандров сортировались по частотам и аппроксимировались частотной характеристикой подобно предыдущему варианту (рис. 5).

Как и в предыдущих вариантах, при обработке производилась компенсация долгосрочного тренда с помощью метода наименьших участков, получения квадратичной зависимости на участке компенсации. Робастность идентификации повышалась, как и ранее, существенно снижая сбойные случаи.

Для устойчивой идентификации динамики при ММИ было достаточно 1–2 периодов исходных данных. Коэффициент усиления определялся близко к первому методу. Вопросом было определение оптимального значения количества гармоник получения устойчивой схемы идентификации. В табл. 4 представлены варианты:

$V1$ – для первого меандра определялись 1, 3, ..., 19 гармоники; для второго – 1, 3, ..., 13; для второго – 1, 3, 5, 7; для четвертого – 1, 3;

$V2$ – для первого меандра определялись 1, 3, 5, ..., 15 гармоники; для второго – 1, 3, 5, 7, 9; для второго – 1, 3, 5; для четвертого – 1.

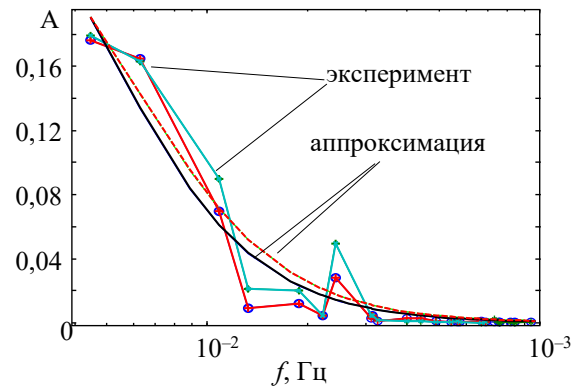


Рис. 5. Пример экспериментальных гармоник и их аппроксимации

Таблица 4

Результаты ММИ при опорном периоде 3500 с

Параметр	Усред.	T_1	T_2	k	err
$\theta_{12}(V1)$	1	165,4	158,1	-1,88	$7,34 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{22}(V1)$		151,3	139,7	2,03	$10,3 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{12}(V2)$		164,9	157,4	-1,88	$7,31 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{22}(V2)$		151,0	138,9	-2,03	$10,3 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{12}(V1)$	2	221,4	219,9	-2,48	$4,66 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{22}(V1)$		233,1	231,5	-3,15	$6,31 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{12}(V2)$		221,4	219,3	-2,48	$4,7 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{22}(V2)$		232,9	231,1	-3,14	$6,35 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{12}(V1)$	3	237,7	236,2	-2,55	$6,07 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{22}(V1)$		244,9	243,0	-3,16	$6,17 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{12}(V2)$		238,5	237,0	-2,58	$6,02 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{22}(V2)$		244,7	242,7	-3,16	$6,16 \cdot 10^{-3}$

На рис. 6 представлены логарифмические характеристики объекта идентификации, которые были получены с использованием ММИ для $V1$ и $V2$ при усреднении за два периода и при КИ.

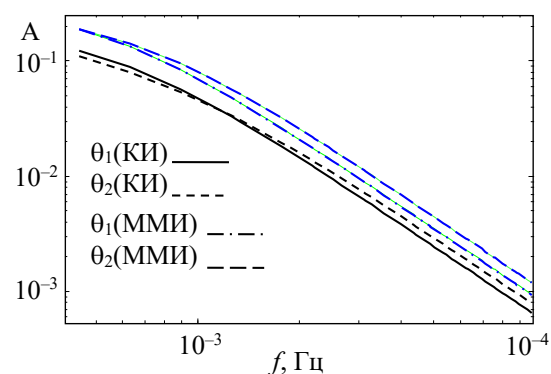


Рис. 6. Результаты идентификации по КИ и ММИ

Следует понимать, что в численной оценке параметров динамики предложенными методами существует проблема оценки ошибки идентификации, поскольку ни один из методов не является точным. Динамические параметры данного объекта подвержены вариации. Во всех экспериментах присутствует различный динамический характер

отклонений, что не может не сказываться на результатах идентификации. Результаты для $I/1$ и $I/2$ имеют мало отличий (табл. 4 и рис. 5), что свидетельствует об отсутствии необходимости учета большого количества гармоник при идентификации.

В целом следует при формировании тестового набора гармоник использовать большее значение шага между частотами для повышения устойчивости идентификации. При необходимости определения степени нелинейности динамических характеристик метод ММИ имеет больше перспектив, так как путем анализа мощности вторичных гармоник или амплитуды четных гармоник можно подбирать скважность меандров для из минимизации, что может служить параметром

оценки степени нелинейности динамики [23]. Для ГИ также существуют варианты оценки нелинейности при использовании информации о мощности вторичных гармоник, которые образуются при прохождении через нелинейные объекты.

Заключение. Проведенные исследования показали, что использование предварительной обработки измерительных данных с объекта идентификации с целью исключения долговременных трендов позволяет повысить робастность и адекватность получаемых коэффициентов. Метод ММИ более устойчив к адекватности оценки характеристик по сравнению с ГИ и не требует длительных больших отклонений, как КИ, влияние квантования входных сигналов для его тоже не будет столь чувствительно, как для КИ.

Список литературы

1. Lennart L. System Identification: Theory for the User. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall PTR, 1999. 609 p.
2. Niu S., Fisher D. G., Xiao D. An augmented UD identification algorithm // International Journal of Control. 1992. Vol. 56, issue 1. 193–211.
3. Mikles J., Fikar M. Process Modelling, identification, and control. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 497 p.
4. Лобатый А. А., Степанов В. Ю. Параметрическая идентификация стохастической системы неградиентным случайным поиском // Наука и Техника. 2017. № 16 (3). С. 256–261. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-3-256-261.
5. Niu S. Process Control Engineering Analyses. Best Practices, 2022. 501 p.
6. Балакирев В. С., Дудников Е. Г., Цирлин А. М. Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления. М.: Энергия, 1967. 232 с.
7. Коплярова Н. В., Сергеева Н. А. Непараметрические алгоритмы идентификации систем класса Винера и Гаммерштейна // Системы управления и информационные технологии. 2013. № 2.1 (52). С. 133–137.
8. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1. Математические модели, динамические характеристики и анализ систем управления / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 656 с.
9. Keesman K. J. System identification. An introduction. London: Springer, 2011. 351 p.
10. Corriou JP. Process control – theory and applications. Springer, 2017. 866 p.
11. Nelles O. Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks. Springer-Verlag, 2001. 785 p.
12. Billings S. A. Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains. Wiley, 2013. 576 p.
13. Joanofarc X., Patnaik S., Panda R. Process Modeling, identification methods, and control schemes for nonlinear physical systems – a comprehensive review // ChemBioEng Reviews. 2021. Vol. 8, issue 4. P. 1–21. DOI:10.1002/cben.202000017.
14. Олиферович Н. М., Гринюк Д. А., Оробей И. О. Гармоническая идентификация технологических объектов в реальном времени // Труды БГТУ. 2016. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. № 6 (188). С. 117–121.
15. Oliferovich N., Hryniuk D., Orobei I. Harmonic identification of technological objects in real time // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, Lithuania, 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/eStream39242.2016.7485915.
16. Олиферович Н. М., Гринюк Д. А., Оробей И. О. Алгоритмы гармонической идентификации для технологических объектов и их апробация на тепловом объекте // Труды БГТУ. 2017. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. № 2 (200). С. 76–81.
17. Oliferovich N., Hryniuk D., Orobei I. The use of harmonic identification algorithms to air heat exchanger // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, Lithuania, 2017. P. 1–5. DOI: 10.1109/eStream.2017.7950326.

18. Марков А. В., Симаньков В. И. Параметрическая идентификация динамических объектов по фазочастотным характеристикам // Доклады БГУИР. 2015. № 3 (89). С. 29–35.
19. Marozava M., Hryniuk D. Experimental study of the variation dynamic's for air heat exchanger // Science – Future of Lithuania Elektronika ir elektrotechnika Electronics and Electrical Engineering. 2017. Vol. 9, issue 3. P. 297–301.
20. Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г., Оробей И. О. Идентификация параметров динамических каналов воздушного теплообменника // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 70–79.
21. Hryniuk D., Suhorukova I., Oliferovich N. Adaptive smoothing and filtering in transducers // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, Lithuania, 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/eStream39242.2016.7485917.
22. Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г. Использование алгоритмов аппроксимации для сглаживания трендов измерительных преобразователей // Труды БГТУ. 2017. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. № 2 (200). С. 82–87.
23. Моделирование и настройка систем с нелинейной динамикой / Д. А. Гринюк [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 2 (248). С. 65–71.

References

1. Lennart L. System Identification: Theory for the User. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall PTR Publ., 1999. 609 p.
2. Niu S., Fisher DG., Xiao D. An augmented UD identification algorithm. *International Journal of Control.*, 1992, vol. 56, issue 1, pp. 193–211.
3. Mikles J., Fikar M. Process Modelling, identification, and control. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 2007. 497 p.
4. Lobaty A. A., Stepanov V. Y. Parametric identification of stochastic system by non-gradient random searching. *Nauka i Tekhnika* [Science & Technique], 2017, no. 16 (3), pp. 256–261. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-3-256-261 (In Russian).
5. Niu S. Process Control Engineering Analyses. Best Practices, 2022. 501 p.
6. Balakirev V. S., Dudnikov E. G., Tsirlin A. M. *Ekspериментal'noye opredeleniye dinamicheskikh kharakteristik promyshlennykh ob"ektov upravleniya* [Experimental determination of the dynamic characteristics of industrial control objects]. Moscow, Energiya Publ., 1967. 232 p. (In Russian).
7. Kopyarova N. V., Sergeeva N. A. Nonparametric algorithms of Wiener and Hammerstein type systems identification. *Sistemy upravleniya i informatsionnyye tekhnologii* [Control systems and information technologies], 2013, no. 2 (52), pp. 133–137 (In Russian).
8. Pupkova K. A., Egupova N. D. *Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Methods of classical and modern theory of automatic control]. Moscow, the Bauman University Publ., 2004. 656 p. (In Russian).
9. Keesman K. J. System identification. An introduction. London, Springer Publ., 2011. 351 p.
10. Corriou JP. Process control – theory and applications. 2nd ed. Springer Publ., 2017. 866 p.
11. Nelles O. Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks. Springer-Verlag Publ., 2001. 785 p.
12. Billings S. A. Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains. Wiley, 2013. 576 p.
13. Joanofarc X., Patnaik S., Panda R. Process Modeling, identification methods, and control schemes for nonlinear physical systems – a comprehensive review. *ChemBioEng Reviews*, 2021, vol. 8, issue 4, pp. 1–21. DOI:10.1002/cben.202000017.
14. Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Orobei I. O. Harmonic identification of technological objects in real time. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 117–121 (In Russian).
15. Oliferovich N., Hryniuk D., I. Orobei. Harmonic identification of technological objects in real time. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, 2016, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream39242.2016.7485915.
16. Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Orobei I. O. Harmonic identification algorithms for technological objects and their approbation on a thermal object. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2017, no. 2: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 76–81 (In Russian).
17. Oliferovich N., Hryniuk D., I. Orobei. The use of harmonic identification algorithms to air heat exchanger. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, 2017, pp. 1–5. DOI: 10.1109/eStream.2017.7950326.

18. Markov A. V., Simankov V. I. Parametric identification of dynamic objects via phase-frequency characteristic. *Doklady BGUIR* [[Proceedings of BSUIR], 2015, no. 3, pp. 29–35 (In Russian).

19. Marozava M., Hryniuk D. Experimental study of the variation dynamic's for air heat exchanger. *Science – Future of Lithuania Elektronika ir elektrotechnika Electronics and Electrical Engineering*, 2017, vol. 9, issue 3, pp. 297–301.

20. Hryniuk D. A., Olyferovich N. M., Suhorukova I. G., Orobei I. O. Identification of the dynamic channels parameter's for the airflow heat exchanger. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, *Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 2 (260), pp. 70–79 (In Russian).

21. Hryniuk D., Suhorukova I., Olyferovich N. Adaptive smoothing and filtering in transducers. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, 2016, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream39242.2016.7485917.

22. Hryniuk D. A., Olyferovich N. M., Suhorukova I. G. Method of PID-controller tuning through deadbeat-regulator for various integral criteria. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, *Physics and Mathematics. Informatics*, 2019, no. 2 (224), pp. 66–73 (In Russian).

23. Hryniuk D. A., Olyferovich N. M., Suhorukova I. G., Orobei I. O. Modeling and tuning control objects with nonlinear dynamics. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, *Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 2 (248), pp. 65–71 (In Russian).

Информация об авторах

Олиферович Надежда Михайловна – старший преподаватель кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olyferovich@belstu.by

Гринюк Дмитрий Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniukda@gmail.com

Базарбаев Кабылбек Аманлык улы – магистрант кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: kabulbazarbaev@gmail.com

Оробей Игорь Олегович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: orobei@tut.

Сухорукова Ирина Геннадьевна – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina_x@rambler.ru

Information about the authors

Olyferovich Nadezhda Mikhaylovna – Senior Lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olyferovich@belstu.by

Hryniuk Dzmitry Anatol'yevich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniukda@gmail.com

Bazarbaev Qabilbek Amanlyl uly – Master's degree student the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). kabulbazarbaev@gmail.com

Orobei Igor Olegovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orobei@gmail.com.

Suhorukova Irina Gennad'yevna – Senior Lecturer, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina_x@rambler.ru

Поступила после доработки 15.06.2023

УДК 004.021

В. В. Смелова, Д. В. Шиман

Белорусский государственный технологический университет

**НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОРРЕКТНОГО РЕШЕНИЯ
БАЛАНСОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПЛАНА ВАЛОВОГО
ОБЪЕМА ПРОДУКЦИИ ИННОВАЦИОННО-ПРОМЫШЛЕННОГО КЛАСТЕРА**

Инновационно-промышленный кластер – объединение субъектов хозяйствования с целью эффективного взаимодействия и совместного устойчивого развития. Для планирования валового объема продукции кластера предлагается использовать метод, основанный на балансовой модели Леонтьева. Применение метода сводится к решению системы линейных уравнений большой размерности. В статье исследуются проблемы, возникающие при решении такой системы уравнений, вводятся понятия корректного балансового уравнения и корректного плана, формулируется и формально доказывается необходимое условие его существования, а также дается экономическая интерпретация этого условия.

Ключевые слова: инновационно-промышленный кластер, балансовая модель Леонтьева, система линейных уравнений, ориентированный граф, циклы в графе.

Для цитирования: Смелова В. В., Шиман Д. В. Необходимое условие существования корректного решения балансового уравнения при вычислении плана валового объема продукции инновационно-промышленного кластера // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 80–88. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-12.

V. V. Smelova, D. V. Shiman

Belarusian State Technological University

**NECESSARY CONDITION OF EXISTENCE OF THE CORRECT BALANCE
EQUATION SOLUTION IN INNOVATIONAL INDUSTRIAL CLUSTER'S
GROSS VOLUME PLAN CALCULATION**

An innovation-industrial cluster is an association of business entities for the purpose of effective interaction and joint sustainable development. To plan the gross output of the cluster, it is proposed to use a method based on the Leontief balance model. Application of the method is reduced to solving a system of linear equations of high dimension. The article studies the problems that arise when solving such a system of equations, introduces the concepts of a correct balance equation and a correct plan, formulates and formally proves the necessary condition for its existence, and also gives an economic interpretation of this condition.

Keywords: innovational industrial cluster, Leontief balance model, system of linear equations, directed graph, cycles in a graph.

For citation: Smelova V. V., Shiman D. V. Necessary condition of existence of the correct balance equation solution in innovational industrial cluster's gross volume plan calculation. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 80–88. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-12 (In Russian).

Введение. В публикации [1] сформулировано понятие инновационно-промышленного кластера (ПК) как целенаправленной системы горизонтально взаимодействующих субъектов хозяйствования (участников ПК), описаны структура, жизненный цикл, свойства и компоненты этой системы, а также предложена концепция цифровой платформы ПК, предназначенной для поддержки деятельности кластера на протяжении всего его жизненного цикла. В работах [2, 3] сформулирована задача планирования валового объема продукции, производимой участниками ПК в результате их совместной деятельности, а также предложен метод ее решения на основе балансовой модели В. В. Леонтьева. Метод позволяет оценить

валовой объем продукции, который должен быть произведен каждым участником кластера и может быть применен на первом этапе планирования. В основе этого метода – решение системы линейных уравнений:

$$(E - A)X = Y, \quad (1)$$

где $E = (e_{i,i})$ – единичная матрица; $A = (a_{i,j})$ – матрица технологических коэффициентов; $Y = (y_i)$ – планируемый выпуск конечной продукции. При известных A и Y решением уравнения является вектор-столбец

$$X = (E - A)^{-1} Y, \quad (2)$$

элементы которого – искомые валовые объемы продукции, планируемые к производству участниками ПК.

Предполагаемая большая размерность системы уравнений (1) не позволяет получить решение прямыми методами (например, с использованием обратной матрицы (2), Гаусса, Крамера) и требует применения приближенных итеративных методов (например, простых итераций, Якоби, Зейделя, релаксации), позволяющих за конечное количество шагов получить приближенное (при его существовании) решение [4, 5]. При этом проверить заранее, имеет ли данное уравнение решение, практически невозможно. Проверка сингулярности матрицы $E - A$, как это делается при решении уравнения (1) прямыми методами, связана не только с трудоемкостью вычислений, но и с тем, что в процессе вычисления определителя может быть превышен допустимый процессором компьютера верхний или нижний предел разрядности чисел.

На рис. 1 приведен график зависимости порядка величины определителя матрицы $E - A$ от ее размерности, полученный в результате обработки вычислительного эксперимента.

График построен по 8 точкам, соответствующим размерностям матрицы $E - A$. Значение в каждой точке графика – это максимальный порядок результата 10 вычислений определителя матрицы $E - A$. Элементы матрицы A сгенерированы случайным образом, все элементы, кроме диагональных, являются целыми положительными величинами в пределах от 1 до 10, при этом количество нулевых элементов составляет примерно 80%. Диагональные элементы матрицы – положительные числа из интервала (0,1). Все сгенерированные уравнения имеют решение – вектор, элементы

которого целые положительные числа из интервала (100, 1000).

Порядок чисел с плавающей точкой двойной точности в соответствии со стандартом IEEE 754 [6] не может превышать 308. При этом предел размерности матрицы, для которой может быть вычислен определитель на компьютере, поддерживающем вычисления с двойной точностью, в данном эксперименте не превышает 275.

На рис. 2 приведены результаты обработки вычислительного эксперимента, позволяющего оценить продолжительность решения систем линейных уравнений. Эксперимент выполнялся на компьютере с 4-ядерным процессором Intel Core i7-4790, 3.60GHz и объемом оперативной памяти 16 GB. Вычисления осуществлялись с помощью библиотеки математических функций Math.NET Numerics [7]. На рис. 2 изображены три практически слившиеся линии, отражающие зависимость продолжительности решения систем линейных уравнений от их размерности с различной степенью разреженности матрицы коэффициентов: 50, 70 и 80% нулевых коэффициентов. Графики позволяют предполагать, что в данном эксперименте влияние степени разреженности матрицы коэффициентов не оказывает сколько-нибудь значительного влияния. Каждый график построен по 20 точкам, соответствующим системам линейных уравнений с размерностями от 100 до 2000. Значение в каждой точке графика вычислены в результате усреднения 10 просчетов. Общее количество решенных систем линейных уравнений – 600, при этом погрешность решения не превышает 10^{-6} . Результаты эксперимента позволяют утверждать, что вычисление плана валового производства продукции с номенклатурой до 2000 единиц не превышает 16 с на компьютере средней мощности.

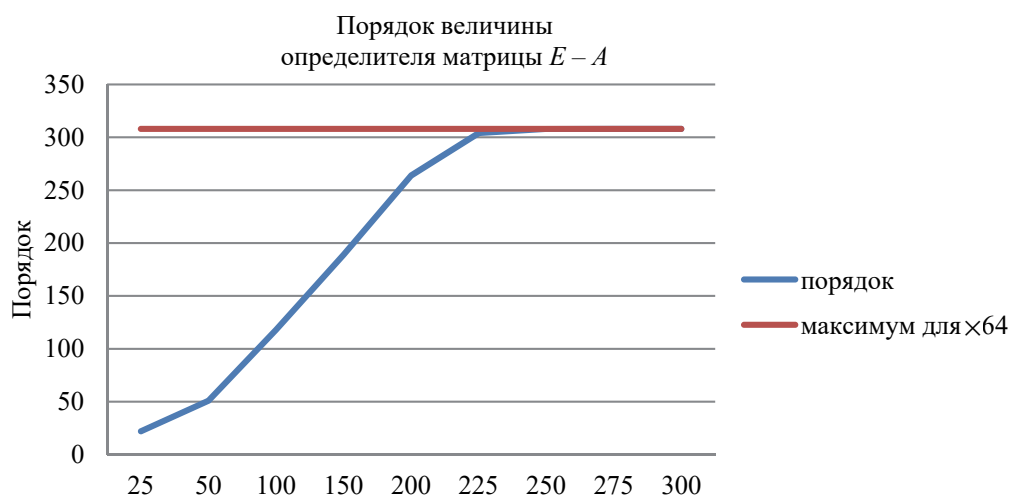


Рис. 1. Оценка порядка величины определителя матрицы $E - A$



Рис. 2. Оценка продолжительности решения системы линейных уравнения

Полученное с помощью итерационных методов приближенное решение X' всегда можно проверить, оценив разницу $Y - (E - A)X'$. Получив приемлемый результат, можно считать, что решение уравнения (1) получено. Если расхождение векторов Y и $(E - A)X'$ является неприемлемо большим, то проблема вычислений может быть связана с плохой обусловленностью [3, 4] матрицы $E - A$: $\text{cond}(E - A) = \|E - A\| \cdot \|(E - A)^{-1}\|$, где $\|\cdot\|$ – оператор вычисления одной из норм матрицы [4]. При этом справедливо [4] утверждение

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \text{cond}(E - A) \frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}, \quad (3)$$

где $\|\Delta X\|$ – согласованная (с нормой матрицы $E - A$) норма вектора ΔX – отклонения от истинного решения X уравнения (1); $\|X\|$ – согласованная норма вектора X – решения системы уравнения (1); $\|\Delta Y\|$ и $\|Y\|$ – согласованные нормы векторов: ΔY – отклонения вектора Y и самого вектора Y из уравнения (1). Очевидно, что чем меньше (ближе к 1) значение $\text{cond}(E - A)$, тем слабее требования к погрешности промежуточных итеративных вычислений и потребуется меньше шагов для получения достаточно точного решения уравнения (1).

В нашем случае выражение (3) нужно интерпретировать следующим образом: если с помощью итерационного метода решения системы линейных уравнений (1) получено приближенное решение X' (валовой план производства продукции) и вычислено соответствующее значение $Y' = (E - A)X'$ (планируемый объем конечной продукции), то верхняя граница значения относительной нормы отклонения $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \frac{\|X - X'\|}{\|X\|}$

полученного решения от истинного X будет гарантированно не превышать величину

$$\text{cond}(E - A) \frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}, \quad \text{где } \|\Delta Y\| = \|Y - Y'\|.$$

Другими словами, величина $\text{cond}(E - A)$ позволяет оценить максимально возможное относительное расхождение между истинным X и приближенным X' решениями уравнения (1).

Кроме того, неравенство (3) позволяет оценить устойчивость полученного решения. В нашем случае можно оценить верхнюю границу изменения полученного валового плана X в зависимости от изменения планируемой конечной продукции Y . Если изменение плана будет значительным, то план неустойчив и его применение вряд ли возможно.

На рис. 3 приведен пример вычисления меры обусловленности матрицы $E - A$ из [5]. В качестве нормы для матрицы $E - A$ была выбрана октаэдрическая норма [4]: $\|E - A\| = \max \sum_i |e_{i,j} - a_{i,j}|$.

Если уравнение (1) имеет решение, то погрешность при применении одного из итерационных методов для вычисления вектора X оценивается сравнением меры $\text{cond}(E - A)$ со значениями $\text{macheps}^{-1/2}$ или macheps^{-1} . Величина macheps (машинный ноль, или машинный эпсилон) характеризует точность вычислений операций с действительными числами, ее значения для чисел стандарта IEEE 754 приведены в таблице. Считается [5], что достаточно точное решение уравнения итерационным методом может быть получено за конечное число итераций, если $\text{cond}(E - A) \leq \text{macheps}^{-1/2}$, реже используют ослабленное неравенство $\text{cond}(E - A) \leq \text{macheps}^{-1}$.

$E - A$

1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-1,000	-1,000	0,000	-1,000	0,000	-1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,001	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,002	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-1,000	-1,000	0,000	-1,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,010	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,002	0,000	0,000
-2,000	-4,000	0,000	-4,000	0,000	-2,000	0,000	0,000	-16,00	0,000	0,000	1,000	0,000	-0,003	-0,002	0,000	0,000	0,000
-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	-0,005	0,000	0,000	0,000	0,000
-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-400,0	0,000	0,000	-100,0	-100,0	0,000	-50,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000
7,000	9,000	4,000	9,000	404,0	5,000	1,000	101,0	119,00	1,000	51000	1,000	1,000	1,019	1,005	1,000	1,000	1,000

 $\| (E - A) \| = 404$ $(E - A)^{-1}$

1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,001	1,001	1,001	1,001	0,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,002	0,000	0,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,010	1,010	1,010	1,010	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,010	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,002	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000
2,003	4,003	2,003	4,003	16,002	2,000	0,000	0,000	16,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,003	0,002	0,000	0,000	0,000
1,005	1,005	1,005	1,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000
1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	650,300	0,000	0,000	100,000	250,000	0,000	50,000	0,000	0,000	0,000	0,300	0,000	1,000	1,000
7,019	9,019	4,019	9,019	672,306	5,000	1,000	101,000	269,000	1,000	51,000	1,000	1,000	1,019	1,306	1,000	1,000	1,000

 $\| (E - A)^{-1} \| = 672,306$

$$\text{cond}(E - A) = 404 \cdot 672,396 = 271\,612$$

Рис. 3. Пример вычисления меры обусловленности матрицы $E - A$

Значения macheps для чисел стандарта IEEE754

Разрядность	Константа C/C++	macheps	macheps ⁻¹	macheps ^{-1/2}
32	FLT_EPSILON	$2^{-23} \approx 1,192 \cdot 10^{-7}$	$2^{23} = 8\,388\,608$	$2^{11,5} \approx 2896,3$
64	DBL_EPSILON	$2^{-52} \approx 2,22045 \cdot 10^{-16}$	$2^{52} \approx 4,5036E \cdot 10^{15}$	$2^{26} = 67\,108\,864$
80	LDBL_EPSILON	$2^{-63} \approx 1,08429 \cdot 10^{-19}$	$2^{63} \approx 9,2234 \cdot 10^{18}$	$2^{31,5} \approx 3\,037\,000\,500$

Продолжая пример (рис. 3) заметим, что для надежной сходимости матрицы $E - A$ требуется, как минимум, двойная точность вычислений, что соответствует строке с разрядностью 64 в таблице.

Следует заметить, что мера $\text{cond}(E - A)$ не зависит от значений столбца свободных членов Y , а оценка (3) сделана с большим «запасом». Устойчивость решения для конкретного уравнения (1) может оказаться значительно лучше верхней границы, и требования к точности не будут столь критичными. На рис. 4 исследуется на устойчивость решение уравнения (1), в котором матрица $E - A$ совпадает с матрицей на рис. 2.

На рис. 4 представлены три пары столбцов: каждая пара задает столбец свободных членов (Y, Y', Y'') и соответствующее ему решение (X, X', X''). Исследуемая система линейных уравнений позволяет получить достаточно устойчивое решение: в первом случае при относительном отклонении нормы столбца свободных членов на 1% относительное отклонение нормы решения составляет примерно 0,01%, а во втором случае при относительном отклонении нормы столбца свободных членов на 50% соответствующее отклонение решения – примерно на 3%.

Коэффициенты a_{ij} матрицы A отражают технологическую зависимость продукта j от ресурса i и указывают долю (или количество) ресурса i , необходимого для производства единицы продукта j . В свою очередь ресурс i сам может являться продуктом, который зависит от других (в общем случае и от самого себя) ресурсов. Как правило, коэффициенты a_{ij} не являются точными и определяются статистическими методами. Поэтому важным является исследование устойчивости решения системы уравнений (1) относительно значений этих коэффициентов.

Например, если вычислить решение X' уравнения $(E - A)X'$, где A' – матрица, полученная из матрицы A (рис. 4), путем увеличения всех коэффициентов в 12-й строке на 1%, то относительное

отклонение $\frac{\|X - X'\|}{\|X\|} \approx 0,005$ будет составлять

примерно 0,5%. Если вычислить $Y' = (E - A)X'$, то

отклонение $\frac{\|Y - Y'\|}{\|Y\|} \approx 0,09$ составляет примерно

9%. Другими словами, погрешность в коэффициентах 12-й строки матрицы A в 1% может привести к значительной погрешности (9%) плана конечной продукции.

Основная часть. Будем предполагать далее следующее.

1. Размерность системы уравнений (1) не выходит за пределы 2000.

2. Матрица технологических коэффициентов A хорошо обусловлена и позволяет за конечное количество шагов итерационным методом получить устойчивое решение уравнения (1) с достаточной точностью.

При этом заметим.

3. Элементы матрицы технологических коэффициентов $A = (a_{ij})$ не могут быть отрицательными: $a_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, h}$. Матрица A , состоящая из одних нулей, не имеет смысла и приводит к решению $X = (x_i)_h$ уравнения (1), совпадающему с вектором $Y = (y_{i,j})_h : x_i = y_i, i = \overline{1, h}$.

4. Элементы вектора $Y = (y_i)_h$ (планируемый выпуск конечной продукции) не могут быть отрицательными: $y_i \geq 0, i = \overline{1, h}$ – нулевой вектор Y не имеет смысла и приводит к нулевому решению: $x_i = 0, i = \overline{1, h}$.

Y	X	Y'	X'	Y''	X''
10000	10000	10100	10100	10000	10000
15000	15000	15150	15150	15000	15000
20000	20000	20200	20200	20000	20000
10000	10000	10100	10100	10000	10000
500	500	505	505	500	500
5000	25000	5050	25250	5000	25000
1000	61055	1010	61665,55	1000	61055
0	501	0	506,01	0	501
0	500	0	505	0	500
2000	62550	2020	63175,5	2000	62550
0	501	0	506,01	0	501
10000	188166	10100	190047,66	20000	198166
5000	60275	5050	60877,75	5000	60275
0	55000	0	55550	0	55000
0	500	0	505	0	500
0	500	0	505	0	500
0	325150	0	328401,5	0	325150
$\ \cdot\ $	20000	20200	328401,5	20000	325150

$\frac{\|\Delta Y'\|}{\|Y\|} = 0.01$
 $\frac{\|\Delta Y''\|}{\|Y\|} = 0.5$
 $\frac{\|\Delta X'\|}{\|X\|} \approx 0.001$
 $\frac{\|\Delta X''\|}{\|X\|} \approx 0.0308$
 $0.001 \ll 271612 \times 0.01$
 $0.0308 \ll 271612 \times 0.5$

Рис. 4. Пример оценки устойчивости решения системы уравнений

5. Элементы вектора X (валовой объем продукции) не могут быть отрицательными: $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, h}$. Нулевой вектор X не имеет смысла и приводит к нулевому плану конечной продукции Y : $y_i = 0$, $i = \overline{1, h}$.

Систему уравнений (1), которая удовлетворяет пунктам 1–4, будем далее называть корректным балансовым уравнением, решение корректного уравнения, удовлетворяющего условию 5 – корректным решением, а соответствующий этому решению план валового производства продукции – корректным планом.

Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h,1} & \dots & a_{h,h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_h \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Формально введем ограничения, описанные выше в пунктах 3–5.

$$a_{i,j} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, h}, \quad \sum_{(i,j)} a_{i,j} > 0; \quad (5)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, h}, \quad \sum_i y_i > 0; \quad (6)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, h}, \quad \sum_i x_i > 0. \quad (7)$$

Пусть матрица A – матрицы смежности ориентированного взвешенного графа $G_A = (P, L)$,

где $P = \{1, 2, \dots, h\}$ – множество вершин и $L = \{ \langle i, j \rangle \mid i \in P, j \in P, a_{i,j} \neq 0 \}$ – множество дуг. При этом, весом дуги $\langle i, j \rangle$ будем считать величину $a_{i,j} \neq 0$. На рис. 4 представлен пример матрицы A и соответствующего ей графа $G_A = (P, L)$.

Будем применять далее для графа $G_A = (P, L)$ следующие обозначения:

$\varphi^j = [p_1, \dots, p_k]$, $p_i \in P$, $i = \overline{1, k}$ – такая простая цепь, что существует простой цикл $[i, p_1, \dots, p_k, i]$;
 $\varphi^j = []$ – петля в вершине i ;

$\Phi^i = \{ \varphi^1, \dots, \varphi^k \}$, $i \in P$ – множество цепей φ^i ;

$$w(\varphi^i) = \begin{cases} \frac{a_{i,p_1} a_{p_k,i}}{(1-a_{i,i})(1-a_{p_k,p_k})} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{a_{p_j,p_{j+1}}}{(1-a_{p_j,p_j})}, \\ \varphi^j \neq [] \end{cases}$$

$\varphi^j \neq []$ – вес цикла φ^i .

$W(\Phi^i) = \sum_i w(\varphi^i)$ – суммарный вес всех циклов φ^i .

Докажем следующее.

Утверждение: пусть (3) корректное балансовое уравнение и $G_A = (P, L)$ – ориентированный взвешенный граф с матрицей смежности A . Тогда, если в графе G_A есть вершина i и $W(\Phi^i) \geq 1$, то система уравнений (3) не имеет корректного решения.

Пусть в вершине i графа G_A существует петля $\varphi^j = []$ и $w(\varphi^i) = a_{i,i} = 1$. Тогда i -е уравнение системы (3) принимает следующий вид: $x_i - x_i - S_i = y_i$, $S_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j$ и в соответствии с (4)–(6) $S_i \geq 0$, $y_i \geq 0$.

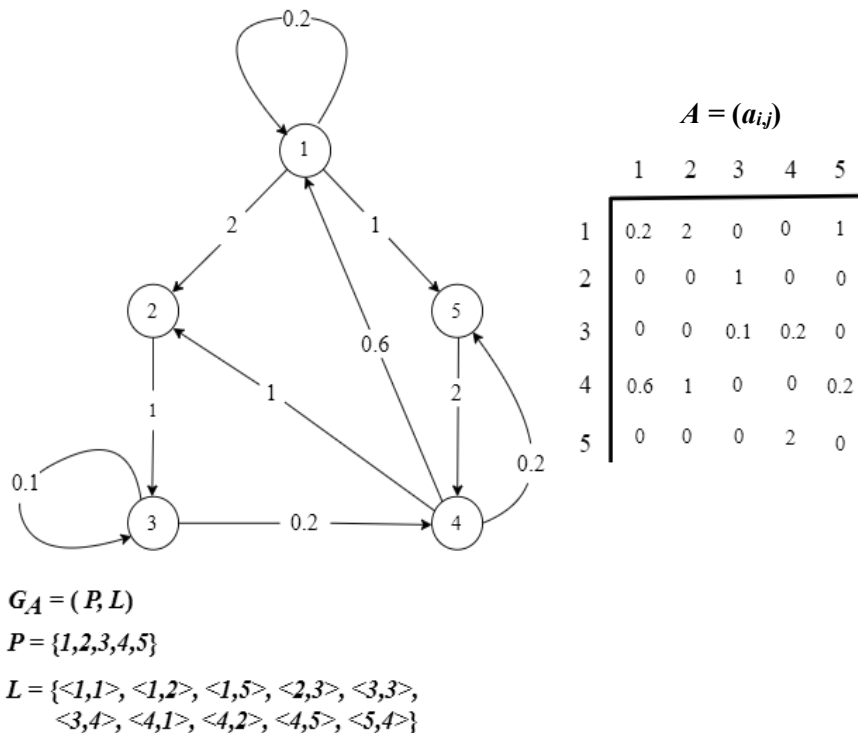


Рис. 4. Пример матрицы A и соответствующего ей графа $G_A = (P, L)$

из которого следует, что корректное решение системы уравнений (3) возможно при $w(\varphi_1^i) + w(\varphi_2^i) < 1$.

Выражение (10) можно обобщить на s циклов Φ^i , проходящих через вершину i : $x_i = W(\Phi^i)x_i + B, B \geq 0$.

Утверждение доказано.

Выводы.

1. Доказанное в основной части статьи утверждение формулирует необходимое условие для существования корректного решения (7) балансового уравнения (1): $\forall i \in P: W(\Phi^i) < 1$.

2. Доказанное утверждение имеет очевидное следствие: *необходимым условием существования корректного решения балансового уравнения (1) является условие $\forall i \in P: 0 \leq a_{ij} \leq 1$* .

3. Доказанное утверждение имеет экономическую интерпретацию: *значения технологических коэффициентов $a_{ij}, i, j = 1, h$ матрицы A*

для любой продукции $k = 1, h$ не должны образовывать замкнутые технологические цепочки, которые суммарно для производства единицы продукции k требуют больше единицы этой же продукции.

4. В общем случае, проверка необходимого условия существования корректного решения балансового уравнения (1) сводится к NP-задаче поиска простых циклов в ориентированном графе G_A .

Сформулированное необходимое условие существования корректного решения балансового уравнения может быть применено для проверки корректности матрицы технологических коэффициентов при решении задачи планирования производственной деятельности ПК, решаемой в рамках цифровой платформы ПК, концепция которой предложена в работе [1].

Список литературы

1. Концепция цифровой платформы инновационно-промышленного кластера / И. В. Новикова [и др.] // Импортзамещение, научно-техническая и экономическая безопасность: сб. ст. V Междунар. науч.-техн. конф. «Минские научные чтения – 2022», Минск, 7–9 декабря 2022 г. Минск: БГТУ, 2022. Т. 2. С. 3–7.
2. Новикова И. В., Смелова В. В. Планирование валового объема продукции инновационно-промышленного кластера // Цифровизация: экономика и управление производством: материалы 87-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов, 31 янв. – 17 февр. 2023, г. Минск: БГТУ, 2022. С. 29–32.
3. Смелова В. В., Шиман Д. В. Алгоритм планирования валового объема продукции инновационно-промышленного кластера // Алгоритмизация и программирование. Актуальные проблемы программной инженерии: материалы 87-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов, 31 янв. – 17 февр. 2023 г. Минск: БГТУ, 2022. С. 29–32.
4. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
5. Крылов В. И. Вычислительные методы высшей математики. Минск: Вышэйшая школа, 1972. 585 с.
6. Math.NET Numerics // Официальная документация. URL: <https://numerics.mathdotnet.com/> (дата обращения: 01.03.2023).
7. Яшкадин В. IEEE 754 – стандарт двоичной арифметики с плавающей точкой // SoftElectro. URL: <http://www.softelectro.ru/ieee754.html> (дата обращения: 04.03.2023).

References

1. Novikova I. V., Smelova V. V., Timofeeva Yu. A., Shiman D. V. The concept of the digital platform of the innovation-industrial cluster. *Importozameshcheniye, nauchno-tekhnicheskaya i ekonomicheskaya bezopasnost': sb. st. V Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. "Minskiye nauchnyye chteniya – 2022"* [Import substitution, scientific, technical and economic security: sb. art. V Intern. sci.-tech. conf. "Minsk Scientific Readings – 2022"]. Minsk, BSTU, 2022, pp. 3–7 (In Russian).
2. Novikova I. V., Smelova V. V. Planning the gross output of the innovation-industrial cluster. *Tsifrovizatsiya: ekonomika i upravleniye proizvodstvom: materialy 87-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodavat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov* [Digitalization: economics and production management: proceedings of the 87th scientific and technical conference of the faculty, researchers and graduate students]. Minsk, 2022, pp. 29–32 (In Russian).
3. Smelova V. V., Shiman D. V. Algorithm for planning the gross output of an innovation-industrial cluster. *Algoritimizatsiya i programmirovaniye. Aktual'nyye problemy programnoy inzhenerii: materialy 87-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodavat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov* [Algorithmization and programming. Actual problems of software engineering: proceedings of the 87th scientific and technical conference of the faculty, researchers and graduate students]. Minsk, 2022, pp. 29–32 (In Russian).
4. Verzhbitsky V. M. *Osnova chislennykh metodov* [Fundamentals of numerical methods]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2002. 840 p. (In Russian).

5. Krylov V. I. *Vychislitel'nyye metody vysshey matematiki* [Computational methods of higher mathematics]. Minsk, Vysheyshaya shkola Publ., 1972. 585 p. (In Russian).

6. Math.NET Numerics. Available at: <https://numerics.mathdotnet.com/> (accessed 01.03.2023) (In Russian).

7. Yashkardin V. IEEE 754 – binary floating point arithmetic standard. Available at: <http://www.softelectro.ru/ieee754.html> (accessed 04.03.2023) (In Russian).

Информация об авторах

Смелова Валерия Владимировна – магистрант кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: valeria.smelova0@gmail.com

Шиман Дмитрий Васильевич – кандидат технических наук, доцент, декан факультета информационных технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: shiman@belstu.by

Information about the authors

Smelova Valeria Vladimirovna – Master's degree student, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valeria.smelova0@gmail.com

Shiman Dmitriy Vasilievich – PhD (Engineering), Assistant Professor, Dean of the Faculty of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: d.shiman@belstu.by

Поступила после доработки 15.03.2023

ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION

УДК 004.56+003.26

М. Г. Савельева¹, П. П. Урбанович^{1,2}

¹Белорусский государственный технологический университет

²Люблинский Католический университет Яна Павла II, Польша

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАСТРИРОВАНИЯ ТЕКСТОВЫХ ДОКУМЕНТОВ В СТЕГАНОГРАФИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Цифровой контент может создаваться или преобразовываться с использованием векторной или растровой графики. Растривание текстовых фрагментов указанного контента приводит к расплыванию контуров букв и переходу цвета в градиент. Этой особенностью векторно-растрового преобразования можно воспользоваться для решения прикладных задач на основе стеганографических методов, создавая тайные каналы с целью хранения или передачи данных. Для увеличения пропускной способности и стеганографической стойкости таких каналов целесообразно внедрять элементы осаждаемого сообщения в символы документа-контейнера, опираясь на определенные пространственно-геометрические параметры и свойства этих символов. В статье представлены результаты анализа и классификации букв русского алфавита по нескольким статистическим признакам. В соответствии с этим все буквы условно разделены на три группы. Результаты анализа распределений пикселей для отображения буквы при конвертации контента по схеме PDF – PNG могут быть использованы для разработки стеганографических методов путем создания тайных каналов для хранения (цифровой водяной знак) или передачи информации. Выбор соответствующих символов, относящихся к различным группам, для размещения тайной информации не только повышает пропускную способность канала и снижает эффективность визуальных или иных атак на стеганоконтейнер, но и позволяет упростить алгоритмы внедрения (извлечения) тайной информации.

Ключевые слова: стеганография, растривание, текст, шрифт, статистические параметры.

Для цитирования: Савельева М. Г., Урбанович П. П. Использование статистических характеристик растривания текстовых документов в стеганографических приложениях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 89–96. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-13.

M. G. Saveleva¹, P. P. Urbanovich^{1,2}

¹Belarusian State Technological University

²The John Paul II Lublin Catholic University

USAGE OF STATISTICAL CHARACTERISTICS OF TEXT DOCUMENTS HALFTONE SCREENING IN STEGANOGRAPHIC APPLICATIONS

Digital content can be created or transformed using vector or raster graphics. Rasterization of the text fragments of the a birth content leads to the blurring of the contours of the letters and the transition of color into a gradient. This feature of the vector-raster transformation can specified a way to solve applied problems based on steganographic methods, creating secret channels for storing or transmitting data. To increase the throughput and steganographic stability of such channels, it is advisable to introduce elements of the deposited message into the symbols of the container document, relying on certain spatial and geometric parameters and properties of these symbols. The article presents the results of the analysis and classification of the letters of the Russian alphabet according to several statistical features. In accordance with this, all letters are conditionally divided into three groups. The results of the analysis of pixel distributions for displaying letters when converting content according to the PDF – PNG scheme can be used to develop steganographic methods by creating secret channels for storing (digital watermark) or transmitting

information. The choice of appropriate symbols belonging to different groups for the placement of secret information not only increases the bandwidth of the channel and reduces the effectiveness of visual or other attacks on the steganocounter, but also will simplify the algorithms for the introduction (extraction) of secret information.

Keywords: steganography, halftone screening, text, font, statistical parameters.

For citation: Saveleva M. G., Urbanovich P. P. Usage of statistical characteristics of text documents halftone screening in steganographic applications. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 89–96. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-13 (In Russian).

Введение. Защита цифрового контента направлена на обеспечение безопасности и неприкосновенности цифровых материалов для нелегитимного использования. Цифровой контент может быть скопирован и распространен в Интернете или на других носителях без разрешения владельца авторских прав, что может привести к ущербу для его создателя или правообладателя [1].

Для решения указанных проблем могут быть использованы стеганографические методы и средства. Скрытие информации, т. е. цифровых водяных знаков (ЦВЗ), внутри охраняемых от несанкционированного распространения документов-контейнеров или использование последних для тайной передачи данных реализуется фактически путем создания тайных информационных каналов [2–6].

Компании, например, могут использовать стеганографию для скрытия уникальных идентификаторов внутри своих конфиденциальных документов. Эти идентификаторы могут быть применены для отслеживания, кто имеет доступ к документам, и пресечения незаконного распространения.

Существуют другие (кроме ЦВЗ) методы защиты цифрового контента [2, 7–11]. В любом случае, защита рассматриваемого информационного ресурса является важной задачей, которая помогает защитить интересы правообладателей и обеспечивает безопасность цифровых материалов.

Стеганографические преобразования контейнеров-изображений часто базируются на основе цветовой модели RGB (Red-Green-Blue). Это техника скрытой передачи информации, которая встраивается в изображение с использованием изменения в параметрах цветовых каналов RGB [5, 6, 10, 12]. В модели RGB пиксель, формирующий изображение, имеет три значения: красный (R), зеленый (G) и синий (B). Каждое из этих значений может быть представлено в виде числа от 0 до 255, что позволяет отобразить цвет пикселя в виде трехбайтовой последовательности.

Исследования в области цветовой теории играют важную роль в создании методов стеганографии для защиты электронного контента от несанкционированного использования или модификации, например для защиты авторских прав при конвертации контента в другой формат.

Оптимизация выбора букв или группы букв для размещения тайной информации внутри изображения является ключевым фактором для повышения пропускной способности тайного канала и снижения эффективности визуальных или других атак на защищаемый контент. Важно учитывать, что каждая буква имеет свойства, влияющие на визуальное восприятие текста внутри изображения либо отдельного текстового документа, а также на «способность» букв маскировать тайную информацию.

Далее проанализируем выявленные нами важные особенности, которые целесообразно учитывать при разработке и реализации методов стеганографии на основе векторной и растровой графики.

Основная часть. Электронные текстовые документы, такие, например, как файлы MS Word PDF, являются основным средством обмена информацией внутри Интернета. Однако при передаче в этих документах могут появиться случайные или преднамеренно созданные третьими лицами изменения. Существует множество инструментов и техник, позволяющих вносить такие изменения.

Каждый из документов может быть представлен в виде графического изображения, которое может быть как растровым, так и векторным. Это значит, что мы можем рассматривать любой текстовый документ как изображение, которое состоит из пикселей или геометрических фигур, определяющих его внешний вид и форму.

Конвертация растровой графики в векторную – это процесс преобразования изображения, состоящего из пикселей (растровое изображение), в изображение, состоящее из геометрических форм (векторное изображение).

При изменении или преобразовании текстовых документов-контейнеров [5, 6, 11, 12] одной из проблем может быть потеря качества текста, когда он становится растровым изображением. Процесс растривания векторного изображения происходит путем разбиения его на множество маленьких ячеек, нанесения на них растровой сетки и закрашивания каждой ячейки, в зависимости от наличия в ней точек из исходной фигуры серым цветом с уровнем от 0 до 255. Ячейки, содержащие меньше точек, получают более светлый оттенок серого цвета, а ячейки с большим

количеством точек – более темный оттенок, что создает полутоновое изображение [13, 14].

Для повышения пропускной способности стеганоканала, т. е. для размещения в контейнере информации большего объема в расчете на единицу объема контейнера, следует определить и учитывать преобладающие оттенки в элементах переходных оттенков растрированных символов. Для выявления закономерностей при анализе преобладающих оттенков целесообразно классифицировать или разделить все графемы на группы. Это, по нашему мнению, упростит алгоритмы осаждения (извлечения) тайной информации.

В источнике [15] приведена классификация букв в зависимости от формы штрихов (строчные и прописные графемы могут относиться к разным группам):

- буквы первой группы, состоящие только из вертикальных и горизонтальных штрихов (здесь и ниже даются заглавные начертания знаков) – «Г», «Н», «П», «Т», «Ц», «Ш», «Щ»;
- буквы второй группы, состоящие только из вертикальных, горизонтальных и наклонных линий – «Ж», «И», «К», «М», «Х»;
- буквы третьей группы, в которых прямые штрихи соединяются с округлыми, – «Б», «В», «Д», «Й», «Л», «Р», «У», «Ф», «Ч», «Ъ», «Ы», «Ь», «Ю», «Я», «А», «Е», «Ё», «Э»;
- буквы четвертой группы (круглые буквы) – «З», «О», «С».

Для обработки графем в электронном виде и внедрения сообщения данное разбиение не является удачным, так как при растрировании буквы с наклонными линиями, округлыми и (или) круглыми элементами не будет отличаться друг от друга за счет того, что квадратными пикселями невозможно создать округлые, круглые и

наклонные штрихи правильного вида. Поэтому для разбиения на группы, исходя из особенностей отображения букв при растрировании, был проведен анализ преобладающих переходных оттенков для каждой буквы русского алфавита.

Для форматирования и оформления документов приняты, как известно, определенные правила. В общем виде их можно описать так: для печатных документов – шрифт Times New Roman; для документов, обрабатываемых преимущественно в электронном виде, возможно также применение шрифтов Arial, Helvetica, Verdana; размер 12–20 пт – для основного текста; 8–14 пт – для таблиц и подписей.

Отметим, что Times New Roman – гарнитура на основе засечкового шрифта. Засечка – небольшой узкий штрих, расположенный на конце основного штриха, перпендикулярно ему. Arial, Helvetica, Verdana – гарнитуры на основе гротеска, рубленого шрифта (шрифт без засечек).

Для выделения преобладающих переходных оттенков, возникающих при растрировании из гарнитуры Times New Roman, проанализируем этот шрифт, а из гарнитур Arial, Helvetica, Verdana – шрифт Arial, как наиболее популярные. Так как кириллический алфавит более сложен по сравнению с латинским (из-за наличия шипящих «ж», «ч», «ш», «щ», «ц» и йотированных гласных «я», «ю»), то проанализируем именно кириллицу, в частности строчные графемы [16].

Для анализа отображения символов (количества оттенков) использовалась панграмма (текст, состоящий из всех или почти всех букв алфавита) для русского языка: «Съешь же ещё этих мягких французских булок, да выпей чаю». Результат приведен в табл. 1, 2.

Таблица 1

Количество оттенков для отображения графемы гарнитурой Times New Roman

Графема	Times New Roman								
	8pt	9pt	10pt	11pt	12pt	14pt	16pt	18pt	20pt
а	15	15	17	15	15	15	15	18	15
б	15	15	15	15	15	15	15	15	15
в	15	15	15	14	14	14	15	15	15
г	11	13	14	12	14	13	15	15	15
д	15	15	15	15	15	15	15	15	15
е	15	15	15	15	15	15	15	15	15
ё	15	15	15	15	15	15	15	15	15
ж	15	15	15	15	15	15	15	15	15
з	15	14	14	14	14	15	18	15	15
и	13	15	15	15	15	14	15	15	15
й	15	15	15	15	15	15	15	15	15
к	14	15	15	17	14	17	15	15	15
л	11	14	14	15	15	15	16	16	15
м	15	15	15	15	14	15	15	15	15
н	11	14	13	11	13	12	15	15	15

Окончание табл. 1

Графема	Times New Roman								
	8pt	9pt	10pt	11pt	12pt	14pt	16pt	18pt	20pt
о	15	15	15	15	15	15	15	15	15
п	13	13	11	10	10	10	12	15	13
р	14	15	14	15	14	15	15	15	15
с	15	15	15	15	15	15	15	15	15
т	13	10	15	15	13	15	14	15	15
у	15	15	15	15	15	15	15	15	15
ф	15	15	15	15	15	15	15	15	15
х	15	15	15	15	14	15	15	15	14
ц	12	15	13	14	15	14	14	15	14
ч	13	14	13	15	15	15	15	15	15
ш	12	15	15	15	15	15	15	15	15
щ	12	15	15	15	15	15	15	15	15
ъ	15	13	15	15	14	15	15	15	15
ы	15	15	15	14	15	15	15	15	15
ь	13	14	13	13	14	14	15	15	15
э	14	14	15	15	15	15	15	15	15
ю	15	15	15	15	17	15	15	15	15
я	15	15	15	15	15	15	15	15	14

Таблица 2

Количество оттенков для отображения графемы гарнитурой Arial

Графема	Arial								
	8pt	9pt	10pt	11pt	12pt	14pt	16pt	18pt	20pt
а	14	15	15	15	15	15	15	15	15
б	15	15	15	15	15	15	15	15	15
в	13	14	14	15	15	15	15	15	15
г	4	3	4	4	3	3	3	3	3
д	10	13	15	15	15	15	15	15	15
е	14	15	15	15	15	15	15	15	15
ё	15	15	15	14	15	15	15	15	15
ж	15	15	15	15	15	14	15	15	15
з	15	14	15	15	15	15	15	15	15
и	8	13	15	13	15	15	15	15	15
й	15	15	14	14	15	15	15	15	15
к	14	14	14	15	15	15	15	15	15
л	9	9	9	10	10	11	14	12	13
м	15	15	15	15	15	15	15	14	15
н	5	3	4	5	4	2	3	5	4
о	15	15	15	15	15	15	15	15	15
п	4	5	4	3	3	3	5	4	2
р	15	15	15	15	15	15	15	15	15
с	14	15	15	15	15	15	15	15	15
т	5	5	4	5	4	4	5	5	4
у	15	15	15	15	15	15	15	15	15
ф	14	15	15	15	15	15	15	15	15
х	15	15	15	14	15	15	15	15	15
ц	7	6	6	6	6	5	4	4	6
ч	12	13	13	13	14	14	14	14	15
ш	5	5	6	7	5	5	5	5	6
щ	6	6	6	8	5	6	5	5	6
ъ	12	11	12	14	14	14	15	15	15
ы	12	12	12	13	13	14	14	15	14
ь	11	10	13	13	15	14	14	14	15
э	15	15	15	15	15	15	15	15	15
ю	13	15	15	15	15	15	15	15	15
я	13	15	15	15	15	15	15	15	15

Дальнейшие рассуждения будем строить на основе использования основных числовых характеристик распределения дискретной случайной величины [17]. В нашем случае дискретная случайная величина (ДСВ) ξ соответствует определенной букве алфавита и задана рядом распределения, соответствующим строке табл. 1 или 2. В общем случае ξ принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$. Здесь x_i – числовое значение оттенков, необходимое для отображения выбранной буквы при различном кегле, $x_i \in [1, 254]$ (белый цвет – цвет фона – не используется для отображения символа, но хотя бы 1 оттенок должен использоваться для отображения), p_i – вероятность того, что для определенной буквы при использовании различных кеглей $\xi = x_i$, $i \in [1, n]$, n – количество уникальных значений оттенков для отображения буквы различного кегля. В общем случае размер кегля в MS Word может принимать значения от 1 до 1638 с шагом 0,5. Основное практическое применение находят размеры от 8 до 20 пт, как и указано в табл. 1 и 2 (верхняя строка). Тогда, выражение

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (1)$$

позволит определить центр анализируемых распределений ДСВ. Полученное таким образом среднее значение ДСВ ξ является математическим ожиданием.

Дисперсию ДСВ ξ ($D\xi$) вычислим стандартным образом:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (2)$$

Полученные результаты представлены на рис. 1 и рис. 2.

Для разделения букв алфавита на группы в соответствии с целью нашего анализа выделим минимальное значение $D\xi$, отличное от 0: $D\xi_{\min} = 0,094$. Это значение соответствует ситуации, когда один из кеглей графемы имеет количество оттенков x_n , меньшее на единицу от количества оттенков в остальных кеглях (в основном за счет небольшого размера). Выделим также $D\xi = 1$. Это значение

соответствует ситуациям, при которых одно значение x_i существенно отличается от $M\xi$, или существенная часть x_i отличается от $M\xi$ на одно-два значения.

На основе полученных данных выделим группы графем по следующему принципу (см. рис. 2):

- первая группа, состоящая из букв, у которых значения дисперсии каждой гарнитуры меньше $D\xi_{\min}$ («б», «е», «ё», «ж», «о», «с», «у», «ф»);
- вторая группа – значения дисперсии каждой гарнитуры меньше 1 («в», «й», «м», «р», «х», «ц», «ч», «ш», «щ», «э», «ю», «я»);
- третья группа – значения дисперсии хотя бы одной гарнитуры больше 1 («а», «г», «д», «и», «к», «л», «н», «п», «т», «ъ», «ы», «ь»).

Фактически разбиение на группы произошло в зависимости от сложности отображения буквы при растривании.

Буквы первой группы наиболее предсказуемы. Они имеют более сложное написание по сравнению с остальными (верхние выносные элементы, нижние выносные элементы, акценты, хвосты, капли, наплывы, овалы и т. д., различные комбинации этих элементов). Из-за сложной структуры при различном кегле начертания букв сжимаются только по вертикали, по горизонтали размер изменяется незначительно. За счет этого графемы имеют немалое количество переходных оттенков.

Буквы второй группы имеют более простую структуру. В каждой появляются горизонтальные или вертикальные штрихи в комбинации с более сложными элементами. Эти графемы более подвержены сжатию, из-за чего количество оттенков при малых размерах кегля уменьшается, т. е. они становятся менее предсказуемыми.

Буквы третьей категории имеют самую простую структуру (большое количество горизонтальных или вертикальных штрихов). Сравнивая количество оттенков при большом и малом кеглях, можно заметить уменьшение количества оттенков в малом размере до 60% по отношению к большому.

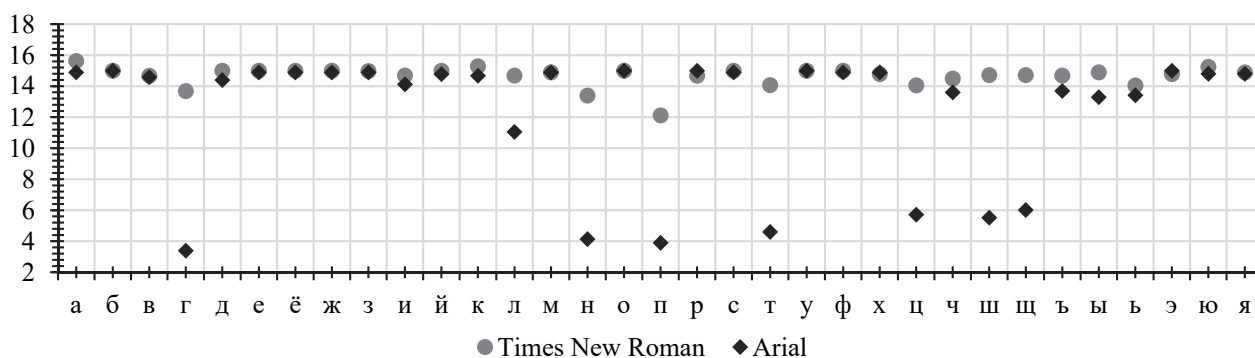


Рис. 1. Математическое ожидание значений оттенков при растривании символов текста

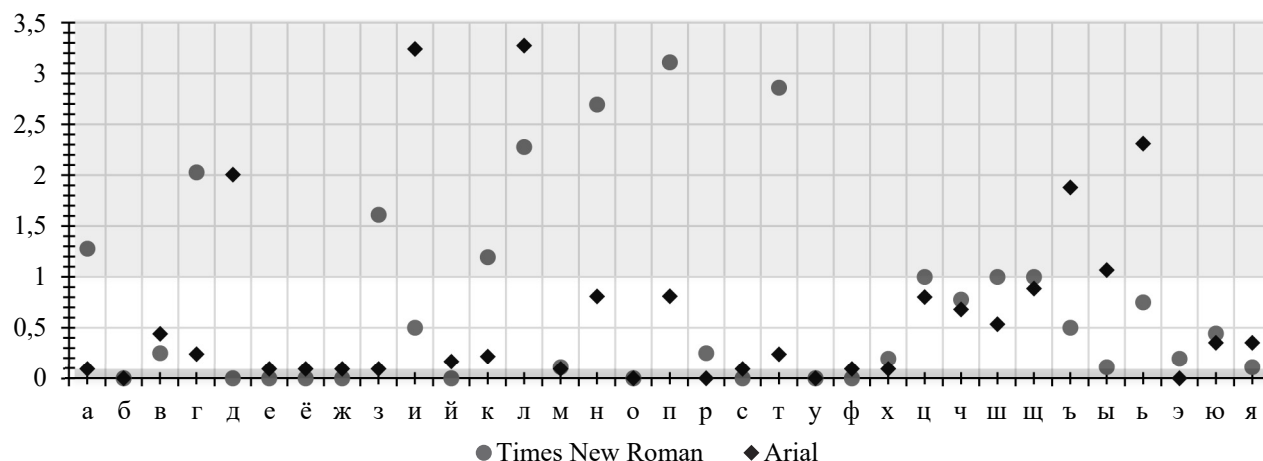


Рис. 2. Дисперсия значений оттенков при растривании символов текста

Самым простым и удобным способом сокрытия элементов тайного сообщения в графеме будет внедрение в графемы первой группы. При осаждении в символы второй группы нужно выполнить предварительный анализ, учитывая размер кегля, конкретный документ-контейнер, количество требуемых оттенков пикселей. При сокрытии в символах третьей группы нужно анализировать конкретный документ-контейнер, учитывая не только размер кегля, но и гарнитуру, что требует больше ресурсов времени и объема оперативной памяти компьютера.

Закключение. В статье проведен анализ дискретных распределений букв русского алфавита по размеру используемого кегля и вероятностям появления определенного числа оттенков, образующихся при растривании текстового документа (используемого в качестве стеганоконтейнера, S). Этот анализ основан на вычислении и использовании основных статистических параметров, что позволило разделить все буквы на три группы. А это, в свою очередь, делает алгоритм

внедрения тайной информации в S более гибким (позволяет находить лучшие решения по быстродействию и пропускной способности) и устойчивым к случайным или преднамеренным преобразованиям S . При обработке графем в электронном виде предложенное разбиение на группы предполагает внедрение сообщения в наиболее сложные по строению буквы. При внедрении в остальные группы следует анализировать S на наличие достаточного количества оттенков для размещения информации.

Кроме того, анализ распределений пикселей при конвертации контента из PDF в PNG может быть использован для защиты авторского права путем скрытого хранения цифровых водяных знаков. Чтобы это сделать, нужно выбирать символы из разных групп, что повысит пропускную способность канала и уменьшит возможность обнаружения стеганоконтейнера визуальными или другими способами, а также упростит алгоритмы встраивания (извлечения) скрытой информации.

Список литературы

1. Reichman J. H., Okediji R. L. When Copyright Law and Science Collide: Empowering Digitally Integrated Research Methods on a Global Scale // *MinnLawRev.* 2012. Vol. 96 (4). P. 1362–1480.
2. Урбанович П. П., Романенко Д. М. Компьютерные сети и сетевые технологии. Минск: БГТУ, 2022. 608 с.
3. Kim M. The creative commons and digital protection in the digital era: uses of Creative Commons licenses // *Journal of Computer-Mediated Communication.* 2008. Vol. 13. P. 187–209.
4. Micunovic M., Balkovich, L. Author's rights in the digital age: how Internet and peer-to-peer file sharing technology shape the perception of copyrights and copywrongs // *Libellarium Journal for the Research of Writing Books and Cultural Heritage Institutions.* 2016. Vol. 8 (2). P. 27–64. DOI: 10.15291/libellarium.v0i0.232.
5. Шутько Н. П. Защита и передача текстовой информации на основе изменения кернинга // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика.* 2017. № 2 (200). С. 92–95.
6. Шутько Н. П. Защита авторских прав на электронные текстовые документы методами стеганографии // *Труды БГТУ.* 2013. № 6 (162): Физико-математические науки и информатика. С. 131–134.
7. Блинова Е. А., Урбанович П. П. Сравнительные особенности использования стеганографических методов в электронных картах // *Информационные технологии в промышленности, логистике и социальной сфере (ITI-2019): тез. докл. X Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 23–24 мая 2019 г.* Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2019. С. 22–25.

8. Guo, L., Meng, X. Digital Content Provision and Optimal Copyright Protection // *Management Science*. 2015. Vol. 61 (5). P. 1183–1196. DOI: <https://doi.org/10.1287/mnsc.2014.1972>.
9. Bouchoux D. E. Intellectual Property: The Law of Trademarks, Copyrights, Patents, and Trade Secrets. CengageLearning, 2017. 576 с.
10. Блинова Е. А. Стеганографический метод на основе изменения междустрочного расстояния неотображаемых символов строк электронного текстового документа // *Труды БГТУ*. 2016. № 6 (188): Физико-математические науки и информатика. С. 166–169.
11. Shutko N., Urbanovich P., Zukowski P. Method of syntactic text steganography based on modification of the document-container aprosh // *PrzeglądElektrotechniczny*. 2018. Vol. 6. P. 82–85. DOI: 10.15199/48.2018.06.15.
12. Савельева М. Г., Урбанович П. П. Метод стеганографического преобразования web-документов на основе растровой графики и модели RGB // *Труды БГТУ*. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.52065/2520-6141-2022-260-2-99-107>.
13. Prasad S., Pal A. K. An RGB colour image steganography scheme using overlapping block-based pixel-value differencing // *Royal Society Open Science*. 2017. Vol. 4. 16 p. DOI: 10.1098/rsos.161066.
14. Агеев В. Н., Соломыков В. С. Моделирование процесса растривания векторных шрифтов в выводных устройствах низкого разрешения // *Известия ТулГУ*. Технические науки. 2013. № 3. С. 9–16.
15. Тоотс Виллу. Современный шрифт. М.: Книга, 1966. 272 с.
16. Рыжанкова А. С. Анатомия буквы: анализ названий элементов // *Труды БГТУ*. 2022. Сер. 4, Принт- и медиатехнологии. 2022. № 1 (255). С. 131–139. DOI: <https://doi.org/10.52065/2520-6729-2022-255-1-18>.
17. Ковалев Е. А., Медведев Г. А. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М.: Юрайт, 2016. 284 с.

References

1. Reichman J. H., Okediji R. L. When Copyright Law and Science Collide: Empowering Digitally Integrated Research Methods on a Global Scale. *MinnLawRev*, 2012, vol. 96 (4), pp. 1362–1480.
2. Urbanovich P. P., Romanenko D. M. *Komp'yuternyye seti i setevyye tekhnologii* [Computer networks and network technologies]. Minsk, BSTU Publ., 2022. 608 p. (In Russian).
3. Kim M. The creative commons and digital protection in the digital era: uses of Creative Commons licenses. *Journal of Computer-Mediated Communication*, 2008, vol. 13, pp. 187–209.
4. Micunovic M., Balkovich, L. Author's rights in the digital age: how Internet and peer-to-peer file sharing technology shape the perception of copyrights and copywrongs. *Libellarium Journal for the Research of Writing Books and Cultural Heritage Institutions*, 2016, vol. 8 (2), pp. 27–64. DOI: 10.15291/libellarium.v0i0.232.
5. Shutko N. P. Protection and transmission of textual information based on change. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 92–95 (In Russian).
6. Shutko N. P. Copyright protection for electronic text documents using steganography methods. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 131–134 (In Russian).
7. Blinova E. A., Urbanovich P. P. Comparative features of the use of steganographic methods in electronic maps. *Informatsionnyye tekhnologii v promyshlennosti, logistike i sotsial'noy sfere (ITI – 2019): tezisy dokladov X Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Information technologies in industry, logistics and social sphere (ITI – 2019): abstracts X International scientific and technical conference]. Minsk, 2019, pp. 22–25 (In Russian).
8. Guo, L., Meng, X. Digital Content Provision and Optimal Copyright Protection. *Management Science*, 2015, vol. 61 (5), pp. 1183–1196. DOI: <https://doi.org/10.1287/mnsc.2014.1972>.
9. Bouchoux D. E. Intellectual Property: The Law of Trademarks, Copyrights, Patents, and Trade Secrets. Cengage Learning, 2017. 576 p.
10. Blinova E. A. Steganographic method based on changing the line spacing of non-displayed characters of lines of an electronic text document. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 166–169 (In Russian).
11. Shutko N., Urbanovich P., Zukowski P. A method of syntactic text steganography based on modification of the document-container aprosh. *PrzeglądElektrotechniczny*, 2018, vol. 6, pp. 82–85. DOI: 10.15199/48.2018.06.15.
12. Saveleva M. G., Urbanovich P. P. Method of steganographic transformation of web-documents based on raster graphics and RGB model. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2022, no. 2, pp. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.52065/2520-6141-2022-260-2-99-107>. (In Russian).

13. Prasad S., Pal A. K. An RGB colour image steganography scheme using overlapping block-based pixel-value differencing. *Royal Society Open Science*, 2017, vol. 4. 16 p. DOI: 10.1098/rsos.161066.
14. Ageyev V. N., Solomykov V. S. Modeling the process of rasterization of vector fonts in low-resolution output devices. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskiye nauki* [News of TulGU. Technical science], 2013, no. 3, pp. 9–16 (In Russian).
15. Toots Willu. *Sovremennyy shrift* [Modern typeface]. Moscow, Kniga Publ., 1966. 272 p. (In Russian).
16. Ryzhankova A. S. Anatomy of a letter: analysis of the names of elements *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 4, Print- and Mediatechnologies, 2022, no. 1, pp. 131–139 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.52065/2520-6729-2022-255-1-18>.
17. Kovalev E. A., Medvedev G. A. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika dlya ekonomistov: uchebnik i praktikum dlya prikladnogo bakalavriata* [Probability theory and mathematical statistics for economists: textbook and workshop for applied baccalaureate]. Moscow, Yurayt Publ., 2016. 284 p. (In Russian).

Информация об авторах

Савельева Маргарита Геннадьевна – аспирант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: saveleva@belstu.by

Урбанович Павел Павлович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: p.urbanovich@belstu.by, pavel.urbanovich@kul.pl

Information about the authors

Saveleva Margarita Gennadievna – PhD student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University. (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: saveleva@belstu.by

Urbanovich Pavel Pavlovich – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: p.urbanovich@belstu.by, pavel.urbanovich@kul.pl

Поступила 05.05.2023

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

SYSTEMS ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS

УДК 004.853

В. С. Кантарович, Н. И. Гурин

Белорусский государственный технологический университет

ТРЕХМЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ ДРЕВОСТОЯ ЕСТЕСТВЕННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

Публикация посвящена разработке методов визуализации размещения отдельных деревьев на плоскости в древостое естественного происхождения. Полученная на основе разработанных методов методика размещения деревьев делает возможным применение различных методов моделирования развития древостоя с учетом конкуренции между деревьями и условий произрастания отдельных деревьев. В методе размещения мест произрастания деревьев использовалась радиальная функция распределения точек на плоскости на основе процедуры термодинамической оптимизации. Каждому месту произрастания дерева сопоставлялась основная его характеристика – рост дерева на основе методики выполнения маркированного точечного процесса над множеством полученных точек распределения. Трехмерная визуализация деревьев сосны в заданном древостое с привязкой к местам размещения деревьев с соответствующими их характеристиками разработана в среде Unity на основе языка C#. Для изображения внешнего вида деревьев использована среда трехмерной графики Blender.

Ключевые слова: трехмерная визуализация дерева сосны, радиальная функция размещения, термодинамическая оптимизация, маркированный точечный процесс.

Для цитирования: Кантарович В. С., Гурин Н. И. Трехмерная визуализация размещения древостоя естественного происхождения // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 97–103. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-14.

V. S. Kantarovich, N. I. Gurin

Belarusian State Technological University

3D VISUALIZATION OF NATURAL STAND

The publication is devoted to the development of visualization methods for the placement of individual trees on a plane in a forest stand of natural origin. The distribution of trees obtained on the basis of the developed methods makes it possible to use various methods for modeling the development of a forest stand, taking into account the competition between trees and the growing conditions of individual trees. In the method of placing tree growth sites on a plane, a radial distribution function of points on a plane was used based on a thermodynamic optimization procedure. Each place of tree growth was compared with its main characteristic - the growth of the tree based on the method of performing a marked point process over a set of obtained distribution points. Three-dimensional visualization of trees in a given forest stand with reference to tree placements with their corresponding characteristics was developed in the Unity environment based on the C# language. To depict the appearance of trees, the Blender 3D graphics environment was used.

Key words: 3D visualization of a pine tree, radial distribution function, thermodynamic optimization, marked point process.

For citation: Kantarovich V.S., Gurin N. I. 3D visualization of natural stand. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 97–103. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-14 (In Russian).

Введение. В процессах лесовыращивания используются различные модели развития древостоя, на основе которых разрабатываются оптимальные

приемы ухода за лесом. В случае искусственных лесопосадок такие модели могут применяться непосредственно. Однако для применения моделей

развития к древостою естественного происхождения необходимо, прежде всего, иметь картину размещения деревьев в данном древостое на данной площади, учитывающую общие закономерности роста леса.

В настоящей работе исследованы и реализованы методы размещения на плоскости отдельных деревьев в древостое естественного происхождения на базе радиальной функции распределения с присвоением каждому месту размещения скалярной марки-характеристики роста дерева на основе маркированного точечного процесса, а также проведена визуализация отдельных деревьев в местах их размещения в среде Unity. Для выполнения трехмерной визуализации отдельных деревьев сосны использована среда разработки объектов трехмерной графики Blender, а для привязки таких объектов к местам размещения деревьев в древостое – среда Unity.

Основная часть. Всякое насаждение возникает и формируется в результате размножения растений в условиях сложных взаимодействий между растениями и средой, отдельными особями, видами и группами видов растений. Поэтому насаждение представляет собой не случайный набор особей и видов, а закономерный подбор их и объединение в растительные группировки. Древостоем называют совокупность деревьев, являющихся наиболее важными компонентами леса, его основной составной частью.

Следовательно, выявляется необходимость реализации и использования специальных математических методов моделирования точечных структур на плоскости, в которых для соответствия модели реальному древостою при визуализации его развития учитываются основные его характеристики, биологические и экологические особенности древесной породы.

Таким образом, на пространственное размещение в древостое также влияют отношения между деревьями, поэтому неуместно учитывать статические характеристики древостоя, такие как, высота дерева, высота ствола до кроны, диаметр ствола, площадь проекции кроны, количество стволов [1].

Для моделирования трехмерной визуализации размещения естественного древостоя на заданной площади необходимо знать размер площадки и количество деревьев, а также иметь модель самого дерева с набором характеристик, которые называются марками. Моделирование размещения древостоя на плоскости и нахождения x - y -координат отдельного дерева сводится к

решению задач о генерировании пространственного размещения точек на выбранном участке в некоторой области плоскости и сопоставлению с характеристиками отдельных деревьев. Подразумевается, что точечный процесс однородный, т. е. вероятность того, что в некоторую область с площадью S попадет ровно N точек, зависит от N и S , но не будет зависеть от самой области, ее формы и положения на плоскости. Результатом последовательного решения этих задач должен явиться смоделированный естественный древостой.

Разработка моделей трехмерной визуализации деревьев в древостое (рис. 1) на заданной площади производится при помощи программных средств редактора трехмерной компьютерной графики Blender.

При разработке трехмерной модели визуализации дерева сосны необходимо обратить внимание на ее отличительные признаки, такие как овальная крона, ветви не закрывают ствол и направлены вверх, длинная мягкая хвоя. Кроме того, учитывались такие характеристики, как количество ветвей, высота и толщина ствола, расстояние между началом ствола и ветвями, а также основные характеристики хвои – размеры и количество.

Для сравнения размеров смоделированных для всех возрастов погодишно деревьев сосны, приведены модели возрастом от 4–10 лет, 15, 17, 20, 25, 30, 40 и 50 лет. В возрасте от 5 до 10 лет деревья дают прирост от 25 до 60 см ежегодно, после 10 лет приросты достигают от 0,6 м до 1 м ежегодно. Однако в возрасте от 30 до 50 лет прирост в высоту замедляется и начинается прирост стволов в ширину, при этом молодое дерево сосны имеет форму конуса, а с возрастом приобретает зонтиковидную форму. Сравнение вида смоделированных деревьев сосны представлено на рис. 1.

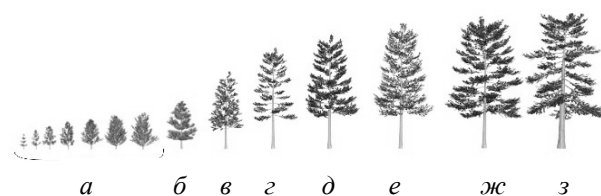


Рис. 1. Сравнительные размеры деревьев сосны в возрасте 4–10 (а), 15 (б), 17 (в), 20 (г), 25 (д), 30 (е), 40 (ж) и 50 (з) лет

Для реализации пространственного размещения деревьев в древостое естественного происхождения будем использовать метод по генерированию пространственного размещения точечных

структур на плоскости, использующий функциональные характеристики древостоя, а именно радиальную функцию распределения $g(r)$, где r – расстояние между точками.

Данный метод позволяет получить размещение точек на плоскости, где по заранее заданной радиальной функции распределения $g^0(r)$ генерируется размещение с радиальной функцией распределения $g(r)$ такое, что $A^* = |g^0 - g| < \epsilon$, где g^0 – заранее заданное значение радиальной функции для выбранного типа размещения, g – значение радиальной функции для данного размещения, а ϵ – заранее заданное малое число, характеризующее точность аппроксимации.

Радиальная функция распределения [2] (РФР) выявляет множество точек p_i , где $i = 1, \dots, N$, размещенных в некоторой области площади S и находящихся друг от друга на расстоянии r . Таким образом, РФР характеризует вероятность обнаружения одного объекта на заданном расстоянии от другого. Радиальную функцию распределения используют для проверки принадлежности рассматриваемого размещения к одному из возможных типов. А именно, существует три основных типа размещения: случайное, регулярное и контактное (групповое). Под регулярным понимается размещение, каждая точка которого имеет область (круговую), не содержащую других точек. Контактное размещение – это когда точки расположены группами (куртинами), именно оно отражает закономерности роста естественных древостоев (рис. 2).

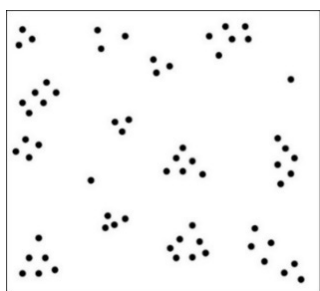


Рис. 2. Контактное размещение деревьев

Подразумевается, что вокруг каждого объекта, то есть дерева, существует область радиуса r . Если в этой области вероятность встретить другой объект мала, тогда радиальная функция распределения на малых расстояниях менее 1, а с увеличением расстояния – приближается к горизонтальной прямой, как показано на рис. 3. Именно такое поведение функции свидетельствует о регулярных размещениях, характерных для лесопосадок.

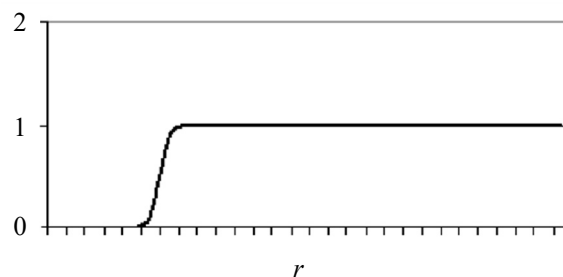


Рис. 3. График радиальной функции распределения в случае изолированных деревьев

В случае группового размещения на малых расстояниях функция имеет наибольшие значения, далее (если группы расположены случайно) она убывает и приближается к горизонтальной прямой. Поведение радиальной функции при групповом размещении точек представлено на рис. 4.

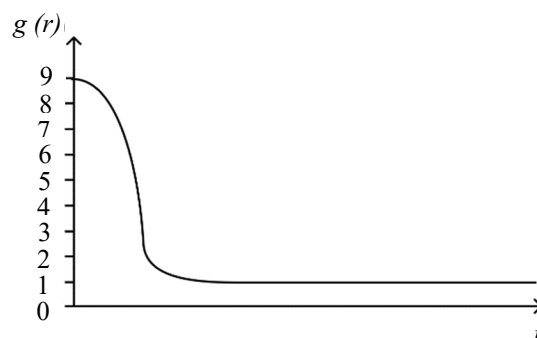


Рис. 4. График радиальной функции распределения в случае группового размещения деревьев

Алгоритм построения РФР состоит в следующем. В качестве начала координат можно взять точку 1, вокруг которой описать две окружности радиусами r (внутренний радиус) и $r + \Delta r$ (внешний радиус), где Δr мало по сравнению с r . Площадь кольца между двумя окружностями равна $2\pi r \Delta r$. Пусть в кольце площадью $2\pi r \Delta r$ находится Δn точек. Тогда число точек на единицу площади данного кольца (плотность точек в кольце) определяется формулой:

$$\rho(r) = \frac{\Delta n}{2\pi r \Delta r}.$$

Радиальная функция распределения выражается равенством:

$$g(r) = \frac{\rho(r)}{\rho_{cp.}(r)},$$

где $\rho_{cp.}(r) = N/S$ – средняя плотность размещения точек, то есть среднее число точек на единичной площади.

Представленная выше формула, свидетельствует о том, что значения РФР определяют вероятность обнаружения какой-либо точки на расстоянии r от фиксированной точки.

Метод генерирования размещения по заданной радиальной функции распределения состоит из следующих этапов.

1) Сначала рассчитывается $g^0(r)$ для выбранного типа размещения.

2) Затем выбирается квадрат размером a , в котором будет генерироваться размещение и количество точек N , которые необходимо разместить.

3) Далее в выбранном квадрате генерируется случайное начальное расположение N точек и для каждой точки высчитывается радиальная функция распределения $g(r)$. Вокруг каждой точки строится окружность радиусом r_0 и находится количество точек, расположенных в рамках этой окружности.

4) После перебора N точек получается последовательность N_i чисел, определяющих количество точек размещения в кольце с номером i . Затем вычисляются суммарные площади всех колец S_i , а площадь той части кольца, которая выходит за пределы квадрата, – исключается. Исходя из этого радиальная функция распределения находится по формуле

$$g_i = \left(\frac{N_i}{S_i} \right) \left(\frac{a^2}{N_i} \right).$$

5) Вычисляется $|g^0 - g|$ для начального размещения. Если $|g^0 - g| < \varepsilon$, то, значит, размещение удовлетворяет условию и выбранному типу размещения, если нет, то происходят «единичные» модификации над каждой точкой.

6) Далее существует несколько этапов, описывающих совершаемые над точками единичные модификации, число которых будем задавать, например, $M = 200$, для того, чтобы сдвинуть точки и создать размещение нужного типа. А именно:

– случайным образом выбирается точка и строится квадрат, центр которого совпадает с координатами выбранной точки, а длина стороны определяется как $CR_{\max}$, где C – интенсивность модификации (в расчётах равна 4), $R_{\max}$ – выбирается с таким расчетом, чтобы $g(r)$ отображало все существенные особенности структуры (в расчётах равно 10 м);

– затем эта случайно выбранная точка перемещается на случайное место внутри построенного квадрата;

– после этого выполняется алгоритм Метрополиса [3], который генерирует последовательность

объектов, где каждый следующий объект зависит от предыдущего.

– после того, как произведены все единичные модификации для текущего размещения, опять вычисляется $|g^0 - g|$, и если $|g^0 - g| < \varepsilon$, то, следовательно, данное размещение удовлетворяет выбранному типу размещения и алгоритм завершает работу, если нет, то повторно совершаются модификации над точками.

Результатом успешного выполнения алгоритма будет являться набор точек с x - y координатами, соответствующими координатам размещения отдельных стоящих деревьев, и график РФР, по которому определяется тип размещения. На рис. 5 показаны сгенерированные по РФР места размещения деревьев в древостое на плоскости с плотностью 1000 деревьев на 1 га, на рис. 6 отображен график РФР для полученного размещения.

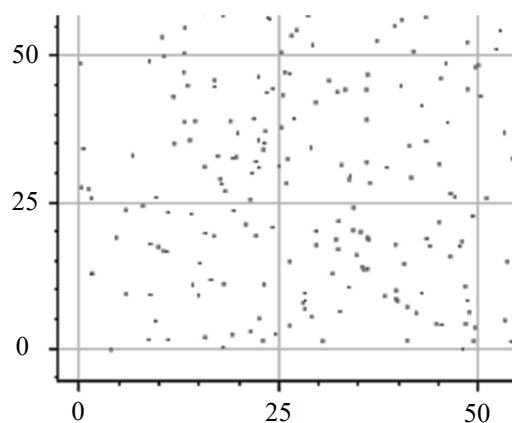


Рис. 5. Результат работы метода генерирования размещения точек по радиальной функции распределения

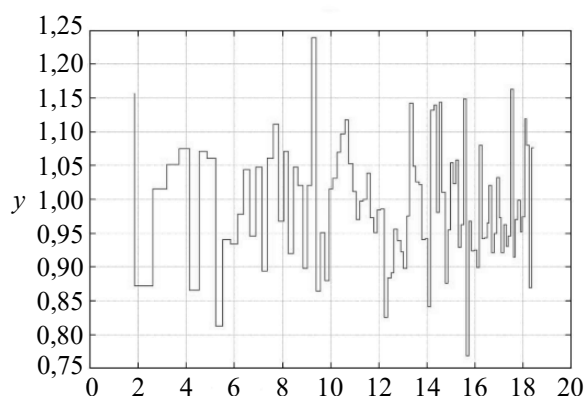


Рис. 6. График радиальной функции распределения для полученного типа размещения

Следующим этапом после нахождения координат x - y точек размещения деревьев для их последующей визуализации в древостое является

приписывание им набора характеристик (марок) отдельного дерева: возраст, высота, диаметр ствола и т. п. В общем случае точкам размещения отдельно стоящих деревьев с x - y координатами на плоскости в общем случае ставятся в соответствие векторы $(z_i, \dots, z_m)$, где z_i – вещественное число, соответствующее какой-то отдельной характеристике. В результате будет получен математический объект, который называется маркированным точечным процессом на плоскости, где случайный вектор z^i – векторная марка, соответствующая точке с координатами (x_i, y_i) . В данной работе мы ограничиваемся простейшим случаем приписывания точкам скалярной марки, когда $m=1$, и этой маркой будет высота дерева.

В качестве функции, которая отражает пространственную коррелированность марок выбрана полувариограмма $\gamma(r)$, которая зависит от расстояния между рассматриваемыми точками и вычисляется по формуле

$$\gamma(r) = \frac{1}{2n_r} \sum_{i,j} (z_i - z_j)^2,$$

где n_r – число рассматриваемых пар точек, расстояние между которыми примерно равно.

Для распределения марки по отдельным точкам реализован метод термодинамической оптимизации [4], в котором соблюдается условие, выраженное в формуле

$$A^* = |\gamma^0 - \gamma| = \int_0^{R_{\max}} \text{abs}[\gamma^0(r) - \gamma(r)] dr < \varepsilon$$

где $R_{\max}$ – радиус области, в котором рассчитывалась полувариограмма, а ε – заданное малое число.

Метод распределения значений марок z по N точкам размещения состоит из нескольких этапов [3]:

1) каждой точке процесса N с координатами (x_i, y_i) случайно присваивается значение z_i , производятся M единичных модификаций, при этом случайным образом выбираются две точки i и j и затем значение марки z_i приписывается точке с номером j и наоборот;

2) после каждой единичной модификации вычисляется изменение критерия $A^* - \Delta A^*$;

3) если критерий A^* удовлетворяет условию, что $A^* = |\gamma^0 - \gamma| < \varepsilon$, то тогда алгоритм завершает работу, если нет, то повторно совершаются модификации над точками.

После завершения процесса приписывания всем точкам на плоскости марок необходимо на

последнем этапе работы визуализировать в этих точках трехмерное изображение дерева, которое соответствует его марке, то есть росту дерева, согласно виду отдельных экземпляров (внешний вид деревьев представлен на рис. 1).

Для моделирования трёхмерной визуализации размещения естественного древостоя на заданной площади разработан прототип системы, который выполняет следующий функционал:

- реализация введения пользователем количества деревьев;
- генерирование начального размещения N точек, которые равны количеству деревьев, введенному пользователем;
- генерирование размещения древостоя после применения алгоритма;
- выполнение графика начального случайного размещения;
- реализация графика полученного контактного размещения после работы алгоритма генерирования размещения при помощи радиальной функции;
- создание графика радиальной функции распределения, полученной после проведения алгоритма генерирования размещения;
- реализация трёхмерной визуализации пространственного размещения древостоя.

Разработанная система включает в себя:

– модуль на языке FORTRAN, который выполняет радиальную функцию распределения и алгоритм генерирования размещения по заданной радиальной функции распределения и алгоритм генерирования маркированного точечного процесса [3];

– модуль на языке C#, который включает в себя WPF-приложение, для реализации взаимодействия с пользователем и построения нужных графиков;

– Unity-модуль, который создает трехмерную визуализацию пространственного размещения древостоя по точкам с приписанными им марками на основе 3D-моделей сосны для разного возраста, разработанных в редакторе Blender.

На основе модуля на языке FORTRAN создана DLL-библиотека, которая интегрирована в WPF-приложение. Таким образом модуль WPF взаимодействует с FORTRAN-модулем через DLL-библиотеку, вызывая из нее необходимые функции для дальнейшей трехмерной визуализации.

Параметры конфигурации, которые необходимы для работы всех основных алгоритмов, задаются через экземпляры класса и записываются в конфигурационный файл. После вызова всех

основных функций создается несколько файлов, через которые обмениваются данными FORTRAN-модуль, WPF-приложение и Unity-модуль.

Для реализации трехмерной визуализации пространственного размещения естественного древостоя использовались разработанные трехмерные модели дерева сосны. В зависимости от выбранного пользователем среднего возраста древостоя выбираются модели, подходящие по данному значению марки.

На основе всех построенных моделей созданы шаблоны в Unity-модуле, которые будут генерироваться в полученных ранее точках с (x_i, y_i) – координатами. Все координаты и полученные марки возраста для каждой точки (дерева) считываются из файла, сгенерированного FORTRAN-модулем.

Итоговая трехмерная графическая визуализация древостоя, размещенного на заданной площади древостоя естественного происхождения, получена с помощью Unity-модуля системы и представлена в проекции: вид сверху – на рис. 7 (для древостоя в возрасте 10 лет) и рис. 8 (для древостоя в возрасте 50 лет).

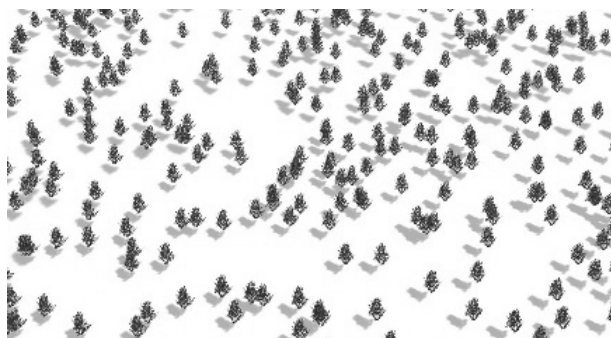


Рис. 7. Визуализация древостоя среднего возраста 10 лет

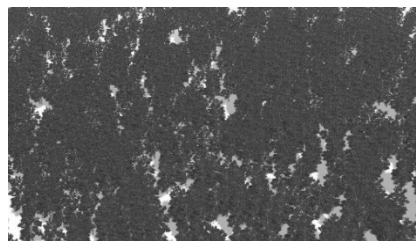


Рис. 8. Визуализация древостоя среднего возраста 50 лет

На рис. 9 представлена визуализация древостоя сосны в возрасте 50 лет внутри.



Рис. 9. Визуализация древостоя среднего возраста 50 лет внутри

Заключение. Таким образом, разработанная методика получения трехмерной визуализации древостоя естественного происхождения в общем случае для любого среднего возраста позволяет в дальнейшем применять различные модели динамического развития данного древостоя для планирования и проведения в нем различных лесохозяйственных мероприятий: рубок ухода, постепенных, главных рубок и т. п. Кроме того, для лесоустроителей реализована возможность «побывать» внутри смоделированного леса, пометить в рубку «неперспективные» деревья, подсчитать их количество в данном древостое и оценить в нем общий запас древесины.

Список литературы

1. Андреев К. А., Вилкин А. Д. Книга юного лесовода. Петрозаводск: Институт леса КарНЦ РАН, 2006. 347 с.
2. Анализ структуры древесных ценозов / А. И. Бузыкин [и др.]. Новосибирск: Наука, 1985. 95 с.
3. Гусаков С. В., Фрадкин А. И. Моделирование на ЭВМ пространственной структуры лесных фитоценозов. Минск: Наука и Техника, 1990. 112 с.
4. Грабарник П. Я., Комаров А. С. Статистический анализ пространственных структур: методы, использующие расстояния между точками. Пущино: НЦБИ АН СССР, 1980 48 с.

References

1. Andreev K. A., Wilkin A. D. *Kniga yunogo lesovoda* [The book of the young arborist]. Petrozavodsk, Forest Institute of Karelian Research Center RAS Publ., 2006. 347 p. (In Russian).
2. Buzykin A. I., Gavrilov V. L., Sekretenko O. I., Khlebopros R. G. *Analiz struktury drevesnykh tsenozov* [Analysis of the structure of tree cenoses]. Novosibirsk, Nauka, Publ. 1985. 95 p. (In Russian).
3. Gusakov S. V., Fradkin A. I. *Modelirovaniye na EVM prostranstvennoy struktury lesnykh fitotsenozov* [Computer modeling of the spatial structure of forest phytocenoses]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1990. 112 p. (In Russian).

4. Grabarnik P. Y., Komarov A. S. *Statisticheskiy analiz prostranstvennykh struktur: metody, ispol'zuyushchiye rasstoyaniya mezdu tochkami* [Statistical analysis of spatial structures: Methods using distances between points]. Pushchino, NCBI AS USSR Publ., 1980. 48 p. (In Russian).

Информация об авторах

Кантарович Виктория Сергеевна – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: kantarovich.v@gmail.com

Гурин Николай Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ngourine@mail.ru

Information about the authors

Kantarovich Victoria Sergeevna – Master's degree student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kantarovich.v@gmail.com

Gurin Nikolay Ivanovich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ngourine@mail.ru

Поступила после доработки 07.09.2023

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ALGORITHMIC AND PROGRAMMING

УДК 004.4-004.9

A. A. Prihozhy

Belarusian National Technical University

OPTIMIZATION OF PROGRAMMING TEAMS ON COMPATIBILITY OF PROGRAMMERS

The programming team formation problem has been solved using different optimization criteria: programmer and programming team competences; required set of skills, productivity of teams, etc. This paper formulates the problem of optimizing programming teams accounting for pairwise compatibility of programmers described by a matrix whose elements are changes of the programmer and team runtimes when two programmers are included in the same team. When the matrix element is positive the runtime increases, when it is negative the runtime decreases. The problem is formulated as to partition a set of programmers into a set of teams in such a way that the overall teams' runtime is minimal. The graph clique partitioning problem is related to the team formation problem. It maximizes the overall sum of constant weights of edges located within the cliques. The team formation problem differs because it searches for a solution by changing the graph edge weights. Both problems are NP-hard. The paper proposes a greedy algorithm of stepwise pairwise merge of programming teams and provides a software for team optimization. Experimental results show that the algorithm finds partitions of large sets of programmers and generates teams which reduce the runtime by up to 36 % compared to the one-programmer teams and the single team.

Keywords: programmer, compatibility of programmers, team formation problem, project, runtime, optimization.

For citation: Prihozhy A. A. Optimization of programming teams on compatibility of programmers. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no 2 (272), pp. 104–110. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-15.

А. А. Прихожий

Белорусский национальный технический университет

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММИСТСКИХ КОМАНД ПО СОВМЕСТИМОСТИ ПРОГРАММИСТОВ

Задача формирования команд программистов решалась с использованием различных критериев оптимизации: компетенций программиста и команды программистов; требуемого набора навыков, производительности команд и др. В статье формулируется задача оптимизации команд с учетом попарной совместимости программистов, описываемых матрицей, элементами которой являются изменения времен работы программистов и команд при попарном включении программистов в одну команду. Если элемент матрицы положительный, время работы увеличивается, если отрицательный, время работы уменьшается. Задача формулируется так, чтобы разделить множество программистов на множество команд таким образом, чтобы общее время работы команд было минимальным. Задача кликового разбиения графа связана с задачей формирования команд. Она максимизирует общую сумму постоянных весов ребер в кликах графа. Задача формирования команд отличается тем, что она ищет решение, изменяя веса ребер графа. Обе задачи являются NP-трудными. В статье предлагается жадный алгоритм пошагового слияния команд и разрабатывается программное обеспечение для оптимизации команд. Экспериментальные результаты показали, что алгоритм находит разбиение больших множеств программистов и генерирует команды, сокращающие время работы до 36% по сравнению с командами из одного программиста и единой командой.

Ключевые слова: программист, совместимость программистов, задача формирования команд, проект, время выполнения, оптимизация.

Для цитирования: Прихожий А. А. Оптимизация программистских команд по совместимости программистов // Труды БГТУ. Сер. 3. Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 104–110. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-15 (In English).

Introduction. The problem of allocating programmers to programming teams has not received too much attention in the scientific literature. Agile [1] is a set of values and principles of developing software and finding solutions over joint efforts of development teams and customers. Work [1] describes the process of task allocation as including three mechanisms of workflow across teams and five types of task allocation strategies.

Work [2] emphasizes that a successful software development team must be made up of competent developers. Competency being the ability of developers to carry out a job properly is considered as a combination of knowledge, skills and attitudes used to improve performance. The agile team allocation is a NP-hard problem since it comprises the allocation of self-organizing and cross-functional teams. Work [2] presents a hybrid approach based on *NSGA-II* multi-objective metaheuristic and Mamdani Fuzzy Inference Systems to solve the agile team allocation problem.

Agent-based evolutionary methods of optimization [3] aim at performing the management of teams. Papers [4–6] propose tools that increase the productivity and efficiency of teams working on various projects. *Wrike* [4] is a platform that manages projects, organizes work, enhances collaboration and accelerates execution across all departments. *Flow* [5] is a modern software for teams, which brings together tasks, projects, timelines, and conversations.

Work [7] proposes a method of formalization and evaluation of the programmers' and programming teams' competency. Work [8] solves the problem of allocating experts to maximum set of programming teams. Since the problem of distributing programmers on a set of teams is combinatorial, works [9–11] developed a genetic-algorithm-based approach to finding problem solutions at different requirements to programmers' competences.

This paper considers how the compatibility of programmers influence the optimization of teams' runtime. Its contribution is as follows:

1. A matrix of compatibility of programmers is proposed which allows the evaluation of changes in the teams' overall runtime.

2. It is shown how the changes in the team counts, sizes and staff influence the teams' runtime.

3. A greedy algorithm of stepwise pairwise merge of teams is developed which exploits programmers' compatibility and minimizes the teams' runtime.

4. The experimental results obtained show that the minimum value of teams' runtime depends on the features of compatibility matrix and the number of programmers.

Main part. *Modelling compatibility of programmers in teams.* Let $P = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ be a set of

n programmers participating in an IT project. Vector $t = (t_0, \dots, t_i, \dots, t_{n-1})$ describes the basic runtimes in days to be spent by the programmers while working on the project. It does not account the interaction of programmers within a team.

Let $G = \{g_1 \dots g_k\}$ be a set of teams the programmers are allocated to. If the programmers are included and work in the same team, their runtimes are to be corrected. The correction depends on the compatibility of programmers. Matrix dP represents in percent changes in the programmers' runtimes. Its diagonal values are $dP_{i,i} = t_i$. Its nondiagonal values $dP_{i,j}$ describe changes in the runtime of programmer j caused by programmer i . If $dP_{i,j}$ is negative, the runtime spent by programmer j decreases, if the value is positive, the runtime increases. The dP matrix describes both values $dP_{i,j}$ and $dP_{j,i}$, which are different in general case. Regarding combinations of their signs, we consider four situations:

1. Both $dP_{i,j}$ and $dP_{j,i}$ are negative. It means that t_i and t_j are reduced due to influence of the p_i and p_j programmers each other when, for example, they exchange knowledge and experience on technologies needed for the project.

2. Value of $dP_{i,j}$ is negative and value of $dP_{j,i}$ is positive. It means that t_i is increased and t_j is decreased, which can happen when, for example, programmer p_i transfers knowledge and experience to programmer p_j and spend some time to do it without getting knowledge and experience in opposite direction.

3. Value of $dP_{i,j}$ is positive and value of $dP_{j,i}$ is negative. It means that t_j is increased and t_i is decreased when programmer p_j transfers knowledge and experience to programmer p_i without getting help in opposite direction.

4. Both $dP_{i,j}$ and $dP_{j,i}$ are positive. It means that t_i and t_j are both increased since the p_i and p_j programmers are incompatible within one team.

Matrix dT represents programmer runtime changes in days (may be in months) and is calculated over matrix dP . Its nondiagonal element dT_{ij} is

$$dT_{i,j} = t_i \cdot dP_{i,j} / 100. \quad (1)$$

If programmer j is included in team g , its runtime t_j is changed to $t_j(g)$ that is evaluated as

$$t_j(g) = t_j + \sum_{i \in g, i \neq j} dT_{i,j} = t_j (1 + dT_j(g)), \quad (2)$$

where

$$dT_j(g) = \sum_{i \in g, i \neq j} (dP_{i,j} / 100). \quad (3)$$

The overall runtime $T(g)$ of the programmers in team g is

$$T(g) = \sum_{i \in g} t_j(g) \quad (4)$$

and the overall runtime of set G of teams is

$$T^G = \sum_{g \in G} T(g). \quad (5)$$

The compatibility of each programmer with all other programmers can be evaluated when all the programmers are included in team $single = P$. In the team, the changed runtime $t_j(single)$ of programmer j is calculated with (2) and is assigned to the matrix element dT_{jj} . In the paper, we calculate the dT matrix and carry out the optimization of each team's staff, if $dT_j(g)$ calculated with (3) is not less than -1 . Since both elements dT_{ij} and dT_{ji} are used simultaneously when i and j are included in the same team, we create a matrix dS where $dS_{ij} = dT_{ij} + dT_{ji}$, $i < j$, and $dS_{ij} = 0$ otherwise.

To illustrate our optimization model and technique, we use a set $P = \{p_1 \dots p_8\}$ of eight programmers and an example matrix dP shown in Fig. 1. The programmers' runtimes vary in the range 18.0 to 97.0 days (see matrix principal diagonal), and the overall runtime is 440 days. The runtime changes are in the range -19.2% to 18.6% .

$$dP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 30.0 & 0.0 & -6.7 & -16.8 & -2.7 & -11.9 & -11.7 & -6.4 \\ 1 & -11.9 & 18.0 & -11.4 & -15.6 & -16.5 & -8.3 & 9.2 & 1.7 \\ 2 & -11.0 & 11.9 & 72.0 & 12.0 & -7.9 & -8.7 & 2.0 & 5.4 \\ 3 & -6.6 & -6.7 & -8.9 & 35.0 & 18.6 & 8.2 & 6.9 & -8.0 \\ 4 & 11.6 & -6.2 & 3.8 & 16.5 & 89.0 & 5.1 & -4.9 & 16.2 \\ 5 & 12.5 & 13.0 & -10.2 & 0.0 & -16.4 & 97.0 & 16.5 & -2.0 \\ 6 & 5.3 & -15.5 & -2.1 & 10.3 & 13.4 & 10.2 & 58.0 & 0.0 \\ 7 & -12.3 & -19.2 & 3.7 & 10.4 & -13.3 & 14.1 & -12.8 & 41.0 \end{bmatrix}$$

Fig. 1. Example matrix dP of programmers' pairwise runtime changes in percent within one team

Fig. 2 depicts an example dT matrix that is computed over the dP (Fig. 1) using (1–3) and is a representation of team $single$.

$$dT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 18.8 & 0.0 & -4.8 & -5.9 & -2.4 & -11.5 & -6.8 & -2.6 \\ 1 & -3.6 & 13.8 & -8.2 & -5.5 & -14.7 & -8.1 & 5.3 & 0.7 \\ 2 & -3.3 & 2.1 & 49.1 & 4.2 & -7.0 & -8.4 & 1.2 & 2.2 \\ 3 & -2.0 & -1.2 & -6.4 & 40.8 & 16.5 & 8.0 & 4.0 & -3.3 \\ 4 & 3.5 & -1.1 & 2.7 & 5.8 & 66.9 & 5.0 & -2.8 & 6.6 \\ 5 & -3.7 & 2.3 & -7.3 & 0.0 & -14.6 & 105.6 & 9.6 & -0.8 \\ 6 & 1.6 & -2.8 & -1.5 & 3.6 & 11.9 & 9.9 & 61.1 & 0.0 \\ 7 & -3.7 & -3.5 & 2.6 & 3.6 & -11.8 & 13.7 & -7.4 & 43.8 \end{bmatrix}$$

Fig. 2. Example matrix dT of programmers' runtimes (days) and pairwise changes of runtime in team $single$

The programmers' runtimes in the team vary in range -13.8 to 105.6 days, because the runtime changes vary in range -14.7 to 16.5 days. The overall runtime of team $single$ calculated with (4) equals 399.9 days.

Fig. 3 shows an example dS matrix that is computed over the dT matrix. As many as 18 pairs of programmers included in the same team reduce the project runtime in range -0.3 down to -15.8 days each. The overall runtime can be decreased by -128.2 days. Each of rest 10 pairs increases the runtime in range 0.3 to 22.3 days. The overall runtime can be increased by 88.1 days. The sum of $-128.2 + 88.1 = -40.1$ days shows the overall runtime reduction in team $single$, which is -9.11% against the overall runtime of all one-programmer teams. The vector of runtime changes of all programmers within team $single$ is $\Delta t^{single} = (-11.2, -4.2, -22.9, 5.8, -22.1, 8.6, 3.1, 2.8)$. The runtime of programmers 0, 1, 2 and 4 is decreased, therefore they have gained from establishing the team. The runtime of programmers 3, 5, 6 and 7 is increased, therefore they have lost when included in the team. As a result, the workload of each programmer in team $single$ has been changed: $t^{single} = (18.8, 13.8, 49.1, 40.8, 66.9, 105.6, 61.1, 43.8)$. In general, the team has gained in the runtime.

$$dS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 18.8 & -3.6 & -8.1 & -7.9 & 1.1 & -15.2 & -5.2 & -6.3 \\ 1 & & 13.8 & -6.1 & -6.7 & -15.8 & -5.8 & 2.5 & -2.8 \\ 2 & & & 49.1 & -2.2 & -4.3 & -15.7 & -0.3 & 4.8 \\ 3 & & & & 40.8 & 22.3 & 8.0 & 7.6 & 0.3 \\ 4 & & & & & 66.9 & -9.6 & 9.1 & -5.2 \\ 5 & & & & & & 105.6 & 19.5 & 12.9 \\ 6 & & & & & & & 61.1 & -7.4 \\ 7 & & & & & & & & 43.8 \end{bmatrix}$$

Fig. 3. Matrix dS of pairwise total programmers' runtime changes (days) in team $single$

Matrix dT allows the evaluation of a runtime reduction potential of each programmer p_i included in team $single$. The change of the own runtime of the programmer is

$$dT_i^{own} = \sum_{j \neq i} dT_{j,i}. \quad (6)$$

The change of runtimes of all other programmers caused by programmer p_i is

$$dT_i^{oth} = \sum_{j \neq i} dT_{i,j}. \quad (7)$$

The overall change associated with programmer p_i is $dT_i^{all} = dT_i^{own} + dT_i^{oth}$. The lower value of dT_i^{all} ,

the higher potential p_i has with respect to reduction of the overall team runtime.

Table 1 reports the runtime changes each of the eight programmers can cause. It can be observed that programmer p_0 has the largest reducing potential of -45.2 days, and programmer p_6 has the largest increasing potential of 25.8 days. The programmers with the reducing potential must be included in a programming team first.

Table 1

Influence of compatibility of programmers on runtime changes

No	dT_i^{own}	dT_i^{oth}	dT_i^{all}	Priority
0	-11.2	-34.0	-45.2	1
1	-4.2	-34.1	-38.3	2
2	-22.9	-9.0	-31.9	3
3	5.8	15.6	21.4	7
4	-22.1	19.7	-2.4	6
5	8.6	-14.5	-5.9	4
6	3.1	22.7	25.8	8
7	2.8	-6.5	-3.7	5

Formulation of optimization problem. Let Ω be a set of all possible partitioning of set P of programmers into a set G of teams. Then we formulate the optimization problem as where T^G is defined by (5). Two cases are possible in solving (8): 1) dT_{ij} , $i \neq j$, defined by (1) is constant; 2) dT_{ij} is variable. In the paper, we assume that dT_{ij} is constant. Since dT_{ij} can be both positive and negative, and the clique partitioning problem [12, 13] related to (8) is NP-hard, the problem (8) is also NP-hard. To solve it for large programmer sets, we propose a heuristic greedy algorithm of pairwise merge of teams that gives a maximum runtime reduction at each step.

$$\min_{G \in \Omega} T^G \quad (8)$$

Greedy algorithm of stepwise pairwise merge of teams (GAMT). It is described by Algorithm 1. Its inputs are the set P of programmers, vector t of their runtimes, and matrix dS of runtime changes. Its outputs are the set G of teams and the changed runtime $T(G)$ accounting for the programmer's compatibilities. The algorithm starts with n teams each consisting of a single programmer. The overall runtime of the teams is the sum of programmer's basic runtimes. At every iteration of the *while* loop, *GAMT* chooses a pair g' and g'' of teams whose merge gives a maximum ΔT^{best} of runtime reduction. The positive value of ΔT^{best} means that the runtime cannot be decreased, therefore variable *go* is set to *false* and the loop operation is over. If ΔT^{best} is negative, set G of teams is reconstructed: teams g' and g'' are merged into team g and are removed from G , then g is added to G . The teams' overall runtime $T(G)$ is reduced by ΔT^{best} . Since it is a maximal reduction, the algorithm is called greedy.

Algorithm 2 called *RuntimeChange* calculates the change RC of runtime when merging two teams g_j and g_k . The compatibility of each programmer v of team g_j with each programmer u of team g_k is accounted. The compatibility of all programmers within team g_j and within team g_k has been accounted for at previous iterations of the *while* loop.

Algorithm 1: Greedy algorithm of stepwise pairwise merge of teams (*GAMT*)

Input: A set $P = (p_0 \dots p_{n-1})$ of programmers
Input: A vector t of programmer basic runtimes
Input: A matrix $dS[n \times n]$ of programmer runtime changes
Output: A set G of programming teams
Output: A runtime $T(G)$ of programming teams
 $G \leftarrow \emptyset$ $T(G) \leftarrow 0$ *go* $\leftarrow$ *true*
for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
 $g_i \leftarrow \{p_i\}$ $T(g_i) \leftarrow t_i$
 $\Delta T(g_i) \leftarrow 0$
 $G \leftarrow G \cup \{g_i\}$
 $T(G) \leftarrow T(G) + t_i$
while (*go*) **do**
 go $\leftarrow$ *false*
 $\Delta T^{\text{best}} \leftarrow 0$
 for $j \leftarrow 0$ **to** $|G| - 1$ **do**
 for $k \leftarrow j + 1$ **to** $|G| - 1$ **do**
 $\Delta t_{j,k} \leftarrow \text{RuntimeChange}(P, dS, g_j, g_k)$
 if $\Delta T^{\text{best}} > \Delta t_{j,k}$ **then**
 $\Delta T^{\text{best}} \leftarrow \Delta t_{j,k}$ $g' \leftarrow j$ $g'' \leftarrow k$
 if $\Delta T^{\text{best}} < 0$ **then**
 go $\leftarrow$ *true*
 $g \leftarrow g' \cup g''$
 $G \leftarrow (G \setminus \{g', g''\}) \cup \{g\}$
 $T(G) \leftarrow T(G) + \Delta T^{\text{best}}$
return $G, T(G)$

Algorithm 2: Calculation of runtime change after merging two teams (*RuntimeChange*)

Input: A set $P = (p_0 \dots p_{n-1})$ of programmers
Input: A matrix $dS[n \times n]$ of programmer runtime changes
Input: Two teams g_j and g_k of programmers which are candidates for merging
Output: A change RC of runtime of two teams merged
 $RC \leftarrow 0$
for $v \in g_j$ **do**
 for $u \in g_k$ **do**
 if $v < u$ **then**
 $RC \leftarrow RC + dS_{v,u}$
 else
 $RC \leftarrow RC + dS_{u,v}$
return RC

The *GAMT* algorithm applied to the example set of programmers has yielded 3 teams consisting of 5, 1 and 2 programmers: $G = \{\{0, 1, 2, 4, 5\}, \{3\}, \{6, 7\}\}$. Fig. 4 and Table 2 show that in first team, 9 pairs of programmers reduce the runtime by -83.1 days, and only one pair increases it by 1.1 days. Eight pairs of programmers from different teams have negative time changes of overall sum -36.6 days, which did not reduce the runtime. Nine pairs with positive time changes not included in the same team did not increase the runtime by 87.0 days.

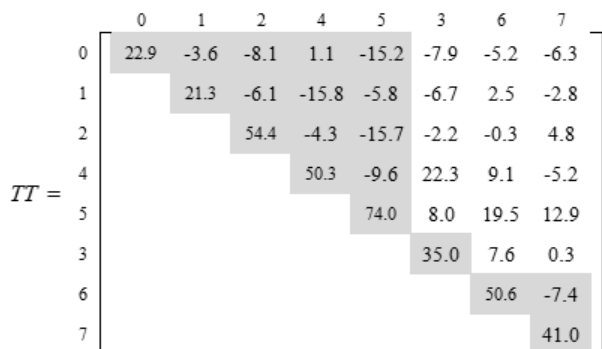


Fig. 4. Matrix TT of teams and their runtimes given by algorithm *GAMT* (rows and columns are reordered)

Table 2

Programming teams optimized by greedy algorithm *GAMT*

Team	1	2	3	All
Programmers	0, 1, 2, 4, 5	3	6, 7	0 – 7
Run-time, day	306	35	99	440
Reduction, day	-83.1	0	-7.4	-90.5
New runtime, day	222.9	35	91.6	349.5
Reduction, %	-27.2	0	-7.47	-20.6

Table 3 shows that the changes in runtimes of programmers of the *greedy* teams are $\Delta t^{greedy} = (-7.1, 3.3, -17.6, 0, -38.7, -23.0, -7.4, 0)$. The runtime of only one programmer has increased. The resulting runtimes of the programmers are $t^{greedy} = (22.9, 21.3, 54.4, 35, 50.3, 74, 50.6, 41)$.

Table 3

Comparison in runtime (days) of three allocations of programmers to teams

Progr. no.	Runtime	Team <i>single</i>		Teams <i>greedy</i>	
		Time	Change	Time	Change
0	30	18.8	-11.2	22.9	-7.1
1	18	13.8	-4.2	21.3	3.3
2	72	49.1	-22.9	54.4	-17.6
3	35	40.8	5.8	35.0	0.0
4	89	66.9	-22.1	50.3	-38.7
5	97	105.6	8.6	74.0	-23.0
6	58	61.1	3.1	50.6	-7.4
7	41	43.8	2.8	41.0	0.0
All	440	399.9	-40.1	349.5	-90.5

The *greedy* teams give the overall runtime reduction of -20.6% which is better against -9.11% of the *single* team. It should be noted that algorithm *GAMT* can be parallelized to handle large sets of programmers by using methods from [14].

Results. We have developed a software for the optimization of programming teams in the C++ language using Visual Studio 2022 under OS Windows 10. The experiments were done on Intel Core i7-10700 CPU processor on various sets P of programmers, vectors t of runtimes and matrices dP of runtime changes.

Fig. 5 compares on 10 runs of the software the overall runtimes of teams composed of 30 programmers that were generated by the *greedy GAMT* algorithm over the one-programmer teams and the team *single*. Since vector t and matrix dP were different on all 10 runs, the graphic represented in Fig. 5 using triangles and dash lines shows different properties of teams *single* which can increase the runtime up to 8.9% and decrease it down to -13.9% compared to the one-programmer teams. *GAMT* has generated and optimized 3 to 7 teams whose runtimes are up to -27.9% and up to -25.3% lower than the runtimes of corresponding one-programmer teams and team *single*.

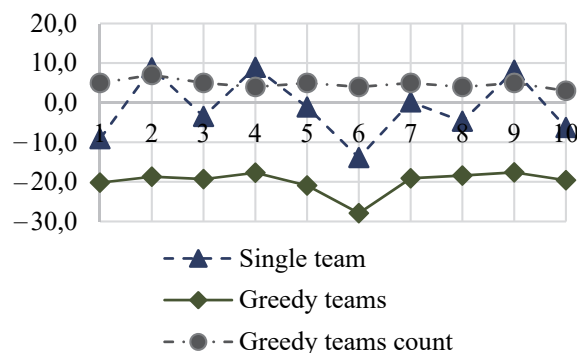


Fig. 5. Changes in runtime (%) of team *single* (triangles) and *greedy* teams (diamonds) over one-programmer teams, and *greedy* teams count (circles) on 30 programmers vs. 10 runs

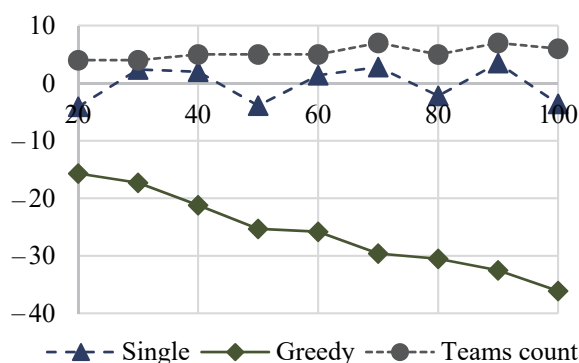


Fig. 6. Changes in runtime (%) of *single* team (triangles) and *greedy* teams (diamonds) against one-programmer teams, and *greedy* teams count (circles) vs. programmer count

Fig. 6 compares the overall runtimes of one-programmer teams, *single* teams, and *greedy* teams obtained by *GAMT* that are composed of 20 to 100 programmers. The vector t and matrix dP (average value of element is 5%) were unique for each set of programmers, therefore, the *single* team runtime differed from -4.1% to 3.5% compared to the one-programmer teams. The key pattern of *GAMT* is that the *greedy* teams' runtime is decreased over the growth of the set of programmers. While the number of programmers has been increased from 20 to 100, the *greedy* teams' runtime has been decreased from -15.7% down to -36.1% . The number of *greedy* teams has grown from 4 to 7.

Conclusion. The compatibility of programmers and their ability to efficiently work on a common IT project is one of the main sources of increasing the performances of programming teams and decreasing

the teams' runtime. The paper has proposed to describe the compatibility with a matrix whose elements determine how one programmer can decrease or increase the runtime of another programmer when both are included in the same team. The matrix allows to find the number of teams, the size of each team and to establish the teams staff in such a way as to reach a maximum reduction of the overall runtime. The greedy algorithm of stepwise merge of teams that is developed in the paper and is implemented in the C++ language is heuristic and finds sub-optimal solutions. The conducted experiments have shown the runtime reduction is increased with the growth of size of the programmer set and is up to 36% for a set of one hundred programmers. They have also shown that the reduction depends on the properties of the compatibility matrix.

References

1. Masood Z., Hoda R., Blincoe K. Exploring Workflow Mechanisms and Task Allocation Strategies in Agile Software Teams. In: Baumeister H., Lichter H., Riebisch M. (eds). *Agile Processes in Software Engineering and Extreme Programming. XP 2017. Lecture Notes in Business Information Processing*, 2017, vol. 283. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57633-6_19.
2. Britto R., Neto P. S., Rabelo R., Ayala W. and Soares T. A hybrid approach to solve the agile team allocation problem. *2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2012, pp. 1–8, DOI: 10.1109/CEC.2012.6252999.
3. Rachlin J. [et al.]. A-Teams: An Agent Architecture for Optimization and Decision-Support. In: Müller J. P., Rao A. S., Singh M. P. (eds). *Intelligent Agents V: Agents Theories, Architectures, and Languages. ATAL*, 1998. *Lecture Notes in Computer Science*, 1999, vol. 1555. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-49057-4_17.
4. Wrike. Available at: <https://www.wrike.com/> (accessed: 29.03.2023).
5. Flow. Available at: <https://www.getflow.com/> (accessed: 29.03.2023).
6. Gutierrez J. H., Astudillo C. A., Ballesteros-Perez P., Mora-Melia D. and Candia-Vejar A. The multiple team formation problem using sociometry. *Computers and Operations Research*, 2016, vol. 75, pp. 150–162. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2016.05.012>.
7. Prihozhy A. A., Zhdanouski A. M. Method of qualification estimation and optimization of professional teams of programmers. *Sistemnyy analiz i prikladnaya informatika* [System analysis and applied information science], 2018, no. 2, pp. 4–11. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2018-2-4-11> (In Russian).
8. Prihozhy A. A. Exact and greedy algorithms of allocating experts to maximum set of programmer teams. *System analysis and applied information science*, 2022, no. 1, pp. 40–46. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2022-1-40-46>.
9. Prihozhy A., Zhdanouski A. Genetic algorithm of optimizing the size, staff and number of professional teams of programmers. *Open Semantic Technologies for Intelligent Systems*, Minsk, BSUIR Publ., 2019, pp. 305–310.
10. Prihozhy A. A., Zhdanouski A. M. Genetic algorithm of optimizing the qualification of programmer teams. *System analysis and applied information science*, 2020, no. 4, pp. 31–38. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2020-4-31-38>.
11. Prihozhy A. A., Zhdanouski A. M. Genetic algorithm of allocating programmers to groups. *Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy 13-y Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Science to education, industry and economics: Proceedings of 13th international scientific and practical conference]. Minsk, 2015, vol. 1, pp. 286–287 (In Russian).
12. Grotschel M., Wakabayashi Y. A cutting plane algorithm for a clustering problem. *Mathematical Programming*, 1989, vol. 45, no. 1, pp. 59–96. <https://doi.org/10.1007/BF01589097>.
13. Prihozhy A. A. Optimization of data allocation in hierarchical memory for blocked shortest paths algorithms. *System analysis and applied information science*, 2021, no. 3, pp. 40–50.
14. Prihozhy A. A. Analysis, transformation and optimization for high performance parallel computing. Minsk, BNTU Publ., 2019. 229 p.

Список литературы

1. Masood Z., Hoda R., Blincoe K. Exploring Workflow Mechanisms and Task Allocation Strategies in Agile Software Teams // *Agile Processes in Software Engineering and Extreme Programming* H. Baumeister,

- H. Lichter, M. Riebisch (eds). XP 2017 [et. al.] // Lecture Notes in Business Information Processing. 2017. Vol. 283. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57633-6_19.
2. A hybrid approach to solve the agile team allocation problem / R. Britto [et. al.] // 2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation. 2012. P. 1–8. <https://doi.org/10.1109/CEC.2012.6252999>.
3. A-Teams: An Agent Architecture for Optimization and Decision-Support / J. Rachlin [et al.] // Intelligent Agents V: Agents Theories, Architectures, and Languages, ATAL 1998 / J. P. Müller, A. S. Rao, M. P. Singh (eds) // Lecture Notes in Computer Science. 1999. Vol. 1555. Springer. 1999. https://doi.org/10.1007/3-540-49057-4_17.
4. Wrike. URL: <https://www.wrike.com/> (дата обращения: 29.03.2023).
5. Flow. URL: <https://www.getflow.com/> (дата обращения: 29.03.2023).
6. The multiple team formation problem using sociometry / Gutierrez J. H. [et al.] // Computers and Operations Research. 2016. Vol. 75. P. 150–162. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2016.05.012>.
7. Прихожий А. А., Ждановский А. М. Метод оценки квалификации и оптимизация состава профессиональных групп программистов // Системный анализ и прикладная информатика. 2018. №. 2. С. 4–11. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2018-2-4-11>.
8. Prihozhy A. A. Exact and greedy algorithms of allocating experts to maximum set of programmer teams // System analysis and applied information science. 2022, no. 1, pp. 40–46. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2022-1-40-46>.
9. Prihozhy A., Zhdanouski A. Genetic algorithm of optimizing the size, staff and number of professional teams of programmers // Open Semantic Technologies for Intelligent Systems, Minsk, BSUIR, 2019, pp. 305–310.
10. Prihozhy A. A., Zhdanouski A. M. Genetic algorithm of optimizing the qualification of programmer teams // System analysis and applied information science. 2020, no. 4, pp. 31–38. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2020-4-31-38>.
11. Прихожий А. А., Ждановский А. М. Генетический алгоритм разбиения коллектива программистов на группы // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 13-й Междунар. науч.-практ. конф. Минск: БНТУ, 2015. Т. 1. С. 286–287.
12. Grotschel M., Wakabayashi Y. A cutting plane algorithm for a clustering problem // *Mathematical Programming*. 1989. Vol. 45, no. 1. P. 59–96. <https://doi.org/10.1007/BF01589097>.
13. Prihozhy A. A. Optimization of data allocation in hierarchical memory for blocked shortest paths algorithms // *System analysis and applied information science*. 2021, no. 3, pp. 40–50.
14. Prihozhy A. A. Analysis, transformation and optimization for high performance parallel computing. Minsk: BNTU, 2019. 229 p.

Information about the author

Prihozhy Anatoly Alekseevich – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Computer and System Software. Belarusian National Technical University (65, Nezalezhnasti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: prihozhy@yahoo.com

Информация об авторе

Прихожий Анатолий Алексеевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения информационных систем и технологий. Белорусский национальный технический университет (220013, г. Минск, пр. Независимости, 65, Республика Беларусь). E-mail: prihozhy@yahoo.com

Received 15.04.2023

УДК 519.86

Н. Н. Буснюк

Белорусский государственный технологический университет

**ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ТРУДОВЫЕ РЕСУРСЫ**

Проведена классификация модифицированных задач сетевого планирования в зависимости от числа работ, а также количества и производительности работников. Доказаны некоторые утверждения, характерные для типовых задач. Приведены алгоритмы назначений весов дугам и поиска критического пути.

Выделены четыре типа задач. Первые два типа – сети с постоянными весами дуг. Другие два типа – сети с переменными дискретными весами. Для последних исследуются способы выбора работников для работ проекта (сети) по заданной матрице весов.

Задача первого типа – это классическая задача сетевого планирования.

Для задач второго типа приведен критерий минимального требуемого количества работников для произвольной сети, чтобы время выполнения соответствующего проекта равнялось длине критического пути.

Проанализирована связь задач третьего типа с задачей о назначениях.

Для задач четвертого типа приведены алгоритм назначения работников на работы (т. е. присвоения весов дугам из матрицы возможных значений) и теорема о минимальном количестве работников (в случае возобновляемых ресурсов) для выполнения проекта за время длины критического пути.

Ключевые слова: сетевое планирование, сетевой граф, трудовые ресурсы, возобновляемые ресурсы, критический путь, резерв времени, алгоритм.

Для цитирования: Буснюк Н. Н. Задачи сетевого планирования с ограничениями на трудовые ресурсы // Труды БГТУ. Сер. 3. Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 111–115. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-16.

N. N. Busnyuk

Belarusian State Technological University

**PROBLEMS OF NETWORK PLANNING
WITH RESTRICTIONS ON LABOR RESOURCES**

A classification of modified network planning tasks is carried out depending on the number of jobs, as well as the number and productivity of workers. Some assertions that are typical for typical problems are proved. Algorithms for assigning weights to arcs and finding the critical path are given.

Four types of tasks are distinguished. The first two types are networks with constant arc weights. The other two types are networks with variable discrete weights. For the latter, methods for selecting workers for the work of the project (network) according to a given weight matrix are investigated.

The problem of the first type is a classical network planning problem.

For tasks of the second type, a criterion is given for the minimum required number of workers for an arbitrary network so that the execution time of the corresponding project is equal to the length of the critical path.

The connection of tasks of the third type with the assignment problem is analyzed.

For problems of the fourth type, an algorithm for assigning workers to jobs (i.e., assigning weights to arcs from a matrix of possible values) and a theorem on the minimum number of workers (in the case of renewable resources) to complete the project during the length of the critical path are given.

Keywords: network planning, network graph, labour resources, renewable resources, critical path, reserve time, algorithm.

For citation: Busnyuk N. N. Problems of network planning with restrictions on labor resources. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 111–115. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-16 (In Russian).

Введение. Задача сетевого планирования (ЗСП) заключается в поиске во взвешенном орграфе (сети) наибольшего пути (критического)

из начального узла (источника) в конечный узел (сток) [1, с. 286]. Результат зависит от структуры сети и значений весов.

Существуют полиномиальные алгоритмы нахождения точного решения данной задачи.

Экономическое содержание задачи следующее. Сетевой граф моделирует рабочий проект. Дуги графа интерпретируют работы, ориентация их задает очередность выполнения, вес – длительность выполнения, узлы – события окончания одних работ и начала других.

В классической ЗСП время окончания входящих в событие работ (поздней из них) является ранним временем начала исходящих работ [1, с. 288]. Практически это означает, что нет недостатка в трудовых ресурсах.

На практике может случиться, что начало некоторых работ отложится (работы будут простаивать) из-за того, что все работники будут задействованы на других работах. Такая ситуация возникает тогда, когда структура сети позволяет одновременно выполнять работ больше, чем в наличии работников; например, когда в узел входит меньше дуг, чем из него выходит. В результате может увеличиться время выполнения проекта.

Кроме того, работники способны выполнять одинаковые работы с разной производительностью. В сети это приводит к переменным весам дуг. Если веса дуг могут меняться непрерывно в заданных пределах, то ЗСП решается вероятностными методами с заданной точностью [1, с. 311–329]. Теоретический интерес имеет задача с переменными дискретными весами.

Практическое применение задачи. Решение такой задачи полезно, когда над большим проектом трудятся несколько команд (работников). Производительности их могут различаться, каждый работник специализируется больше в одной или нескольких видах работ. Компьютерные программы, решающие подобного рода задачи, ведут учет работ по выполнению проекта, собирают статистику, находят критические пути, но корректирование последовательностей выполнения работ, перевода сотрудников на другие проекты, задержек начала выполнения работ (простоев) выполняет менеджер проекта [2, с. 102–107].

Классическая ЗСП не допускает мультидуг в сети. Поскольку операцией гомеоморфизма можно разделить дугу на две с узлом посередине, то с целью упрощения изложения в исследуемых задачах будем допускать мультидуги (параллельные работы с совпадающими событиями начала и конца работ). Работы, которые могут выполняться независимо друг от друга (т. е. не лежащие на одном пути), будем называть независимыми.

Основная часть. Исследуем задачи с возобновляемыми трудовыми ресурсами и считаем, что каждую работу должен выполнять один работник.

Обозначим через G (или $G(V, E)$) – сетевой граф проекта; дуги соответствуют работам, n – количество работ в сети G , $n = |E|$; все работы пронумерованы, $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

Узлы сети соответствуют событиям начала и окончания работ; v_0 – источник; v_z – сток; $V = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_z)$, $|V| = z + 1$; $t(G)$ – суммарная длительность всех работ (вес) проекта G ; Θ – оптимальная длительность выполнения проекта; K – критический путь; $t(K)$ – длительность критического пути; m – количество работников; $d(v_i)$ – степень узла v_i .

Рассмотрим G . Каждый узел v – это событие начала и окончания работ. Полустепень захода узла $d^-(v_i)$ означает, сколько работ закончилось и работников освободилось в момент наступления события v_i ; $d^+(v_i)$ – полустепень исхода узла $d^+(v_i)$ – сколько работ может начать выполняться одновременно, т. е. требуется работников, чтобы работы не простаивали. Разность $\Delta d_i = d^-(v_i) - d^+(v_i)$ определяет требуемое дополнительное количество работников в данный момент v_i .

Количество работников для выполнения проекта назовем *достаточным*, если все работы проекта могут быть выполнены этими работниками без простоев работ.

Занумеруем узлы сети в соответствии с порядком наступления соответствующих событий $v_0, v_1, \dots, v_z$. (Если время наступления нескольких событий совпадает, порядок нумерации их между собой роли не играет).

Обозначим через g_k – количество попарно независимых работ в сети в момент наступления события v_k и рассчитаем эту величину.

Лемма. Количество попарно независимых работ $g_k = \sum_{i=0}^k \Delta d^i$ в момент события v_k .

Доказательство методом математической индукции. В момент v_0 имеем $g_0 = d^-(v_0) = d^-(v_0)$. Пусть в момент v_{k-1} справедливо равенство $g_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta d^i$. В момент v_k d_k^+ работы закончились, d_k^- работы могут начаться одновременно, поэтому количество параллельных работ в момент v_k меняется на величину Δd^k . Поэтому в момент события v_k $g_k = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta d^i + \Delta d^k = \sum_{i=0}^k \Delta d^i$. Лемма доказана.

Величина $g = \max_k g_k = \max_{1 \leq k \leq z} \sum_{i=0}^k \Delta d_i$ есть максимальное количество попарно независимых работ в сети G при заданных весах дуг. При других весах эта величина может принимать иные значения (поскольку порядок нумерации узлов меняется).

Сформулируем критерий количества работников для работы над проектом, чтобы работы не простаивали и не было избытка работников.

Теорема 1. Для того чтобы время выполнения проекта равнялось длине критического пути соответствующей сети, необходимо и достаточно $m = g$ работников.

Доказательство. Необходимость. Проследим ход выполнения работ проекта. Пока выполняется условие $m \geq g$, выполняется проект оптимальным образом (без простоев), т. е. $\Theta = t(K)$.

Пусть в момент наступления события v_k выполнено условие $\sum_{i=1}^k \Delta d_i > m$, тогда $g_k - m$ работ в этот момент будут простаивать и начнут выполняться позже. С учетом леммы 1 получаем $\Theta > t(K)$.

Достаточность. Поскольку в любой момент времени не возникнет необходимости выполнять одновременно более g работ, то $m = g$ работников достаточно для работы без простоев. В случае $m > g$ один или более работников будут простаивать и без их участия продолжительность выполнения проекта не увеличится, т. е. $\Theta = t(K)$. Теорема доказана.

Сформулируем задачу в общем виде. Для этого введем матрицу A длительностей (весов) выполнения работы j работником i , a_{ij} – элемент матрицы A ; веса дугам выбираются из матрицы A .

Каждому работнику присуща своя производительность для каждой из работ. Эти производительности (длительности выполнения работ) определены матрицей весов A . Целевой функцией данной задачи является критический путь сетевого графа.

В классической ЗСП предполагается, что работы не простаивают (т. е. трудовой ресурс не является критическим). Практически количество (и качество) трудового ресурса может быть ограничено.

В зависимости от количества и качества трудового ресурса выделим 4 типа *обобщенной* ЗСП (с возобновляемыми трудовыми ресурсами) [3].

1А. $m = n$, a_{ij} – константы по всем i (т. е. $a_{ij} = a_j$);

2А. $m < n$, a_{ij} – константы по всем i (т. е. $a_{ij} = a_j$);

1Б. $m = n$, a_{ij} – переменные по i .

2Б. $m < n$, a_{ij} – переменные по i .

Исследуем эти типы задач. Задача типа 1А эквивалентна классической ЗСП. Действительно, все равно, какого работника назначать на конкретную работу, и такой работник всегда найдется, т. е. нет простоев работ – время окончания предыдущих совпадает со временем начала текущей работы.

Матрица A примет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ a_1 a_2 \dots a_n \\ \dots \dots \dots \\ a_1 a_2 \dots a_n \end{bmatrix} \text{ и } t(G) = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Длительность выполнения проекта $\Theta = t(K)$.

Тип 2А. При $m < n$ очень просто привести пример, когда $\Theta > t(K)$. Например, $m = n - 1$, все работы могут выполняться одновременно (т. е. n параллельных дуг (v_0, v_z) , $z = 1$, в сети G) и веса всех дуг одинаковы и равны a_1 . Тогда $\Theta = 2a_1 = 2t(K)$.

В приведенном примере $g = n$. Поэтому при $m < g$ возможно $\Theta > t(K)$, а при $m \geq g$ всегда $\Theta = t(K)$.

Если $m = 1$, то все работы выполняются одним работником. В данном случае критический путь роли не играет. Граф G задает последовательность выполнения работ, и оптимальная длительность выполнения проекта $\Theta = t(G)$.

$1 < m < g$. Для выполнения работ критического пути достаточно одного работника, т. к. работы выполняются последовательно. Остальные работы выполняют другие работники.

В соответствии с теоремой 1 случай $m \geq g$ равносильен задаче 1А, т. е. классической ЗСП.

Алгоритм 1 (выбора работника в случае $m < g$).

Работы всегда можно занумеровать так, что работы с меньшим номером всегда будут предшествовать работам с большим номером, если они лежат на одном пути [1, с. 296]. Сеть G задает последовательность работ, т. е. частичную упорядоченность дуг. Матрица A задает веса дуг.

Введем дополнительные обозначения:

l – текущая (рассматриваемая) работа;

k – текущий работник (назначенный на работу l);

t_j – метка работы под номером j ; означает ранний срок ее начала;

p_i – метка для работника под номером i означает срок, к которому работник i освободится после выполнения порученной ему работы.

В начале работы алгоритма все метки равны нулю.

Количество шагов алгоритма равно n . На каждом шаге j назначаем работника на работу j .

Пока выполняется соотношение $m \geq g_i$, на очередную работу можно назначать любого незанятого работника, и проект выполняется оптимальным образом. Допустим, в момент события v_k $g_k > m$ и $m \geq g_i$, где $0 \leq i \leq k - 1$, и выполнено назначение на $l - 1$ работу. Сложилась ситуация, что все $p_i > t_l$.

Общий шаг l . Назначаем на работу $j = l$ работника $k = i$, определив его порядковый номер i из соотношения:

$$p_k = \min_{1 \leq i \leq m} p_i.$$

Для всех дуг j графа, начало которых совпадает с концом дуги l , корректируем метки:

$$t_j = \max \{t_j, p_k + a_l\}.$$

Корректируем метку, соответствующую рабочему k , назначенному на работу l :

$$p_k = p_k + a_l.$$

Для учета времени выполнения всего проекта введем фиктивную работу $n + 1$, исходящую из стока. Значение метки t_{n+1} , найденное на последнем шаге, будет определять время выполнения проекта. По расставленным меткам можно восстановить сам путь.

На некоторых шагах (в случае $g_k > m$) может возникать неоднозначность в выборе работы. Для оптимизации можно выбирать работы с наименьшим резервом времени и назначать на них освободившихся работников.

Тип 1Б. Результат решения ЗСП зависит от назначений работников на конкретные работы. Исследована связь оптимального решения ЗСП и оптимального решения ЗН (задачи о назначениях) [4].

Легко привести примеры сетей, когда расстановка работников в соответствии с минимальным решением задачи о назначениях приводит к критическому пути наименьшей длины, т. е. $\Theta = t(K)$. Первый пример: сеть содержит лишь один путь, т. е. в каждое промежуточное событие входит одна работа и из него выходит также одна работа.

Второй пример: сеть, в которой все дуги параллельны, т. е. сеть содержит n путей длины 1.

Теорема 2 [4]. *Расстановка рабочих на работы в соответствии с оптимальным (минимальным) решением задачи о назначениях дает сколь угодно плохое решение задачи сетевого планирования.*

В публикации [4] приведен пример, который иллюстрирует, что, во-первых, увеличение количества работников в общем случае не приводит к получению лучшего решения, и, во-вторых, уменьшение количества задействованных работников, влекущее возникновение простоев некоторых работ, тем не менее, может привести к оптимальному решению Θ .

При переменных a_{ij} различным назначениям работников будут соответствовать разные решения (критические пути). Если решать задачу методом итераций, улучшая начальный план, то не очевидно, какой начальный план (назначения работников) будет наиболее эффективным в смысле минимизации количества итераций. Скорость получения оптимума зависит от структуры сети. Если проверять каждое назначение, то в случае $m = n$ затратим $O(n! \cdot L)$ операций, где L – сложность решения ЗСП.

Тип 2Б. Согласно теореме 1, простоев работ для случая 2А можно избежать, если $m \geq g$. Можно привести пример, когда для одних и тех же сети G и величины $m < g$ в случае 2А простой

работы неизбежен, а в случае 2Б простоя можно избежать [4]. Приведенный пример показывает, что в более сложной задаче 2Б (по количеству перебора всех вариантов назначений работников) критический путь находится за одну итерацию (проход графа) [5, с. 128]. В случае 2А критический путь нужно искать каждый раз для модифицированной сети.

Алгоритм 2 (выбора работника) (обозначения те же, что и для Алгоритма 1).

В начале алгоритма все метки равны нулю:

$$p_i = 0, i = \overline{1, m}, t_j = 0, j = \overline{1, n}.$$

Общий шаг l . $l = \overline{1, n}$. Назначаем на работу $j = l$ работника $k = i$, определив его порядковый номер i из соотношения

$$e_i = \min_{1 \leq i \leq m} \{ \max \{ p_i, t_l \} + a_{il} \}. \quad (1)$$

Для всех дуг j графа, начало которых совпадает с концом дуги l , корректируем метку

$$t_j = \max \{ e_i, t_j \}.$$

Корректируем метку, соответствующую рабочему k , назначенному на работу l : $p_k = e_i$. Для нахождения Θ , подобно алгоритму 1, вводим фиктивную работу под номером $n + 1$.

Найденный алгоритмом локальный оптимум будет глобальным, если каждой дуге сетевого графа будет присвоен в качестве веса наименьший элемент соответствующего столбца матрицы A , и в формуле (1) всегда

$$t_l = \max \{ p_i, t_l \}.$$

При нумерации узлов и дуг может возникать неоднозначность. Тогда можно оптимизировать процесс, назначая работника не на первую по порядку нумерации работу, а на определенную из ожидающих выполнения. Для этого по ходу применения алгоритма 2 в сеть добавляем «фиктивные» дуги весом $p_i - t_l$, если равенство (1) не выполняется. Затем в преобразованной сети находим K и резервы времени для дуг. Оптимизация может выполняться только для параллельных работ в случае $g_k > m$ по критерию максимизации резерва времени [1, с. 300].

Поскольку сетевой граф можно разложить на подграфы, в которых возникает неопределенность (много независимых работ), и подграфы без неопределенности, то достаточно рассмотреть решение задачи лишь на подграфе. В нем может быть несколько источников со своими метками и несколько стоков. Несколько источников соответствуют нескольким незанятым работникам к данному моменту времени.

Теорема 3 (для случая 2Б). *Минимальное количество работников m , требуемое для выполнения*

проекта G за время $t(K)$, находится в пределах $[\frac{t(G)}{t(K)}] \leq m \leq g$, причем левая оценка достигается, если $\frac{t(G)}{t(K)}$ – целое число.

Доказательство. Если $g = 1$, то $t(G) = t(K)$ и $m = 1$, т. е. $\frac{t(G)}{t(K)} = m = g$.

Если $g > 1$, то $t(G) > t(K)$. Приведем примеры достижения крайних оценок, когда $m = 2$ и $m = g$.

Оценка $m = g$ достигается в сети, состоящей из g параллельных путей (дуг) одинаковой длины $t(K)$. В такой сети при $m < g$ некоторые работы будут простаивать и $\Theta > t(K)$, поэтому $m = g$.

Оценка $m > g$ не достигается, поскольку в этом случае всегда как минимум один работник будет простаивать.

$m = 2$ и $g > 2$. Построим следующий пример. Сеть G – это сеть, рассмотренная для случая $m = g$, в которой каждый путь имеет длину 1, т. е. сеть состоит из g дуг. Пусть дуга под номером 1 имеет длину $g - 1$, у остальных дуг длина равна 1. Тогда $t(G) = (g - 1) + (g - 1) \cdot 1 = 2 \cdot (g - 1)$, $t(K) = g - 1$.

Список литературы

1. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.]; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2002. 407 с.
2. Новицкий Н. И. Сетевое планирование и управление производством: учеб.-практ. пособие. М.: Новое знание, 2004. 160 с.
3. Буснюк Н. Н. Разновидности задачи сетевого планирования, некоторые методы их решения и алгоритмические оценки // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2019. № 2 (224). С. 101–104.
4. Буснюк Н. Н. Исследование взаимозависимости стоимости и длительности проекта в сетевых задачах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2020. № 1 (230). С. 88–91.
5. Буснюк Н. Н., Черняк А. А. Математическое моделирование. Минск: Беларусь, 2014. 216 с.

References

1. Kremer N. Sh., Putko B. A., Trishin I. M., Friedman M. N. *Issledovaniye operatsiy v ekonomike* [The study of operations in the economy]. Moscow, JuNITI Publ., 2002. 407 p. (In Russian).
2. Novitsky N. I. *Setevoye planirovaniye i upravleniye proizvodstvom* [Network planning and production management]. Moscow, Novoye znaniye Publ., 2004. 160 p. (In Russian).
3. Busnyuk N. N. Varieties of the network planning problem, some methods of their solution and algorithmic estimates. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2019, no. 2, pp. 101–104 (In Russian).
4. Busnyuk N. N. Research of interdependence of cost and project duration in network tasks. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2020, no. 1, pp. 88–91 (In Russian).
5. Busnyuk N. N., Chernyak A. A. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical modeling]. Minsk, Belarus' Publ., 2014. 216 p. (In Russian).

Информация об авторе

Буснюк Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

Information about the author

Busnyuk Nikolay Nikolaevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

Поступила после доработки 04.09.2023

Один работник выполнит критическую работу за время $g - 1$, второй – по очереди остальные работы за то же время $g - 1$. В данном примере $\frac{t(G)}{t(K)} = 2$ и оценка снизу тоже достигается.

Покажем невозможность оценки $m < \left\lceil \frac{t(G)}{t(K)} \right\rceil$

. Если предположить, что это неравенство верное, то $t(G) > m \cdot t(K)$, т. е. $t(G) - m \cdot t(K) > 0$. Получили, что не весь проект выполнен за критическое время, т. е. $\Theta > T(K)$. Полученное противоречие доказывает невозможность последней оценки. Теорема доказана.

Заключение. Все полученные результаты справедливы и для сетей с нецелочисленными дискретными весами.

Количество попарно независимых работ в проекте, т. е. работ, которые можно выполнять одновременно, влияет на общую численность привлекаемых к работе над проектом исполнителей. Это количество зависит как от очередности выполнения работ (структуры сети), так и от производительности труда работников (весов дуг графа).

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ.....	5
МАТЕМАТИКА.....	5
Пономорева С. В., Пыжкова О. Н., Ромашенко Г. С. Проблема выбора вида производных дробного порядка для периодических функций.....	5
Волк А. М. Анализ дисперсного состава частиц дробления	9
Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системой запаздывающего типа в случае кратных корней	18
Можей Н. П. Редуктивные несимметрические пространства, не допускающие эквивалентных связностей	23
МЕХАНИКА	27
Карлович Т. Б., Карлович А. О., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Сравнение результатов теоретического и экспериментального исследований воздушных потоков в шахте над электроподогреваемым однорядным пучком орбренных труб.....	27
ФИЗИКА.....	34
Крук Н. Н. Феноменология многоцентровых межмолекулярных взаимодействий в ядре макрогетероциклических соединений.....	34
Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В., Волосевич З. Г. Статистическое исследование амплитудных и спектральных характеристик энергии образования флуктуаций поля плотности в наноразмерных системах	40
Фарафонтова Е. В., Наркевич И. И., Язёнок В. А. Статистическое исследование зависимостей адсорбции на сферических наночастицах от их размеров и температуры	47
Мадьяров В. Р. Измерение проводимости кремния с помощью частотных характеристик пропускания миллиметровых волн	53
ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ	58
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	58
Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г., Дейнека Т. А., Клютко М. В. Уменьшение влияния помех измерительного канала на замкнутую систему регулирования.....	58
Олиферович Н. М., Гринюк Д. А., Базарбаев К. А., Оробей И. О., Сухорукова И. Г. Сравнительный анализ алгоритмов идентификации объектов с нелинейной динамикой.....	71
Смелова В. В., Шиман Д. В. Необходимое условие существования корректного решения балансового уравнения при вычислении плана валового объема продукции инновационно-промышленного кластера.....	80
ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ.....	89
Савельева М. Г., Урбанович П. П. Использование статистических характеристик растривания текстовых документов в стеганографических приложениях	89
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ	97
Кантарович В. С., Гурин Н. И. Трехмерная визуализация размещения древостоя естественного происхождения.....	97
АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ.....	104
Prihozhy A. A. Optimization of programming teams on compatibility of programmers.....	104
Буснюк Н. Н. Задачи сетевого планирования с ограничениями на трудовые ресурсы	111

CONTENTS

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES	5
MATHEMATICS	5
Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N., Romashchenko G. S. The problem of choosing the type of derivatives of fractional order for periodic functions.....	5
Volk A. M. Analysis of the dispersed composition of crushing particles.....	9
Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in the case of multiple roots	18
Mozhey N. P. Reductive non-symmetric spaces that do not admit equiaffine connections	23
MECHANICS	27
Karlovich T. B., Karlovich A. O., Sukhotskii A. B., Danilchik E. S. Comparison of the results of theoretical and experimental investigations of air flows in a shaft above an electricity heated one row bundle of finned pipes.....	27
PHYSICS	34
Kruk M. M. Phenomenology of multicenter intermolecular interactions in the core of macroheterocyclic compounds.....	34
Narkevich I. I., Farafontova E. V., Volosevich Z. G. Statistical research of amplitude and spectral characteristics of density field fluctuations formation energy in nanosimensional systems.....	40
Farafontova E. V., Narkevich I. I., Yazenok V. A. Statistical description of adsorption on spherical nanoparticles from their dimensions and temperature	47
Madyarov V. R. Measurements of silicon conductivity by means frequency figures in microwave region...	53
COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES.....	58
MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS	58
Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G., Deineka T. A., Klyutko M. V. Reducing the influence of measuring channel interference in a closed-loop control system	58
Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Bazarbaev Q. A., Orobei I. O., Suhorukova I. G. Comparative analysis of algorithms for objects with nonlinear dynamics identification	71
Smelova V. V., Shiman D. V. Necessary condition of existence of the correct balance equation solution in innovational industrial cluster's gross volume plan calculation.....	80
PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION	89
Saveleva M. G., Urbanovich P. P. Usage of statistical characteristics of text documents halftone screening in steganographic applications	89
SYSTEMS ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS.....	97
Kantarovich V. S., Gurin N. I. 3D visualization of natural stand.....	97
ALGORITHMIC AND PROGRAMMING	104
Prihozhy A. A. Optimization of programming teams on compatibility of programmers.....	104
Busnyuk N. N. Problems of network planning with restrictions on labor resources.....	111

Редактор *Р. М. Рябая*
Компьютерная верстка *Е. А. Матейко, Е. В. Ильченко, В. А. Маркушевская*
Корректор *Р. М. Рябая*

Подписано в печать 15.09.2023. Формат 60×84¹/₈.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 13,7. Уч.-изд. л. 14,7.
Тираж 56 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.