УДК 519.86

Н. Н. Буснюк
Белорусский государственный технологический университет

ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ТРУДОВЫЕ РЕСУРСЫ

Проведена классификация модифицированных задач сетевого планирования в зависимости от числа работ, а также количества и производительности работников. Доказаны некоторые утверждения, характерные для типовых задач. Приведены алгоритмы назначений весов дугам и поиска критического пути.

Выделены четыре типа задач. Первые два типа – сети с постоянными весами дуг. Другие два типа – сети с переменными дискретными весами. Для последних исследуются способы выбора работников для работ проекта (сети) по заданной матрице весов.

Задача первого типа – это классическая задача сетевого планирования.

Для задач второго типа приведен критерий минимального требуемого количества работников для произвольной сети, чтобы время выполнения соответствующего проекта равнялось длине критического пути.

Проанализирована связь задач третьего типа с задачей о назначениях.

Для задач четвертого типа приведены алгоритм назначения работников на работы (т. е. присвоения весов дугам из матрицы возможных значений) и теорема о минимальном количестве работников (в случае возобновляемых ресурсов) для выполнения проекта за время длины критического пути.

Ключевые слова: сетевое планирование, сетевой граф, трудовые ресурсы, возобновляемые ресурсы, критический путь, резерв времени, алгоритм.

Для цитирования: Буснюк Н. Н. Задачи сетевого планирования с ограничениями на трудовые ресурсы // Труды БГТУ. Сер. 3. Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 111–115. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-16.

N. N. Busnyuk
Belarusian State Technological University

PROBLEMS OF NETWORK PLANNING WITH RESTRICTIONS ON LABOR RESOURCES

A classification of modified network planning tasks is carried out depending on the number of jobs, as well as the number and productivity of workers. Some assertions that are typical for typical problems are proved. Algorithms for assigning weights to arcs and finding the critical path are given.

Four types of tasks are distinguished. The first two types are networks with constant arc weights. The other two types are networks with variable discrete weights. For the latter, methods for selecting workers for the work of the project (network) according to a given weight matrix are investigated.

The problem of the first type is a classical network planning problem.

For tasks of the second type, a criterion is given for the minimum required number of workers for an arbitrary network so that the execution time of the corresponding project is equal to the length of the critical path.

The connection of tasks of the third type with the assignment problem is analyzed.

For problems of the fourth type, an algorithm for assigning workers to jobs (i.e., assigning weights to arcs from a matrix of possible values) and a theorem on the minimum number of workers (in the case of renewable resources) to complete the project during the length of the critical path are given.

Keywords: network planning, network graph, labour resourses, renewable resourses, critical path, reserve time, algorithm.

For citation: Busnyuk N. N. Problems of network planning with restrictions on labor resourses. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 111–115. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-16 (In Russian).

Введение. Задача сетевого планирования (ЗСП) заключается в поиске во взвешенном орграфе (сети) наибольшего пути (критического) из начального узла (источника) в конечный узел (сток) [1, с. 286]. Результат зависит от структуры сети и значений весов.

Существуют полиномиальные алгоритмы нахождения точного решения данной задачи.

Экономическое содержание задачи следующее. Сетевой граф моделирует рабочий проект. Дуги графа интерпретируют работы, ориентация их задает очередность выполнения, вес – длительность выполнения, узлы – события окончания одних работ и начала других.

В классической ЗСП время окончания входящих в событие работ (поздней из них) является ранним временем начала исходящих работ [1, с. 288]. Практически это означает, что нет недостатка в трудовых ресурсах.

На практике может случиться, что начало некоторых работ отложится (работы будут простаивать) из-за того, что все работники будут задействованы на других работах. Такая ситуация возникает тогда, когда структура сети позволяет одновременно выполнять работ больше, чем в наличии работников; например, когда в узел входит меньше дуг, чем из него выходит. В результате может увеличиться время выполнения проекта.

Кроме того, работники способны выполнять одинаковые работы с разной производительностью. В сети это приводит к переменным весам дуг. Если веса дуг могут меняться непрерывно в заданных пределах, то ЗСП решается вероятностными методами с заданной точностью [1, с. 311–329]. Теоретический интерес имеет задача с переменными дискретными весами.

Практическое применение задачи. Решение такой задачи полезно, когда над большим проектом трудятся несколько команд (работников). Производительности их могут различаться, каждый работник специализируется больше в одной или нескольких видах работ. Компьютерные программы, решающие подобного рода задачи, ведут учет работ по выполнению проекта, собирают статистику, находят критические пути, но корректирование последовательностей выполнения работ, перевода сотрудников на другие проекты, задержек начала выполнения работ (простоев) выполняет менеджер проекта [2, с. 102–107].

Классическая ЗСП не допускает мультидуг в сети. Поскольку операцией гомеоморфизма можно разделить дугу на две с узлом посередине, то с целью упрощения изложения в исследуемых задачах будем допускать мультидуги (параллельные работы с совпадающими событиями начала и конца работ). Работы, которые могут выполняться независимо друг от друга (т. е. не лежащие на одном пути), будем называть независимыми.

Основная часть. Исследуем задачи с возобновляемыми трудовыми ресурсами и считаем, что каждую работу должен выполнять один работник.

Обозначим через G (или $G\,(V, E)$) — сетевой граф проекта; дуги соответствуют работам, n – количество работ в сети G, $n = |E|$; все работы пронумерованы, $E = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Узлы сети соответствуют событиям начала и окончания работ; v_0 – источник; v_z – сток; $V = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_z)$, $|V| = z + 1$; $t(G)$ – суммарная длительность всех работ (вес) проекта G; Θ – оптимальная длительность выполнения проекта; K – критический путь; $t(K)$ – длительность критического пути; m – количество работников; $d(v_i)$ – степень узла v_i.

Рассмотрим G. Каждый узел v – это событие начала и окончания работ. Полустепень захода узла $d^+(v_i)$ означает, сколько работ закончилось и работников освободилось в момент наступления события v_iv$_i$; полустепень исхода узла $d^-(v_i)$ – сколько работ может начать выполняться одновременно, т. е. требуется работников, чтобы работы не простаивали. Разность $\Delta d_i = d^-(v_i) - d^+(v_i)$ определяет требуемое дополнительное количество работников в данный момент v_i.

Количество работников для выполнения проекта назовем *достаточным*, если все работы проекта могут быть выполнены этими работниками без простоев работ.

Занумеруем узлы сети в соответствии с порядком наступления соответствующих событий $v_0, v_1, \ldots, v_z$. (Если время наступления нескольких событий совпадает, порядок нумерации их между собой роли не играет).

Обозначим через g_k – количество попарно независимых работ в сети в момент наступления события v_k и рассчитаем эту величину.

Лемма. Количество попарно независимых работ $g_k = \sum_{i=0}^{k} \Delta d^i$ в момент события v_k.

Доказательство методом математической индукции. В момент v_0 имеем $g_0 = d(v_0) = d^-(v_0)$. Пусть в момент v_{k-1} справедливо равенство $g_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta d^i$. В момент v_k d_k^+ работы закончились, d_k^- работы могут начаться одновременно, поэтому количество параллельных работ в момент v_k меняется на величину Δd^k. Поэтому в момент события v_k $g_k = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta d^i + \Delta d^k = \sum_{i=0}^{k} \Delta d^i$. *Лемма доказана.*

Величина $g = \max\limits_{k} g_k = \max\limits_{1 \le k \le z} \sum_{i=0}^{k} \Delta d_i$ есть максимальное количество попарно независимых работ в сети G при заданных весах дуг. При других весах эта величина может принимать иные значения (поскольку порядок нумерации узлов меняется).

Сформулируем критерий количества работников для работы над проектом, чтобы работы не простаивали и не было избытка работников.

Теорема 1. *Для того чтобы время выполнения проекта равнялось длине критического пути соответствующей сети, необходимо и достаточно $m = g$ работников.*

Доказательство. Необходимость. Проследим ход выполнения работ проекта. Пока выполняется условие $m \geq g$, выполняется проект оптимальным образом (без простоев), т. е. $\Theta = t(K)$.

Пусть в момент наступления события v_k выполнено условие $\sum_{i=1}^{k} \Delta d_i > m$, тогда $g_k - m$ работ в этот момент будут простаивать и начнут выполняться позже. С учетом леммы 1 получаем $\Theta > t(K)$.

Достаточность. Поскольку в любой момент времени не возникнет необходимости выполнять одновременно более g работ, то $m = g$ работников достаточно для работы без простоев. В случае $m > g$ один или более работников будут простаивать и без их участия продолжительность выполнения проекта не увеличится, т. е. $\Theta = t(K)$. Теорема доказана.

Сформулируем задачу в общем виде. Для этого введем матрицу A длительностей (весов) выполнения работы j работником i, a_{ij} – элемент матрицы A; веса дугам выбираются из матрицы A.

Каждому работнику присуща своя производительность для каждой из работ. Эти производительности (длительности выполнения работ) определены матрицей весов A. Целевой функцией данной задачи является критический путь сетевого графа.

В классической ЗСП предполагается, что работы не простаивают (т. е. трудовой ресурс не является критическим). Практически количество (и качество) трудового ресурса может быть ограничено.

В зависимости от количества и качества трудового ресурса выделим 4 типа *обобщенной* ЗСП (с возобновляемыми трудовыми ресурсами) [3].

1А. $m = n$, a_{ij} – константы по всем i (т. е. $a_{ij} = a_j$);

2А. $m < n$, a_{ij} – константы по всем i (т. е. $a_{ij} = a_j$);

1Б. $m = n$, a_{ij} – переменные по i.

2Б. $m < n$, a_{ij} – переменные по i.

Исследуем эти типы задач. Задача *типа* 1А эквивалентна классической ЗСП. Действительно, все равно, какого работника назначать на конкретную работу, и такой работник всегда найдется, т. е. нет простоев работ – время окончания предыдущих совпадает со временем начала текущей работы.

Матрица A примет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ a_1 a_2 \ldots a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 a_2 \ldots a_n \end{bmatrix} \text{ и } t(G) = \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Длительность выполнения проекта $\Theta = t(K)$.

Тип 2А. При $m < n$ очень просто привести пример, когда $\Theta > t(K)$. Например, $m = n - 1$, все работы могут выполняться одновременно (т. е n параллельных дуг (v_0, v_z), $z = 1$, в сети G) и веса всех дуг одинаковы и равны a_1. Тогда $\Theta = 2a_1 = 2t(K)$.

В приведенном примере $g = n$. Поэтому при $m < g$ возможно $\Theta > t(K)$, а при $m \geq g$ всегда $\Theta = t(K)$.

Если $m = 1$, то все работы выполняются одним работником. В данном случае критический путь роли не играет. Граф G задает последовательность выполнения работ, и оптимальная длительность выполнения проекта $\Theta = t(G)$.

$1 < m < g$. Для выполнения работ критического пути достаточно одного работника, т. к. работы выполняются последовательно. Остальные работы выполняют другие работники.

В соответствии с теоремой 1 случай $m \geq g$ равносилен задаче 1А, т. е. классической ЗСП.

Алгоритм 1 (выбора работника в случае $m < g$).

Работы всегда можно занумеровать так, что работы с меньшим номером всегда будут предшествовать работам с большим номером, если они лежат на одном пути [1, с. 296]. Сеть G задает последовательность работ, т. е. частичную упорядоченность дуг. Матрица A задает веса дуг.

Введем дополнительные обозначения:

l – текущая (рассматриваемая) работа;

k – текущий работник (назначенный на работу l);

t_j – метка работы под номером j; означает ранний срок ее начала;

p_i – метка для работника под номером i означает срок, к которому работник i освободится после выполнения порученной ему работы.

В начале работы алгоритма все метки равны нулю.

Количество шагов алгоритма равно n. На каждом шаге j назначаем работника на работу j.

Пока выполняется соотношение $m \geq g_i$, на очередную работу можно назначать любого незанятого работника, и проект выполняется оптимальным образом. Допустим, в момент события v_k $g_k > m$ и $m \geq g_i$, где $0 \leq i \leq k - 1$, и выполнено назначение на $l - 1$ работу. Сложилась ситуация, что все $p_i > t_l$.

Общий шаг l. Назначаем на работу $j = l$ работника $k = i$, определив его порядковый номер i из соотношения:

$$p_k = \min_{1 \leq i \leq m} p_i \, .$$

Для всех дуг j графа, начало которых совпадает с концом дуги l, корректируем метки:

$$t_j = \max\{t_j, p_k + a_l\} \, .$$

Корректируем метку, соответствующую рабочему k, назначенному на работу l:

$$p_k = p_k + a_l .$$

Для учета времени выполнения всего проекта введем фиктивную работу $n + 1$, исходящую из стока. Значение метки t_{n+1}, найденное на последнем шаге, будет определять время выполнения проекта. По расставленным меткам можно восстановить сам путь.

На некоторых шагах (в случае $g_k > m$) может возникать неоднозначность в выборе работы. Для оптимизации можно выбирать работы с наименьшим резервом времени и назначать на них освободившихся работников.

Тип 1Б. Результат решения ЗСП зависит от назначений работников на конкретные работы. Исследована связь оптимального решения ЗСП и оптимального решения ЗН (задачи о назначениях) [4].

Легко привести примеры сетей, когда расстановка работников в соответствии с минимальным решением задачи о назначениях приводит к критическому пути наименьшей длины, т. е. $\Theta = t(K)$. Первый пример: сеть содержит лишь один путь, т. е. в каждое промежуточное событие входит одна работа и из него выходит также одна работа.

Второй пример: сеть, в которой все дуги параллельны, т. е. сеть содержит n путей длины 1.

Теорема 2 [4]. *Расстановка рабочих на работы в соответствии с оптимальным (минимальным) решением задачи о назначениях дает сколь угодно плохое решение задачи сетевого планирования.*

В публикации [4] приведен пример, который иллюстрирует, что, во-первых, увеличение количества работников в общем случае не приводит к получению лучшего решения, и, во-вторых, уменьшение количества задействованных работников, влекущее возникновение простоев некоторых работ, тем не менее, может привести к оптимальному решению Θ.

При переменных a_{ij} различным назначениям работников будут соответствовать разные решения (критические пути). Если решать задачу методом итераций, улучшая начальный план, то не очевидно, какой начальный план (назначения работников) будет наиболее эффективным в смысле минимизации количества итераций. Скорость получения оптимума зависит от структуры сети. Если проверять каждое назначение, то в случае $m = n$ затратим $O(n! \cdot L)$ операций, где L – сложность решения ЗСП.

Тип 2Б. Согласно теореме 1, простоев работ для случая 2А можно избежать, если $m \geq g$. Можно привести пример, когда для одних и тех же сети G и величины $m < g$ в случае 2А простой работы неизбежен, а в случае 2Б простоя можно избежать [4]. Приведенный пример показывает, что в более сложной задаче 2Б (по количеству перебора всех вариантов назначений работников) критический путь находится за одну итерацию (проход графа) [5, с. 128]. В случае 2А критический путь нужно искать каждый раз для модифицированной сети.

Алгоритм 2 (выбора работника) (обозначения те же, что и для Алгоритма 1).

В начале алгоритма все метки равны нулю:

$$p_i = 0, i = \overline{1,m}, t_j = 0, j = \overline{1,n}.$$

Общий шаг l. $l = \overline{1,n}.$ Назначаем на работу $j = l$ работника $k = i$, определив его порядковый номер i из соотношения

$$e_l = \min_{1 \le i \le m} \{\max\{p_i, t_l\} + a_{il}\}. \tag{1}$$

Для всех дуг j графа, начало которых совпадает с концом дуги l, корректируем метку

$$t_j = \max\{e_l, t_j\}.$$

Корректируем метку, соответствующую рабочему k, назначенному на работу l: $p_k = e_l$. Для нахождения Θ, подобно алгоритму 1, вводим фиктивную работу под номером $n + 1$.

Найденный алгоритмом локальный оптимум будет глобальным, если каждой дуге сетевого графа будет присвоен в качестве веса наименьший элемент соответствующего столбца матрицы A, и в формуле (1) всегда

$$t_l = \max\{p_i, t_l\}.$$

При нумерации узлов и дуг может возникать неоднозначность. Тогда можно оптимизировать процесс, назначая работника не на первую по порядку нумерации работу, а на определенную из ожидающих выполнения. Для этого по ходу применения алгоритма 2 в сеть добавляем «фиктивные» дуги весом $p_i - t_l$, если равенство (1) не выполняется. Затем в преобразованной сети находим K и резервы времени для дуг. Оптимизация может выполняться только для параллельных работ в случае $g_k > m$ по критерию максимизации резерва времени [1, с. 300].

Поскольку сетевой граф можно разложить на подграфы, в которых возникает неопределенность (много независимых работ), и подграфы без неопределенности, то достаточно рассмотреть решение задачи лишь на подграфе. В нем может быть несколько источников со своими метками и несколько стоков. Несколько источников соответствуют нескольким незанятым работникам к данному моменту времени.

Теорема 3 (для случая 2Б). *Минимальное количество работников m, требуемое для выполнения* *проекта G за время* $t(K)$, *находится в пределах* $[\frac{t(G)}{t(K)}] \le m \le g$ *, причем левая оценка достигается, если* $\frac{t(G)}{t(K)}$ *– целое число.*

Доказательство. Если $g = 1$, то $t(G) = t(K)$ и $m = 1$, т. е. $\frac{t(G)}{t(K)} = m = g$.

Если $g > 1$, то $t(G) > t(K)$. Приведем примеры достижения крайних оценок, когда $m = 2$ и $m = g$.

Оценка $m = g$ достигается в сети, состоящей из g параллельных путей (дуг) одинаковой длины $t(K)$. В такой сети при $m < g$ некоторые работы будут простаивать и $\Theta > t(K)$, поэтому $m = g$.

Оценка $m > g$ не достигается, поскольку в этом случае всегда как минимум один работник будет простаивать.

$m = 2$ и $g > 2$. Построим следующий пример. Сеть G – это сеть, рассмотренная для случая $m = g$, в которой каждый путь имеет длину 1, т. е. сеть состоит из g дуг. Пусть дуга под номером 1 имеет длину $g – 1$, у остальных дуг длина равна 1. Тогда $t(G) = (g – 1) + (g – 1) \cdot 1 = 2 \cdot (g – 1)$, $t(K) = g – 1$. Один работник выполнит критическую работу за время $g – 1$, второй – по очереди остальные работы за то же время $g – 1$. В данном примере $\frac{t(G)}{t(K)} = 2$ и оценка снизу тоже достигается.

Покажем невозможность оценки $m < \left[\frac{t(G)}{t(K)}\right]$. Если предположить, что это неравенство верное, то $t(G) > m \cdot t(K)$, т. е. $t(G) – m \cdot t(K) > 0$. Получили, что не весь проект выполнен за критическое время, т. е. $\Theta > T(K)$. Полученное противоречие доказывает невозможность последней оценки. Теорема доказана.

Заключение. Все полученные результаты справедливы и для сетей с нецелочисленными дискретными весами.

Количество попарно независимых работ в проекте, т. е. работ, которые можно выполнять одновременно, влияет на общую численность привлекаемых к работе над проектом исполнителей. Это количество зависит как от очередности выполнения работ (структуры сети), так и от производительности труда работников (весов дуг графа).

Список литературы

1. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.]; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2002. 407 с.
2. Новицкий Н. И. Сетевое планирование и управление производством: учеб.-практ. пособие. М.: Новое знание, 2004. 160 с.
3. Буснюк Н. Н. Разновидности задачи сетевого планирования, некоторые методы их решения и алгоритмические оценки // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2019. № 2 (224). С. 101–104.
4. Буснюк Н. Н. Исследование взаимозависимости стоимости и длительности проекта в сетевых задачах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2020. № 1 (230). С. 88–91.
5. Буснюк Н. Н., Черняк А. А. Математическое моделирование. Минск: Беларусь, 2014. 216 с.

References

1. Kremer N. Sh., Putko B. A., Trishin I. M., Friedman M.N. *Issledovaniye operatsiy v ekonomike* [The study of operations in the economy]. Moscow, JuNITI Publ., 2002. 407 p. (In Russian).
2. Novitsky N. I. *Setevoye planirovaniye i upravleniye proizvodstvom* [Network planning and production management]. Moscow, Novoye znaniye Publ., 2004. 160 p. (In Russian).
3. Busnyuk N. N. Varieties of the network planning problem, some methods of their solution and algorithmic estimates. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physies and Mathematics. Informatics, 2019, no. 2, pp. 101−104 (In Russian).
4. Busnyuk N. N. Research of interdependence of cost and project duration in network tasks. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physies and Mathematics. Informatics, 2020, no. 1, pp. 88−91 (In Russian).
5. Busnyuk N. N., Chernyak A. A. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical modeling]. Minsk, Belarus' Publ., 2014. 216 p. (In Russian).

Информация об авторе

Буснюк Николай Николаевич − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

Information about the author

Busnyuk Nikolay Nikolaevich − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

Поступила после доработки 04.09.2023