УДК 004.021

В. В. Смелова, Д. В. Шиман
Белорусский государственный технологический университет

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОРРЕКТНОГО РЕШЕНИЯ БАЛАНСОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПЛАНА ВАЛОВОГО ОБЪЕМА ПРОДУКЦИИ ИННОВАЦИОННО-ПРОМЫШЛЕННОГО КЛАСТЕРА

Инновационно-промышленный кластер – объединение субъектов хозяйствования с целью эффективного взаимодействия и совместного устойчивого развития. Для планирования валового объема продукции кластера предлагается использовать метод, основанный на балансовой модели Леонтьева. Применение метода сводится к решению системы линейных уравнений большой размерности. В статье исследуются проблемы, возникающие при решении такой системы уравнений, вводятся понятия корректного балансового уравнения и корректного плана, формулируется и формально доказывается необходимое условие его существования, а также дается экономическая интерпретация этого условия.

Ключевые слова: инновационно-промышленный кластер, балансовая модель Леонтьева, система линейных уравнений, ориентированный граф, циклы в графе.

Для цитирования: Смелова В. В., Шиман Д. В. Необходимое условие существования корректного решения балансового уравнения при вычислении плана валового объема продукции инновационно-промышленного кластера // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 80–88. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-12.

V. V. Smelova, D. V. Shiman
Belarusian State Technological University

NECESSARY CONDITION OF EXISTENCE OF THE CORRECT BALANCE EQUATION SOLUTION IN INNOVATIONAL INDUSTRIAL CLUSTER'S GROSS VOLUME PLAN CALCULATION

An innovation-industrial cluster is an association of business entities for the purpose of effective interaction and joint sustainable development. To plan the gross output of the cluster, it is proposed to use a method based on the Leontief balance model. Application of the method is reduced to solving a system of linear equations of high dimension. The article studies the problems that arise when solving such a system of equations, introduces the concepts of a correct balance equation and a correct plan, formulates and formally proves the necessary condition for its existence, and also gives an economic interpretation of this condition.

Keywords: innovational industrial cluster, Leontief balance model, system of linear equations, directed graph, cycles in a graph.

For citation: Smelova V. V., Shiman D. V. Necessary condition of existence of the correct balance equation solution in innovational industrial cluster's gross volume plan calculation. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 80–88. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-12 (In Russian).

Введение. В публикации [1] сформулировано понятие инновационно-промышленного кластера (ПК) как целенаправленной системы горизонтально взаимодействующих субъектов хозяйствования (участников ПК), описаны структура, жизненный цикл, свойства и компоненты этой системы, а также предложена концепция цифровой платформы ПК, предназначенной для поддержки деятельности кластера на протяжении всего его жизненного цикла. В работах [2, 3] сформулирована задача планирования валового объема продукции, производимой участниками ПК в результате их совместной деятельности, а также предложен метод ее решения на основе балансовой модели В. В. Леонтьева. Метод позволяет оценить валовой объем продукции, который должен быть произведен каждым участником кластера и может быть применен на первом этапе планирования. В основе этого метода – решение системы линейных уравнений:

$$(E - A)X = Y, \tag{1}$$

где $E = (e_{i,i})$ – единичная матрица; $A = (a_{i,i})$ – матрица технологических коэффициентов; $Y = (y_i)$ – планируемый выпуск конечной продукции. При известных A и Y решением уравнения является вектор-столбец

$$X = (E - A)^{-1} Y, \tag{2}$$

элементы которого – искомые валовые объемы продукции, планируемые к производству участниками ПК.

Предполагаемая большая размерность системы уравнений (1) не позволяет получить решение прямыми методами (например, с использованием обратной матрицы (2), Гаусса, Крамера) и требует применения приближенных итеративных методов (например, простых итераций, Якоби, Зейделя, релаксации), позволяющих за конечное количество шагов получить приближенное (при его существовании) решение [4, 5]. При этом проверить заранее, имеет ли данное уравнение решение, практически невозможно. Проверка сингулярности матрицы $E - A$, как это делается при решении уравнения (1) прямыми методами, связана не только с трудоемкостью вычислений, но и с тем, что в процессе вычисления определителя может быть превышен допустимый процессором компьютера верхний или нижний предел разрядности чисел.

На рис. 1 приведен график зависимости порядка величины определителя матрицы $E - A$ от ее размерности, полученный в результате обработки вычислительного эксперимента.

График построен по 8 точкам, соответствующим размерностям матрицы $E - A$. Значение в каждой точке графика – это максимальный порядок результата 10 вычислений определителя матрицы $E - A$. Элементы матрицы A сгенерированы случайным образом, все элементы, кроме диагональных, являются целыми положительными величинами в пределах от 1 до 10, при этом количество нулевых элементов составляет примерно 80%. Диагональные элементы матрицы – положительные числа из интервала (0,1). Все сгенерированные уравнения имеют решение – вектор, элементы которого целые положительные числа из интервала (100, 1000).

Порядок чисел с плавающей точкой двойной точности в соответствии со стандартом IEEE 754 [6] не может превышать 308. При этом предел размерности матрицы, для которой может быть вычислен определитель на компьютере, поддерживающем вычисления с двойной точностью, в данном эксперименте не превышает 275.

На рис. 2 приведены результаты обработки вычислительного эксперимента, позволяющего оценить продолжительность решения систем линейных уравнений. Эксперимент выполнялся на компьютере с 4-ядерным процессором Intel Core i7-4790, 3.60GHz и объемом оперативной памяти 16 GB. Вычисления осуществлялись с помощью библиотеки математических функций Math.NET Numerics [7]. На рис. 2 изображены три практически слившиеся линии, отражающие зависимость продолжительности решения систем линейных уравнений от их размерности с различной степенью разреженности матрицы коэффициентов: 50, 70 и 80% нулевых коэффициентов. Графики позволяют предполагать, что в данном эксперименте влияние степени разреженности матрицы коэффициентов не оказывает сколько-нибудь значительного влияния. Каждый график построен по 20 точкам, соответствующим системам линейных уравнений с размерностями от 100 до 2000. Значение в каждой точке графика вычислены в результате усреднения 10 просчетов. Общее количество решенных систем линейных уравнений – 600, при этом погрешность решения не превышает 10^{-6}. Результаты эксперимента позволяют утверждать, что вычисление плана валового производства продукции с номенклатурой до 2000 единиц не превышает 16 с на компьютере средней мощности.

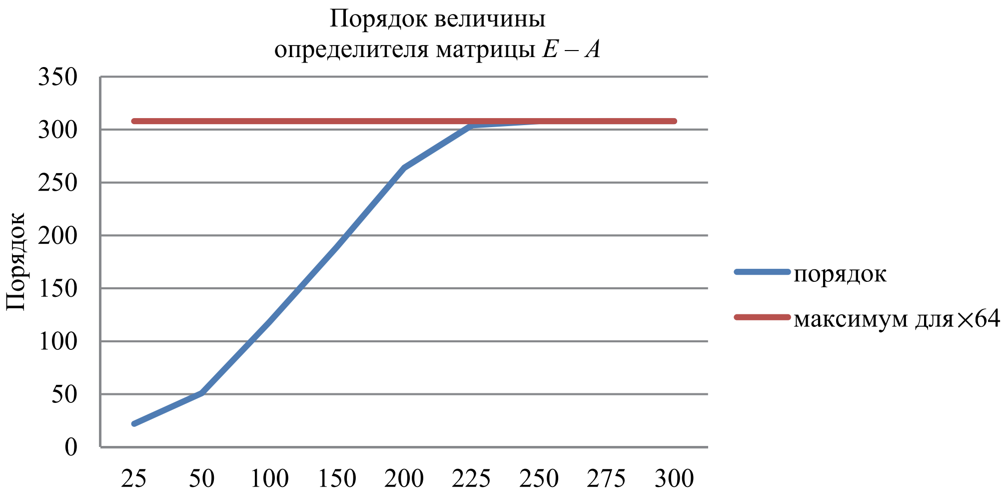


Рис. 1. Оценка порядка величины определителя матрицы $E - A$

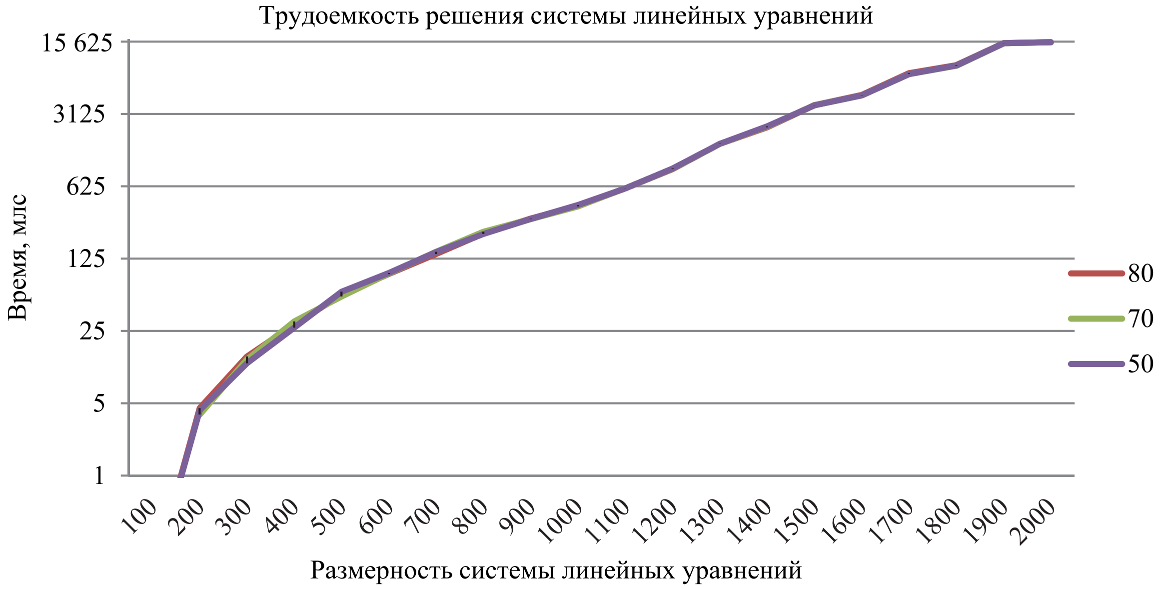


Рис. 2. Оценка продолжительности решения системы линейных уравнения

Полученное с помощью итерационных методов приближенное решение X' всегда можно проверить, оценив разницу $Y-(E-A)X'$. Получив приемлемый результат, можно считать, что решение уравнения (1) получено. Если расхождение векторов Y и $(E-A)X'$ является неприемлемо большим, то проблема вычислений может быть связана с плохой обусловленностью [3, 4] матрицы $E-A$: $\mathrm{cond}(E-A) = ||E-A||\bullet||(E-A)^{-1}||$, где $||\bullet||$ – оператор вычисления одной из норм матрицы [4]. При этом справедливо [4] утверждение

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \mathrm{cond}(E-A)\frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}, \quad (3)$$

где $||\Delta X||$ – согласованная (с нормой матрицы $E-A$) норма вектора ΔX – отклонения от истинного решения X уравнения (1); $||X||$ – согласованная норма вектора X – решения системы уравнения (1); $||\Delta Y||$ и $||Y||$ – согласованные нормы векторов: ΔY – отклонения вектора Y и самого вектора Y из уравнения (1). Очевидно, что чем меньше (ближе к 1) значение $\mathrm{cond}(E-A)$, тем слабее требования к погрешности промежуточных итеративных вычислений и потребуется меньше шагов для получения достаточно точного решения уравнения (1).

В нашем случае выражение (3) нужно интерпретировать следующим образом: если с помощью итерационного метода решения системы линейных уравнений (1) получено приблизительное решение X' (валовой план производства продукции) и вычислено соответствующее значение $Y' = (E-A)X'$ (планируемый объем конечной продукции), то верхняя граница значения относительной нормы отклонения $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \frac{\|X-X'\|}{\|X\|}$ полученного решения от истинного X будет гарантированно не превышать величину $\mathrm{cond}(E-A)\frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}$, где $||\Delta Y|| = ||Y-Y'||$. Другими словами, величина $\mathrm{cond}(E-A)$ позволяет оценить максимально возможное относительное расхождение между истинным X и приблизительным X' решениями уравнения (1).

Кроме того, неравенство (3) позволяет оценить устойчивость полученного решения. В нашем случае можно оценить верхнюю границу изменения полученного валового плана X в зависимости от изменения планируемой конечной продукции Y. Если изменение плана будет значительным, то план неустойчив и его применение вряд ли возможно.

На рис. 3 приведен пример вычисления меры обусловленности матрицы $E-A$ из [5]. В качестве нормы для матрицы $E-A$ была выбрана октаэдрическая норма [4]: $||E-A|| = \max \sum_i |e_{i,j} - a_{i,j}|$.

Если уравнение (1) имеет решение, то погрешность при применении одного из итерационных методов для вычисления вектора X оценивается сравнением меры $\mathrm{cond}(E-A)$ со значениями $\mathrm{macheps}^{-1/2}$ или $\mathrm{macheps}^{-1}$. Величина macheps (машинный ноль, или машинный эпсилон) характеризует точность вычислений операций с действительными числами, ее значения для чисел стандарта IEEE 754 приведены в таблице. Считается [5], что достаточно точное решение уравнения итеративным методом может быть получено за конечное число итераций, если $\mathrm{cond}(E-A) \le \mathrm{macheps}^{-1/2}$, реже используют ослабленное неравенство $\mathrm{cond}(E-A) \le \mathrm{macheps}^{-1}$.

$E - A$

1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-1,000	-1,000	0,000	-1,000	0,000	-1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,001	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,002	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-1,000	-1,000	0,000	-1,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	-0,010	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	-0,002	0,000	0,000
-2,000	-4,000	0,000	-4,000	0,000	-2,000	0,000	0,000	-16,00	0,000	0,000	1,000	0,000	-0,003	-0,002	0,000	0,000
-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	-0,005	0,000	0,000	0,000
-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-400,0	0,000	0,000	-100,0	-100,0	0,000	-50,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000
7,000	9,000	4,000	9,000	404,0	5,000	1,000	101,0	119,00	1,000	51000	1,000	1,000	1,019	1,006	1,000	1,000

$\| (E - A) \| = 404$

$(E - A)^{-1}$

1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,001	1,001	1,001	1,001	0,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,002	0,000	0,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,010	1,010	1,010	1,010	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,010	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,002	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000
2,003	4,003	2,003	4,003	16,002	2,000	0,000	0,000	16,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,003	0,002	0,000	0,000
1,005	1,005	1,005	1,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,005	0,000	0,000	0,000
1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	650,300	0,000	0,000	100,000	250,000	0,000	50,000	0,000	0,000	0,000	0,300	0,000	1,000
7,019	9,019	8,019	9,019	672,306	5,000	1,000	101,000	269,000	1,000	51,000	1,000	1,000	1,019	1,306	1,000	1,000

$\| (E - A)^{-1} \| = 672{,}306$

$$\mathrm{cond}(E - A) = 404 \cdot 672{,}396 = 271\ 612$$

Рис. 3. Пример вычисления меры обусловленности матрицы $E - A$

Значения macheps для чисел стандарта IEEE754

Разрядность	Константа C/C++	macheps	macheps^{-1}	macheps$^{-1/2}$
32	FLT_EPSILON	$2^{-23} \approx 1{,}192 \cdot 10^{-7}$	$2^{23} = 8\ 388\ 608$	$2^{11,5} \approx 2896{,}3$
64	DBL_EPSILON	$2^{-52} \approx 2{,}22045 \cdot 10^{-16}$	$2^{52} \approx 4{,}5036E \cdot 10^{15}$	$2^{26} = 67\ 108\ 864$
80	LDBL_EPSILON	$2^{-63} \approx 1{,}08429 \cdot 10^{-19}$	$2^{63} \approx 9{,}2234 \cdot 10^{18}$	$2^{31,5} \approx 3\ 037\ 000\ 500$

Продолжая пример (рис. 3) заметим, что для надежной сходимости матрицы $E - A$ требуется, как минимум, двойная точность вычислений, что соответствует строке с разрядностью 64 в таблице.

Следует заметить, что мера $\operatorname{cond}(E - A)$ не зависит от значений столбца свободных членов Y, а оценка (3) сделана с большим «запасом». Устойчивость решения для конкретного уравнения (1) может оказаться значительно лучше верхней границы, и требования к точности не будут столь критичными. На рис. 4 исследуется на устойчивость решение уравнения (1), в котором матрица $E - A$ совпадает с матрицей на рис. 2.

На рис. 4 представлены три пары столбцов: каждая пара задает столбец свободных членов (Y, Y', Y'') и соответствующее ему решение (X, X', X''). Исследуемая система линейных уравнений позволяет получить достаточно устойчивое решение: в первом случае при относительном отклонении нормы столбца свободных членов на 1% относительное отклонение нормы решения составляет примерно 0,01%, а во втором случае при относительном отклонении нормы столбца свободных членов на 50% соответствующее отклонение решения – примерно на 3%.

Коэффициенты $a_{i,j}$ матрицы A отражают технологическую зависимость продукта j от ресурса i и указывают долю (или количество) ресурса i, необходимого для производства единицы продукта j. В свою очередь ресурс i сам может являться продуктом, который зависит от других (в общем случае и от самого себя) ресурсов. Как правило, коэффициенты $a_{i,j}$ не являются точными и определяются статистическими методами. Поэтому важным является исследование устойчивости решения системы уравнений (1) относительно значений этих коэффициентов.

Например, если вычислить решение X' уравнения $(E - A)X'$, где A' – матрица, полученная из матрицы A (рис. 4), путем увеличения всех коэффициентов в 12-й строке на 1%, то относительное отклонение $\dfrac{\|X - X'\|}{\|X\|} \approx 0{,}005$ будет составлять примерно 0,5%. Если вычислить $Y' = (E - A)X'$, то отклонение $\dfrac{\|Y - Y'\|}{\|Y\|} \approx 0{,}09$ составляет примерно 9%. Другими словами, погрешность в коэффициентах 12-й строки матрицы A в 1% может привести к значительной погрешности (9%) плана конечной продукции.

Основная часть. Будем предполагать далее следующее.

1. Размерность системы уравнений (1) не выходит за пределы 2000.

2. Матрица технологических коэффициентов A хорошо обусловлена и позволяет за конечное количество шагов итерационным методом получить устойчивое решение уравнения (1) с достаточной точностью.

При этом заметим.

3. Элементы матрицы технологических коэффициентов $A = (a_{i,j})$ не могут быть отрицательными: $a_{i,j} \geq 0,\ i, j = \overline{1,h}$. Матрица A, состоящая из одних нулей, не имеет смысла и приводит к решению $X = (x_i)_h$ уравнения (1), совпадающему с вектором $Y = (y_{i,j})_h : x_i = y_i,\ i = \overline{1,h}$.

4. Элементы вектора $Y = (y_i)_h$ (планируемый выпуск конечной продукции) не могут быть отрицательными: $y_i \geq 0,\ i = \overline{1,h}$ – нулевой вектор Y не имеет смысла и приводит к нулевому решению: $x_i = 0,\ i = \overline{1,h}$.

	Y	X	Y′	X′	Y″	X″
	10000	10000	10100	10100	10000	10000
	15000	15000	15150	15150	15000	15000
	20000	20000	20200	20200	20000	20000
	10000	10000	10100	10100	10000	10000
	500	500	505	505	500	500
	5000	25000	5050	25250	5000	25000
	1000	61055	1010	61665,55	1000	61055
	0	501	0	506,01	0	501
	0	500	0	505	0	500
	2000	62550	2020	63175,5	2000	62550
	0	501	0	506,01	0	501
	10000	188166	10100	190047,66	20000	198166
	5000	60275	5050	60877,75	5000	60275
	0	55000	0	55550	0	55000
	0	500	0	505	0	500
	0	500	0	505	0	500
	0	325150	0	328401,5	0	325150
$\|\cdot\|$	**20000**	**325150**	**20200**	**328401,5**	**20000**	**325150**

$$\frac{\|\Delta Y'\|}{\|Y\|} = 0.01 \qquad \frac{\|\Delta Y''\|}{\|Y\|} = 0.5$$

$$\frac{\|\Delta X'\|}{\|X\|} \approx 0.001 \qquad \frac{\|\Delta X''\|}{\|X\|} \approx 0.0308$$

$$0.001 \ll 271612 \times 0.01 \qquad 0.0308 \ll 271612 \times 0.5$$

Рис. 4. Пример оценки устойчивости решения системы уравнений

5. Элементы вектора X (валовой объем продукции) не могут быть отрицательными: $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,h}$. Нулевой вектор X не имеет смысла и приводит к нулевому плану конечной продукции Y: $y_i = 0$, $i = \overline{1,h}$.

Систему уравнений (1), которая удовлетворяет пунктам 1–4, будем далее называть корректным балансовым уравнением, решение корректного уравнения, удовлетворяющего условию 5 – корректным решением, а соответствующий этому решению план валового производства продукции – корректным планом.

Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h,1} & \cdots & a_{h,h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_h \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Формально введем ограничения, описанные выше в пунктах 3–5.

$$a_{i,j} \geq 0,\ i, j = \overline{1,h},\ \sum\nolimits_{(i,j)} a_{i,j} > 0; \qquad (5)$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1,h},\ \sum\nolimits_i y_i > 0; \qquad (6)$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,h},\ \sum\nolimits_i x_i > 0. \qquad (7)$$

Пусть матрица A – матрицы смежности ориентированного взвешенного графа $G_A = (P, L)$, где $P = \{1, 2, \dots, h\}$ – множество вершин и $L = \{<i,j> \mid i \in P, j \in P, a_{i,j} \neq 0\}$ – множество дуг. При этом, весом дуги $<i,j>$ будем считать величину $a_{i,j} \neq 0$. На рис. 4 представлен пример матрицы A и соответствующего ей графа $G_A = (P, L)$.

Будем применять далее для графа $G_A = (P, L)$ следующие обозначения:

$\varphi^j = [p_1, \dots, p_k]$, $p_i \in P$, $i = \overline{1,k}$ – такая простая цепь, что существует простой цикл $[i, p_1, \dots, p_k, i]$;

$\varphi^j = []$ – петля в вершине i;

$\Phi^i = \{\varphi_1^i, \dots, \varphi_k^i\}$, $i \in$ P – множество цепей φ^i;

$$w(\varphi^i) = \begin{cases} \dfrac{a_{i,p_1} a_{p_k,i}}{(1 - a_{i,i})(1 - a_{p_k,p_k})} \prod_{j=1}^{k-1} \dfrac{a_{p_j,p_{j+1}}}{(1 - a_{p_j,p_j})}, \end{cases}$$

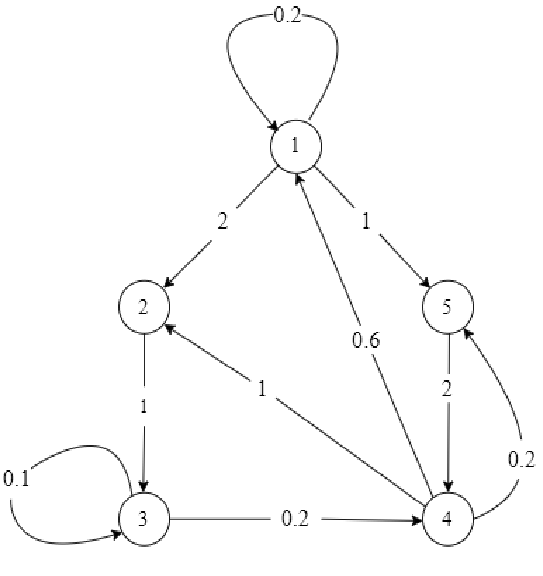
$\varphi^j \neq []$ – вес цикла φ^i.

$W(\Phi^i) = \sum_i w(\varphi^i)$ – суммарный вес всех циклов φ^i.

Докажем следующее.

Утверждение: пусть (3) корректное балансовое уравнение и $G_A = (P, L)$ – ориентированный взвешенный граф с матрицей смежности A. Тогда, если в графе G_A есть вершина i и $W(\Phi^i) \geq 1$, то система уравнений (3) не имеет корректного решения.

Пусть в вершине i графа G_A существует петля $\varphi^j = []$ и $w(\varphi^i) = a_{i,i} = 1$. Тогда i-е уравнение системы (3) принимает следующий вид: $x_i - x_i - S_i = y_i$, $S_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_i$ и в соответствии с (4)–(6) $S_i \geq 0$, $y_i \geq 0$.



A = (a_{i,j})

	1	2	3	4	5
1	0.2	2	0	0	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0.1	0.2	0
4	0.6	1	0	0	0.2
5	0	0	0	2	0

G_A = (P, L)

P = {1,2,3,4,5}

L = {<1,1>, <1,2>, <1,5>, <2,3>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,5>, <5,4>}

Рис. 4. Пример матрицы A и соответствующего ей графа $G_A = (P, L)$

Если $-S_i = y_i = 0$, то с учетом (4)–(6) / $\forall j \neq i: x_j = 0$ и, следовательно, $\forall j \neq i: -a_{j,i} = y_i \Rightarrow x_i = y_j = 0$, что нарушает ограничение (6) корректности решения.

Если $-S_i = y_i > 0$, то с учетом (4)–(6) корректного решения не существует.

Пусть в вершине i существует петля $\varphi^j = []$ и $w(\varphi^j) = a_{i,i} > 1$. Тогда i-е уравнение системы (1) может быть представлено $x_i = \frac{1}{1 - a_{i,i}}(S_i + y_i)$. Из ограничений (4–5) следует $x_i \leq 0$. Если $x_i < 0$, то это нарушает ограничение (6) и решение не является корректным. Если $x_i = 0$, то i-е уравнение системы (1) принимает вид $-S_i = y_i$ и с учетом (4)–(6) корректное решение не существует.

Пусть в графе G_A нет петель $\varphi^j = []$, $w(\varphi^j) \geq 1$, $j = \overline{1,h}$, если и для вершины i выполняется условие $W(\Phi^i) \geq 1$, то возможны следующие случаи:

а) через вершину i проходит хотя бы 1 цикл; $\varphi^j \neq []$, $w(\varphi^j) \geq 1$;

б) через вершину i проходит s циклов φ_1^i, φ_2^i, …, φ_s^i, $w(\varphi_j^i) < 1$, $j = \overline{1,s}$ и $\sum_{i=1}^{s} w(\varphi^j) \geq 1$.

Пусть существует цикл $\varphi^i = [p_1, \ldots, p_k]$, $w(\varphi^j) \geq 1$. Рассмотрим подсистему (7) уравнений системы (3), содержащую уравнения, соответствующие вершинам цикла $\varphi^i = [p_1, \ldots, p_k]$:

$$\begin{cases} x_i - \ldots - a_{i,j}x_i \ldots - a_{i,p_1}x_{p_1} \ldots - \ldots = y_i, \\ x_{p_1} - \ldots - a_{p_1,p_2}x_{p_1} \ldots - a_{p_1,p_2}x_{p_2} \ldots - \ldots = y_{p_1}, \\ x_{p_2} - \ldots - a_{p_2,p_2}x_{p_2} \ldots - a_{p_2,p_3}x_{p_3} \ldots - \ldots = y_{p_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p_k} - \ldots - a_{p_k,p_k}x_{p_k} \ldots - a_{p_k,i}x_i \ldots - \ldots = y_{p_k}. \end{cases} \quad (7)$$

Ввиду предположения о существовании цикла φ^i следует, что веса всех его дуг $a_{1,p_1}, a_{p_1,p_2}, \ldots, a_{p_1,i}$ являются положительными величинами. Уравнения подсистемы (8) можно переписать в следующем виде:

$$x_i = \frac{a_{i,p_1}}{1 - a_{i,j}} x_{p_1} + B_i;$$

$$B_i = \frac{1}{1 - a_{i,j}} \sum_{j \neq i, j \neq p_1} a_{i,j} x_j;$$

$$x_{p_1} = \frac{a_{p_1,p_2}}{1 - a_{p_1,p_1}} x_{p_2} + B_{p_1};$$

$$B_{p_1} = \frac{1}{1 - a_{p_1,p_1}} \sum_{j \neq p_1, j \neq p_2} a_{p_1,j} x_j;$$

$$x_{p_2} = \frac{a_{p_2,p_3}}{1 - a_{p_2,p_2}} x_{p_3} + B_{p_2};$$

$$B_{p_2} = \frac{1}{1 - a_{p_2,p_2}} \sum_{j \neq p_2, j \neq p_3} a_{p_2,j} x_j;$$

$$x_{p_k} = \frac{a_{p_k,i}}{1 - a_{p_k,p_k}} x_i + B_{p_k};$$

$$B_{p_k} = \frac{1}{1 - a_{p_k,p_k}} \sum_{j \neq p_k, j \neq i} a_{p_k,j} x_j.$$

Выполнив последовательно подстановки x_{p_1}, $x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}$ в первое уравнение:

$$x_i = \frac{a_{i,p_1}}{1 - a_{i,i}} \frac{a_{p_1,p_2}}{1 - a_{p_1,p_1}} x_{p_2} + B_{i,p_1};$$

$$B_{i,p_1} = \frac{a_{i,p_1}}{1 - a_{i,i}} B_{p_1} + B_i;$$

$$x_i = \frac{a_{i,p_1}}{1 - a_{i,i}} \frac{a_{p_1,p_2}}{1 - a_{p_1,p_1}} \frac{a_{p_2,p_3}}{1 - a_{p_2,p_2}} x_{p_3} + B_{i,p_2};$$

$$B_{i,p_2} = \frac{a_{i,p_1}}{1 - a_{i,i}} \frac{a_{p_1,p_2}}{1 - a_{p_1,p_1}} B_{p_2} + B_{i,p_1}, \ldots;$$

$$x_i = \frac{a_{i,p_1} a_{p_k,i}}{(1 - a_{i,i})(1 - a_{p_k,p_k})} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{a_{p_j,p_{j+1}}}{(1 - a_{p_j,p_j})} x_i + B_{i,p_k},$$

получим следующее выражение:

$$x_i = w(\varphi^i) x_i + B_{i,p_k}. \quad (8)$$

С учетом предположения $a_{j,j} < 1$, $j = \overline{1,h}$ и ввиду ограничений (4)–(5) и последовательности вычислений $B_{i,p_k} \geq 0$, необходимым условием корректного решения является $w(\varphi^j) > 0$. Заметим также, что при $B_{i,p_k} = 0$ система (3) имеет единственное тривиальное некорректное решение: $x_i = 0$, $i = \overline{1,h}$.

Пусть в графе G_A существует два цикла:

$$\varphi_1^i = [p_1, \ldots, p_k],\ w(\varphi_1^i) > 0;$$

$$\varphi_2^i = [p_1, \ldots, p_m],\ w(\varphi_2^i) > 0,$$

$$w(\varphi_1^i) + w(\varphi_2^i) \geq 1.$$

Проделав постановки в i-е уравнение системы (3), аналогичные тем, которые привели к результату (9), но для двух циклов φ_1^i и φ_2^i, очевидно, получим выражение

$$x_i = w(\varphi_1^i) x_i + w(\varphi_2^1) x_i + B,\ B \geq 0, \quad (10)$$

из которого следует, что корректное решение системы уравнений (3) возможно при $w(\varphi_1^i) + w(\varphi_2^i) < 1$.

Выражение (10) можно обобщить на s циклов Φ^i, проходящих через вершину i: $x_i = W(\Phi^i)x_i + B, B \geq 0$.

Утверждение доказано.

Выводы.

1. Доказанное в основной части статьи утверждение формулирует необходимое условие для существования корректного решения (7) балансового уравнения (1): $\forall i \in P: W(\Phi^i) < 1$.

2. Доказанное утверждение имеет очевидное следствие: *необходимым условием существования корректного решения балансового уравнения (1) является условие* $\forall i \in P: 0 \leq a_{i,j} \leq 1$.

3. Доказанное утверждение имеет экономическую интерпретацию: *значения технологических коэффициентов* $a_{i,j}, i, j = \overline{1, h}$ *матрицы* A *для любой продукции* $k = \overline{1, h}$ *не должны образовывать замкнутые технологические цепочки, которые суммарно для производства единицы продукции k требуют больше единицы этой же продукции.*

4. В общем случае, проверка необходимого условия существования корректного решения балансового уравнения (1) сводится к NP-задаче поиска простых циклов в ориентированном графе G_A.

Сформулированное необходимое условие существования корректного решения балансового уравнения может быть применено для проверки корректности матрицы технологических коэффициентов при решении задачи планирования производственной деятельности ПК, решаемой в рамках цифровой платформы ПК, концепция которой предложена в работе [1].

Список литературы

1. Концепция цифровой платформы инновационно-промышленного кластера / И. В. Новикова [и др.] // Импортозамещение, научно-техническая и экономическая безопасность: сб. ст. V Междунар. науч.-техн. конф. «Минские научные чтения – 2022», Минск, 7–9 декабря 2022 г. Минск: БГТУ, 2022. Т. 2. С. 3–7.

2. Новикова И. В., Смелова В. В. Планирование валового объема продукции инновационно-промышленного кластера // Цифровизация: экономика и управление производством: материалы 87-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов, 31 янв. – 17 февр. 2023, г. Минск: БГТУ, 2022. С. 29–32.

3. Смелова В. В., Шиман Д. В. Алгоритм планирования валового объема продукции инновационно-промышленного кластера // Алгоритмизация и программирование. Актуальные проблемы программной инженерии: материалы 87-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов, 31 янв. – 17 февр. 2023 г. Минск: БГТУ, 2022. С. 29–32.

4. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.

5. Крылов В. И. Вычислительные методы высшей математики. Минск: Вышэйшая школа, 1972. 585 с.

6. Math.NET Numerics // Официальная документация. URL: https://numerics.mathdotnet.com/ (дата обращения: 01.03.2023).

7. Яшкардин В. IEEE 754 – стандарт двоичной арифметики с плавающей точкой // SoftElectro. URL: http://www.softelectro.ru/ieee754.html (дата обращения: 04.03.2023).

References

1. Novikova I. V., Smelova V. V., Timofeeva Yu. A., Shiman D. V. The concept of the digital platform of the innovation-industrial cluster. *Importozameshcheniye, nauchno-tekhnicheskaya i ekonomicheskaya bezopasnost': sb. st. V Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. “Minskiye nauchnyye chteniya – 2022”* [Import substitution, scientific, technical and economic security: sat. art. V Intern. sci.-tech. conf. “Minsk Scientific Readings – 2022”]. Minsk, BSTU, 2022, pp. 3–7 (In Russian).

2. Novikova I. V., Smelova V. V. Planning the gross output of the innovation-industrial cluster. *Tsifrovizatsiya: ekonomika i upravleniye proizvodstvom: materialy 87-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodavat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov* [Digitalization: economics and production management: proceedings of the 87th scientific and technical conference of the faculty, researchers and graduate students]. Minsk, 2022, pp. 29–32 (In Russian).

3. Smelova V. V., Shiman D. V. Algorithm for planning the gross output of an innovation-industrial cluster. *Algoritmizatsiya i programmirovaniye. Aktual'nyye problemy programmnoy inzhenerii: materialy 87-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodavat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov* [Algorithmization and programming. Actual problems of software engineering: proceedings of the 87th scientific and technical conference of the faculty, researchers and graduate students]. Minsk, 2022, pp. 29–32 (In Russian).

4. Verzhbitsky V. M. *Osnova chislennykh metodov* [Fundamentals of numerical methods]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2002. 840 p. (In Russian).

5. Krylov V. I. *Vychislitel'nyye metody vysshey matematiki* [Computational methods of higher mathematics]. Minsk, Vysheyshaya shkola Publ., 1972. 585 p. (In Russian).

6. Math.NET Numerics. Available at: https://numerics.mathdotnet.com/ (accessed 01.03.2023) (In Russian).

7. Yashkardin V. IEEE 754 – binary floating point arithmetic standard. Available at: http://www.softelectro.ru/ieee754.html (accessed 04.03.2023) (In Russian).

Информация об авторах

Смелова Валерия Владимировна – магистрант кафедры програмной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: valeria.smelova0@gmail.com

Шиман Дмитрий Васильевич – кандидат технических наук, доцент, декан факультета информационных технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: shiman@belstu.by

Information about the authors

Smelova Valeria Vladimirovna – Master's degree student, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valeria.smelova0@gmail.com

Shiman Dmitriy Vasilievich – PhD (Engineering), Assistant Professor, Dean of the Faculty of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: d.shiman@belstu.by

Поступила после доработки 15.03.2023