УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

РЕДУКТИВНЫЕ НЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Целью данной работы является описание трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств, не допускающих инвариантных эквиаффинных связностей. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, редуктивное и симметрическое пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная связность. В основной части работы для трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств, на которых действует неразрешимая группа преобразований, определено, при каких условиях пространство не допускает эквиаффинных связностей. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах. Исследования основаны на применении свойств однородных пространств и структур на них и носят в основном локальный характер. Особенностью представленных методов является использование чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них.

Ключевые слова: эквиаффинная связность, группа преобразований, редуктивное пространство, симметрическое пространство, тензор кручения.

Для цитирования: Можей Н. П. Редуктивные несимметрические пространства, не допускающие эквиаффинных связностей // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 23–26. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-4.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

REDUCTIVE NON-SYMMETRIC SPACES THAT DO NOT ADMIT EQUIAFFINE CONNECTIONS

The purpose of the work is the description of three-dimensional reductive non-symmetric homogeneous spaces that do not admit invariant equiaffine connections. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, reductive and symmetric space, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine connection are defined. In the main part of the work, for three-dimensional reductive non-symmetric homogeneous spaces on which an unsolvable Lie group of transformations acts, it is determined under what conditions the space does not admit equiaffine connections. The results can be used in the study of manifolds, as well as have applications in various fields of mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are connected with the study of in-variant objects on homogeneous spaces. Studies are based on the application of properties of the homogeneous spaces and structures on them and they mainly have local character. The peculiarity of presented techniques is the use of purely algebraic approach to the description of manifolds and connections on them.

Keywords: equiaffine connection, transformation group, reductive space, symmetric space, torsion tensor.

For citation: Mozhey N. P. Reductive non-symmetric spaces that do not admit equiaffine connections. *Proceedings of BSTU, issue* 3, *Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 23–26. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-4 (In Russian).

Введение. Цель работы – описать редуктивные несимметрические однородные пространства размерности, не допускающие эквиаффинных связностей. В работе исследуется класс однородных пространств аффинной связности с кручением, получивших название «редуктивных», у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения, введенный в рассмотрение П. К. Рашевским [1]. Этот класс интересен, например, тем, что все геодезические на редуктивных пространствах являются однородными. Симметрические пространства – это пространства аффинной связности без кручения, при параллельном переносе у которых сохраняется тензор кривизны. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах независимо изучались П. К. Рашевским, М. Куритой, Э. Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу и др. Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [2]). Сами трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства описаны в статье [3], в данной работе изучается, при каких условиях такие пространства не допускают эквиаффинных связностей.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G) (см., например, [4]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ad(G)-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}=0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$ (второе условие влечет $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна). Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Симметрическое* пространство есть тройка ($\bar{G}$, G, σ), где σ – инволютивный автоморфизм, такой, что $\sigma(g) = s_o g s_o^{-1}, g\in\bar{G}$, s_o – симметрия M, o – неподвижная точка s_o. Пусть ($\bar{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$, σ) – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, его собственными значениями являются 1 и –1, $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1, $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, тогда $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$. Если первых два условия выполняются, а последнее условие нет, то соответствующее однородное пространство является редуктивным, но не является симметрическим.

Аффинной связностью на паре ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$ – инвариантным, инвариантные аффинные связности на (M, $\bar{G}$) находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$). Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если G эффективна на $\bar{G}/G$ [5]. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность. *Тензор кручения* $T\in InvT_2^{\,1}(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R\in InvT_3^{\,1}(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}};$$
$$R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])$$

для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T=0$. Определим тензор Риччи $Ric\in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y,z)=\mathrm{tr}\{x\mapsto R(x,y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$, то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}},\bar{\mathfrak{g}}])\subset\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$. Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна.

Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})\in\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Определим пару ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) таблицей умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,\dots,e_n,u_1,u_2,u_3\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n=\dim\mathfrak{g}$), причем алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1,\dots,e_n$, а $\{u_1,u_2,u_3\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в источнике [3], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$).

Теорема*. Любое трехмерное редуктивное несимметрическое однородное пространство* ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) *такое, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *не является разрешимой* ($\mathfrak{g}\neq\{0\}$)*, не допускающее эквиаффинных связностей, имеет вид*

4.2.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	$(1/2)u_1$	$(1/2)u_2$	u_3
e_2	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	$-u_2$	0
e_3	0	$-2e_3$	0	e_2	0	u_1	0
e_4	0	$2e_4$	$-e_2$	0	u_2	0	0
u_1	$-(1/2)u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
u_2	$-(1/2)u_2$	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
u_3	$-u_3$	0	0	0	0	0	0

Для доказательства этой теоремы рассмотрим все трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, приведеные в работе [3], и выберем из них пространства, не допускающие эквиаффинных связностей. Пусть, например, локально однородное пространство имеет вид 4.2.2. Поскольку ограничение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Пусть

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3}\\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3}\\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3}\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3}\\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3}\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3}\\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3}\end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (для всех $i, j = 1, 2, 3$). Поскольку отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, имеем

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1),$$

тогда $p_{1,1}=p_{1,2}=p_{2,1}=p_{2,2}=p_{2,3}=p_{3,1}=p_{3,3}=0$. Так как

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow$$
$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = (1/2)\Lambda(u_1),$$

то $p_{1,3}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_2)$, $q_{1,1}=q_{1,2}=q_{1,3}=q_{2,1}=q_{2,2}=q_{2,3}=0$, $q_{3,1}=-p_{3,2}$, $q_{3,2}=q_{3,3}=0$. Если $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)]=0$, то $r_{1,2}=r_{1,3}=r_{2,1}=0$, $r_{2,3}=r_{3,1}=r_{3,2}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_3)$, $r_{1,1}=r_{2,2}=r_{3,3}=0$. Получим, что аффинная связность в этом случае имеет вид

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & p_{3,2} & 0\end{pmatrix}, \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -p_{3,2} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, p_{3,2}\in\mathbb{R},$$

тензор кривизны нулевой, тензор кручения –

$$T(u_1, u_2) = (0, 0, 2p_{3,2}-1); T(u_1, u_3) = (0,0,0);$$
$$T(u_2, u_3) = (0,0,0).$$

Тензор Риччи нулевой и, разумеется, является симметрическим. Определяем, при каких значениях параметров $\mathrm{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ и $T=0$ (то есть Λ является связностью без кручения). Тогда локально эквиаффинная связность (без кручения) примет вид

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}, \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Теперь определим, будет ли связность эквиаффинной, то есть будет ли $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. Поскольку

$$\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

то $\mathrm{tr}\Lambda(e_1)\neq 0$ и пара не допускает эквиаффинных связностей.

Прямыми вычислениями для всех пространств, приведенных в работе [3], получаем, что других трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств неразрешимых групп Ли, не допускающих инвариантных эквиаффинных связностей, кроме приведенного в теореме, нет.

Заключение. Таким образом, для всех трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований определено, при каких условиях такое пространство не допускает эквиаффинных связностей. Полученные результаты могут найти приложение в общей теории относительности (которая с математической точки зрения базируется на геометрии искривленных пространств), в ядерной физике и физике элементарных частиц (поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах), а также при конструировании математических моделей реальных процессов.

Список литературы

1. Рашевский П. К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1969. № 8. С. 82–92.
2. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.
3. Можей Н. П. Трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2017. № 3 (102). С. 141–148.
4. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995. 384 с.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т.

References

1. Rashevsky P. K. Symmetric spaces of affine connection with torsion. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the seminar on vector and tenzor analysis], 1969, no 8, pp. 82–92 (In Russian).

2. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.

3. Mozhey N. P. Three-dimensional reductive non-symmetric homogeneous spaces. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya Gomel State University], 2017, no 3 (102), pp. 141–148 (In Russian).

4. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fiz.-mat. lit Publ., 1995. 384 p. (In Russian).

5. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 t.* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 15.04.2023