УДК 519.2

А. М. Волк
Белорусский государственный технологический университет

АНАЛИЗ ДИСПЕРСНОГО СОСТАВА ЧАСТИЦ ДРОБЛЕНИЯ

Выполнен анализ методов описания дисперсного состава частиц дробления. Рассмотрено обобщенное гамма-распределение. Данное распределение имеет широкое применение в статистических методах исследования физических процессов, дистанционном зондировании, теории надежности, при описании дисперсного состава частиц дробления. Исследованы его свойства и найдены числовые характеристики. Методом наибольшего правдоподобия получены уравнения для статистической оценки параметров данного распределения. Для полученных оценок найдена матрица информации Фишера, показана ее знакоположительность, что доказывает их состоятельность, асимптотическую эффективность и единственность. Выполнено описание дисперсного состава топлива, распыленного дизельными форсунками. Дан метод определения всех необходимых характеристик, используемых при исследовании физических процессов.

Ключевые слова: физические процессы, дисперсный состав, характеристики распределения, обобщенное гамма-распределение, свойства, статистическая оценка параметров, метод наибольшего правдоподобия, матрица информации Фишера, асимптотическая эффективность, единственность.

Для цитирования: Волк А. М. Анализ дисперсного состава частиц дробления // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 9–17. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-2.

A. M. Volk
Belarusian State Technological University

ANALYSIS OF THE DISPERSED COMPOSITION OF CRUSHING PARTICLES

An analysis of methods for describing the dispersed composition of crushing particles is performed. A generalized gamma distribution is considered. This distribution generalizes Gamma distributions and is widely used in statistical methods of physical processes research, in remote sensing, in reliability theory, and in describing the dispersed composition of crushing particles. Its properties have been investigated and its numerical characteristics have been found. Equations for statistical estimation of parameters of given distribution have been obtained by the method of highest likelihood. The Fisher information matrix was found for the obtained estimations; its sign-positivity was shown, which proves their consistency, asymptotically efficiency, and uniqueness. A description of the dispersed composition of fuel atomized by diesel injectors is performed. A method for determining all the necessary characteristics used in the study of physical processes is given.

Keywords: physical processes, dispersive composition, distribution characteristics, generalized gamma distribution, properties, statistical estimation of parameters, best likelihood method, Fisher information matrix, asymptotic efficiency, uniqueness.

For citation: Volk A. M. Analysis of the dispersed composition of crushing particles. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no 2 (272), pp. 9–17. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-2 (In Russian).

Введение. Многие процессы в различных отраслях промышленности происходят с дисперсными системами. Это тепло- и массообмен, сепарация в аппаратах химической промышленности, процессы дробления промышленных материалов, изготовление вяжущих смесей и красок, сгорание горючих веществ, очистка выбросов от опасных компонентов и т. д.

Качественный анализ дисперсной системы позволяет повысить эффективность расчетов исследуемых процессов. При этом необходимо знать распределение частиц по размерам δ и выразить основные характеристики дисперсного состава среды. Такими характеристиками являются средние диаметры частиц: δ_{10} – средний диаметр; δ_{20} – средний квадратичный диаметр; δ_{30} – средний кубический диаметр; δ_{32} – средний кубический диаметр, взвешенный по удельной поверхности (средний диаметр Заутера); δ_{31} – средний кубический диаметр, взвешенный по суммарной длине (средний диаметр Проберта) [1].

Если известна плотность распределения количества частиц по их размерам $f(\delta)$, то средние значения могут быть выражены общей формулой

$$\delta_{pq}^{p-q} = \left(\int_0^{+\infty} \delta^p f(\delta) d\delta\right) / \left(\int_0^{+\infty} \delta^q f(\delta) d\delta\right). \quad (1)$$

Из (1) следуют соотношения:

$$\delta_{pq}^{p-q} \delta_{pl}^{p-l} = \delta_{pl}^{p-l}; \quad \delta_{pq}^{p-q} = \left(\delta_{qp}^{q-p}\right)^{-1}.$$

Средние значения могут быть выражены через начальные моменты распределения случайной величины δ:

$$\delta_{pq}^{p-q} = \alpha_p / \alpha_q.$$

Доминирующее положение в теории вероятностей и математической статистике занимает нормальный закон распределения непрерывной случайной величины. Разумовский предложил данным законом описывать распределение логарифмов веса частиц золота в пробах [2]. Колмогоров теоретически обосновал логарифмически нормальный закон распределения объемов частиц дробления [3–5]:

$$f(\delta) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}\ln\sigma} e^{-\frac{(\ln\delta - \ln\delta_m)^2}{2\ln^2\sigma}}, \quad (2)$$

где δ_m – медиана распределения объема; $\ln\sigma$ – среднеквадратическое отклонение логарифмов диаметров частиц от их среднего диаметра. Медиану элементов выборки допускается заменять средним выборочным значением этих элементов.

Данный закон получен при условии, что скорость дробления постоянна и требует эмпирического определения параметров.

Из эмпирических распределений наиболее популярным является распределение Вейбулла – Гнеденко [4, 5] с функцией распределения массы частиц по их диаметрам:

$$F(\delta) = 1 - e^{-b\delta^c}. \quad (3)$$

При двойном дифференцировании функции остатка

$$R(\delta) = e^{-b\delta^c}$$

получается линейная зависимость, и параметры могут быть найдены без сложных вычислений [4]: графически или методом наименьших квадратов.

В источниках [4, 6, 7] показано, что обобщением многих аналитических форм для законов статистического распределения однокомпонентных случайных величин служит функция плотности

$$f(\delta) = A\delta^m e^{-b\delta^c}, \quad (4)$$

имеющая степенно-показательный вид и содержащая четыре параметра: A, m, b, c.

Шифрин [8] описал свойства функции (4) и с ее помощью – распределение в облаках количества капель по их диаметрам. Лышевский [6], использовав формулу (4) для описания распределения количества капель по их диаметрам при распыливании топлива дизельными форсунками, получил коэффициент A, моду распределения и формулу для средних значений. Авдеев [7] на основе зависимости (4) описывал распределение массы по диаметрам взвешенных твердых частиц. Им дан способ нахождения параметров распределения по трем специально выбранным опытным значениям. Этот способ не выясняет смысла параметров распределения и требует сложных вычислений.

Широко применяемые законы распределения Колмогорова (2) и Вейбулла – Гнеденко (3) не дают достаточно точного распределения близких к нулю размеров частиц. Наиболее точны четырехпараметрические формулы, но возникают определенные трудности при вычислении их параметров [4].

Распределение (4) рассмотрено в работе [9] и названо обобщенным гамма-распределением. Функцию плотности данного распределения удобно представить в виде

$$f(x) = \frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right). \quad (5)$$

Данное распределение изучалось ранее и было переоткрыто позднее другими исследователями [10].

Гамма–распределения более полутора столетия используются при моделировании реальных процессов и явлений. Обобщенное гамма-распределение применяется в теории надежности, при прогнозировании продолжительности лечения и затрат на медицинское обслуживание, в расчетах инженерных рисков и рисков катастроф (землетрясений и наводнений), при обработке изображений и дистанционном зондировании, в качестве моделей распределения доходов [11].

Распределение (5) включает в себя большинство известных законов. Его частными случаями являются: распределение Релея при $b = 2$ и $c = 2$; экспоненциальное распределение при $b = 1$ и $c = 1$; гамма-распределение при $b > 1$ и $c = 1$; распределение Эрланга при $b = k$, $c = 1$ при $k \in N$; распределение Хи-квадрат при $b = k / 2$, $c = 1$, $\theta = 2$ при $k \in N$; распределение Хи при $b = k$, $c = 2$, $\theta = \sqrt{2}$ при $k \in N$; распределение Накагами при $b > 1$ и $c = 2$; распределение Вейбулла при $b = c$ и $c > 0$; распределение Максвелла при $b = 3$, и $c = 2$; полунормальное распределение при $b = 1 / 2$, $c = 2$

и $\theta = \sqrt{2}$, а также их обратные и масштабированные аналоги [11, 12].

Популярность рассматриваемого распределения обусловливается как гибкостью и многообразием параметров, так и возможностью использовать его в качестве адекватных асимптотических аппроксимаций во многих предельных схемах [13].

Обобщенное гамма-распределение удобно применять при описании дисперсного состава частиц дробления [14]. При этом сложной остается задача статистической оценки его параметров. Метод моментов [14] не выявляет свойств оценок и не гарантирует их единственность. Автор данной работы независимо от других авторов определился с названием распределения (5), рассмотрел его свойства и предложил статистическую оценку параметров методом максимального правдоподобия [15].

Исследованию свойств и применению обобщенного гамма-распределения посвящено большое количество работ [16]. Тем не менее и в настоящее время актуальной остается задача статистической оценки параметров обобщенного гамма-распределения и исследование их свойств.

Свойства обобщенного гамма-распределения. Рассмотрим обобщенное гамма-распределение некоторой случайной величины ξ, заданное функцией плотности (5).

Отметим, что параметр θ является параметром масштаба, а b и c есть параметры формы.

Выполним переход к безразмерной случайной величине $\eta = \xi / \theta$ и получим функцию плотности:

$$f(t) = \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} t^{b-1} \exp\left(-t^{c}\right). \qquad (6)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины η

$$F(t) = \frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^t \tau^{b-1} \exp\left(-\tau^{c}\right) d\tau \qquad (7)$$

сводится к неполной гамма-функции [17].

Если $c > 0$, то

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \gamma\left(\frac{b}{c}, t^{c}\right), \qquad (8)$$

а при $c < 0$

$$F(t) = 1 - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \gamma\left(\frac{b}{c}, t^{c}\right). \qquad (9)$$

Если $\frac{b-1}{e} > 0$, то исследуемые распределения имеют следующую моду:

$$\eta_{\text{mod}} = \left(\frac{b-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}; \quad \xi_{\text{mod}} = \theta\, \eta_{\text{mod}} = \theta \left(\frac{b-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}. \qquad (10)$$

Для функции распределения мода будет точкой перегиба. На рис. 1, 2 приведены графики функции плотности и функции распределения случайной величины η для различных значений параметров b и c.

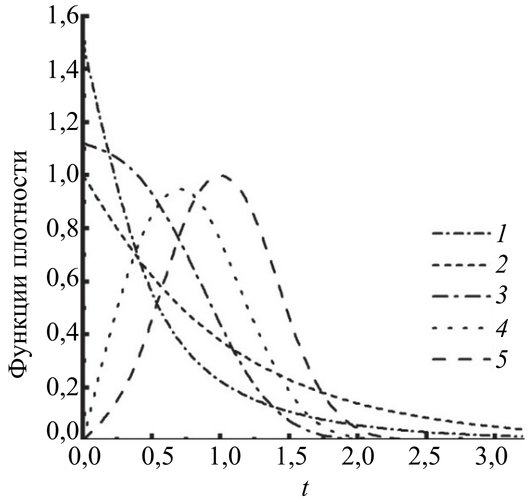

Рис. 1. Функция плотности распределения (6) случайной величины η:
1 – $0 < b < 1$, $c > 0$, или $b < 0$, $c < 0$;
2 – $b = 1$, $0 < c \leq 1$; *3* – $b = 1$, $c > 1$;
4 – $1 < b \leq 2$, $c > 0$; *5* – $b > 2$, $c > 0$

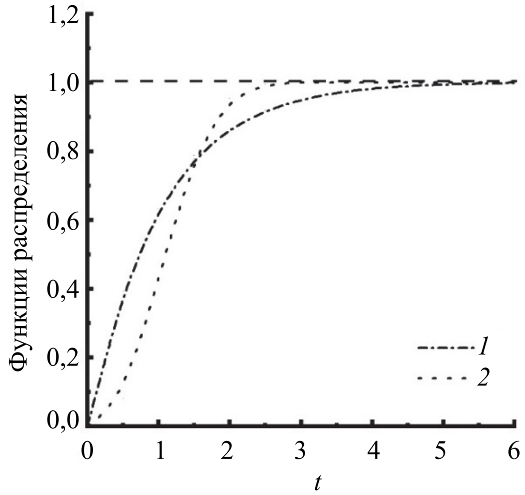

Рис. 2. Функция распределения (7) случайной величины η:
1 – $0 < b \leq 1$, $c > 0$ или $b < 0$, $c < 0$; *2* – $b > 1$, $c > 0$

Теорема 1. Для распределения (5) при $c > 0$ существуют начальные моменты порядка ν, удовлетворяющего условию $b + \nu > 0$, причем

$$\alpha_\nu(\eta)=\Gamma\left(\frac{b+\nu}{c}\right)/\Gamma\left(\frac{b}{c}\right); \qquad (11)$$

$$\alpha_\nu(\xi)=\theta^\nu\Gamma\left(\frac{b+\nu}{c}\right)/\Gamma\left(\frac{b}{c}\right). \qquad (12)$$

Действительно,

$$\alpha_\nu(\xi)=\frac{c}{\theta\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\int_0^{+\infty}x^\nu\left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\}dx=$$

$$=\frac{c\theta^\nu}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{b+\nu-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\}dx=$$

$$=\frac{c\theta^\nu}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\int_0^{+\infty}t^{b+\nu-1}\exp(-t^c)dt=\theta^\nu\frac{\Gamma\left(\frac{b+\nu}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}.$$

Начальные моменты распределения позволяют вычислить все его числовые характеристики.

Математическое ожидание

$$M(\xi)=\theta\alpha_1(\eta)=\theta\Gamma\left(\frac{b+1}{c}\right)/\Gamma\left(\frac{b}{c}\right).$$

Дисперсия

$$D(\xi)=\theta^2\mu_2(\eta)=\theta^2(\alpha_2(\eta)-\alpha_1^2(\eta))=$$

$$=\theta^2\left(\Gamma\left(\frac{b+2}{c}\right)/\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)-\left(\Gamma\left(\frac{b+1}{c}\right)/\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)\right)^2\right)=$$

$$=\theta^2\frac{\Gamma\left(\frac{b+2}{c}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)-\Gamma^2\left(\frac{b+1}{c}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{b}{c}\right)}.$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}.$$

Ассиметрия

$$A(\xi)=A(\eta)=\frac{\mu_3(\eta)}{\sigma^3(\eta)}=\frac{\alpha_3(\eta)\text{-}3\alpha_1(\eta)\alpha_2(\eta)\text{+}\alpha_1(\eta)^3}{\left(\alpha_2(\eta)\text{-}\alpha_1^2(\eta)\right)^{3/2}}.$$

Эксцесс

$$E(\xi)=E(\xi)=\frac{\mu_4(\eta)}{\sigma^4(\eta)}-3=$$

$$=\frac{\alpha_4(\eta)-4\alpha_1(\eta)\alpha_3(\eta)+6\alpha_1^2(\eta)\alpha_2(\eta)-\alpha_1^4(\eta)}{\left(\alpha_2(\eta)-\alpha_1^2(\eta)\right)^2}-3.$$

Теорема 2. Распределение (5) имеет характеристическую функцию:

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{b+k}{c}\right)}{k!}(i\zeta\theta)^k.$$

Доказательство.

Найдем характеристическую функцию распределения случайной величины ξ.

$$\varphi(\varsigma)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\varsigma x)f(x)dx=$$

$$=\frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\int_0^{+\infty}\exp(i\varsigma\theta t)t^{b-1}\exp\left(-t^c\right)dt.$$

Выполним замену $t^c = y$ и, разлагая функцию $\exp(i\varsigma\theta t)$ в ряд, находим:

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(i\zeta\theta y^{\frac{1}{c}}\right)^k}{k!}y^{\frac{b}{c}-1}\exp(-y)dy=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(i\zeta\theta)^k}{k!}\int_0^{+\infty}y^{\frac{b+k}{c}-1}\exp(-y)dy=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{b+k}{c}\right)}{k!}(i\zeta\theta)^k.$$

Статистическая оценка параметров. Статистическая оценка параметров распределения может быть выполнена методом моментов, при котором параметры распределения находятся из условия равенства теоретических и статистических моментов. Метод моментов требует решения достаточно сложной системы уравнений, а также проверки соответствия полученной функции статистическим данным с помощью критериев согласия и не гарантирует единственности решения.

Выполним статистическую оценку параметров распределения случайной величины, заданной функцией плотности (5), методом наибольшего правдоподобия [18].

Пусть имеется некоторая выборка $X = =(x_1, x_2, ..., x_n)$ генеральной совокупности случайной величины ξ, у которой есть функция плотности распределения (5). Рассмотрим функцию правдоподобия

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}\right\}. \quad (13)$$

Прологарифмировав данную функцию, получим функцию

$$L_n = LnL = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\frac{|c|}{\theta} - \ln\Gamma\left(\frac{b}{c}\right) + (b-1)\ln\frac{x_i}{\theta} - \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}\right] =$$

$$= n\left[\ln\frac{|c|}{\theta} - \ln\Gamma\left(\frac{b}{c}\right) + (b-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}\right]$$

и найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial L_n}{\partial\theta} = -\frac{nb}{\theta} + \frac{c}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial b} = -\frac{n}{c}\psi\left(\frac{b}{c}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial c} = \frac{n}{c} + \frac{nb}{c^2}\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}\ln\frac{x_i}{\theta}. \quad (16)$$

Применим необходимое условие экстремума функции многих переменных, приравняем найденные частные производные к нулю и получим уравнения правдоподобия для определения статистических оценок параметров распределения:

$$b - \frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c} = 0; \quad (17)$$

$$\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta} = 0; \quad (18)$$

$$\frac{1}{c} + \frac{b}{c^2}\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}\ln\frac{x_i}{\theta} = 0. \quad (19)$$

Решение уравнений (17)–(19) дает статистическую оценку параметров исследуемого распределения (5).

Оценка наибольшего правдоподобия для параметра масштаба θ выражается в явном виде при известных b и c:

$$\theta = \left(\frac{c}{nb}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,c}\right)^{\frac{1}{c}}. \quad (20)$$

Условия существования и свойства статистических оценок определяются выполнением условий регулярности [19], основным из которых является знакоположительность матрицы информации Фишера для параметров b и c:

$$I_n(b,c) = -E\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_n}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 L_n}{\partial b\partial c} \\ \frac{\partial^2 L_n}{\partial c\partial b} & \frac{\partial^2 L_n}{\partial c^2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Вычислим производные второго порядка прологарифмированной функции правдоподобия L_n, обозначим $b / c = k$ и получим:

$$\frac{\partial^2 L_n}{\partial b^2} = -\frac{n}{c^2}\psi'\left(\frac{b}{c}\right) = -\frac{n}{c^2}\psi'(k);$$

$$\frac{\partial^2 L_n}{\partial b\partial c} = \frac{n}{c^2}\psi\left(\frac{b}{c}\right) + \frac{nb}{c^3}\psi'\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{n}{c^2}[\psi(k) + k\psi'(k)];$$

$$\frac{\partial^2 L_n}{\partial b\partial c} = \frac{n}{c^2}[\psi(k) + k\psi'(k)];$$

$$\frac{\partial^2 L_n}{\partial c^2} = -\frac{n}{c^2} - \frac{2nb}{c^3}\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{nb^2}{c^4}\psi'\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}\ln^2\frac{x_i}{\theta} =$$

$$= -\frac{n}{c^2} - \frac{2nk}{c^2}\psi(k) - \frac{nk^2}{c^2}\psi'(k) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}\ln^2\frac{x_i}{\theta}.$$

Математическое ожидание величин, не зависящих от переменных x_i, равно этим величинам. Оценки максимального правдоподобия удовлетворяют условиям регулярности. При этих условиях элементы матрицы информации Фишера равны для независимых случайных величин.

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{c}\ln^2\frac{x_i}{\theta}\right) = nE\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^{c}\ln^2\frac{x}{\theta}\right) =$$

$$= \frac{nc}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{c}\ln^2\left(\frac{x}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{c}\right\}d\left(\frac{x}{\theta}\right) =$$

$$= \frac{nc}{\Gamma(k)}\int_0^{+\infty}t^{c+b-1}\ln^2 t\exp\left\{-t^c\right\}dt = \left|t^c = z\right| =$$

$$= \frac{n}{\Gamma(k)}\int_0^{+\infty}z^k\ln^2 z\exp(-z)dt = \frac{n}{\Gamma(k)}\frac{\partial^2\Gamma(k+1)}{\partial b^2} =$$

$$= \frac{n\Gamma''(k+1)}{c^2\Gamma(k)} = \frac{nk\Gamma''(k+1)}{c^2\Gamma(k+1)} =$$

$$= \frac{nk}{c^2}[\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)].$$

$$I_n(k,c) = \frac{n}{c^2}\begin{bmatrix} \psi'(k) & -[\psi(k) + k\psi'(k)] \\ -[\psi(k) + k\psi'(k)] & D \end{bmatrix},$$

где

$$D = 1 + 2k\psi(k) + k^2\psi'(k) + k[\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)].$$

Рассмотрим матрицу

$$I(k) = \begin{bmatrix} \psi'(k) & -[\psi(k) + k\psi'(k)] \\ -[\psi(k) + k\psi'(k)] & D \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Логарифмическая производная $\psi(k)$ гамма-функции монотонно возрастает, непрерывна на интервале $(0, +\infty)$ и принимает значения в пределах $(-\infty, +\infty)$ [17]. Поэтому $\psi'(k)$ принимает положительные значения на интервале $(0, +\infty)$.

Определитель матрицы (22) в общем виде

$$\det I(k) = \psi'(k)D - [\psi(k) + k\psi'(k)]^2. \qquad (23)$$

График значений определителя матрицы (23), полученный численными методами (рис. 3), показывает, что он принимает положительные значения при $k > 0$.

Матрица (22) будет знакоположительной.

Матрица информации Фишера $I_n(k,c)$ отличается от матрицы (22) на положительный множитель и также будет знакоположительной.

Решение уравнений (17)–(19) дает статистическую оценку параметров распределения (5), для которых будут выполнятся условия регулярности [19].

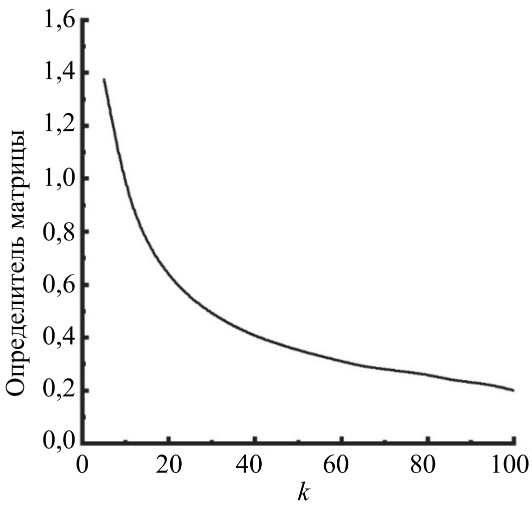

Рис. 3. График значений определителя матрицы (22)

Данные оценки являются состоятельными, асимптотически несмещенными, эффективными, асимптотически нормальными и ассимптотически эффективными [19]. При условии эффективности оценок система (17)–(19) имеет единственное решение [18].

Применение обобщенного гамма-распределения к описанию частиц дробления. Если предположить, что плотность распределения количества частиц от их диаметра описывается зависимостью (5), тогда плотность распределения величины порядка ξ^k [4]

$$f_k(x) = A_k x^k f(x) = A_k \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b+k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\}.$$

Коэффициент A_k находим их условия нормирования

$$\int_0^{+\infty} f_k(x)\,dx = 1$$

и получим

$$f_k(x) = \frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\dfrac{b+k}{c}\right)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b+k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\}. \qquad (24)$$

Последняя зависимость описывает плотность распределения количества (к = 0), размеров (к = 1), поверхностей (к = 2) и объемов (к = 3) частиц дробления.

Рассмотрим распределение частиц дробления топлива дизельными форсунками [6] (таблица).

Характеристики распыливания топлива

№ группы	Размер капель в группе, мкм	Средний размер δ_i, мкм	Количество капель n_i	$n_i\,\delta_i \cdot 10^{-4}$
1	8,33–16,66	12,5	690	0,863
2	16,66–25,00	20,8	889	1,849
3	25,00–33,33	29,1	985	2,866
4	33,33–41,66	37,5	846	3,172
5	41,66–50,00	45,8	624	2,858
6	50,00–58,33	54,1	412	2,229
7	58,33–66,66	62,5	324	2,025
8	66,66–75,00	70,8	210	1,487
9	75,00–83,33	79,1	110	0,87
10	83,33–91,66	87,5	47	0,411
11	91,66–100,00	95,8	27	0,259
12	100,00–108,33	104,1	16	0,167
13	108,33–116,66	112,5	3	0,034
Сумма		812,1	5183	19,09

Данную выборку опишем различными законами распределения.

Вычислим параметры логарифмически нормального закона распределения [2]. Логарифм среднего значения элементов выборки и среднеквадратическое отклонение логарифмов элементов выборки от среднего значения их логарифмов: $\ln\bar{\delta} = 3{,}472$; $\ln\sigma = 0{,}533$.

Распределение Вейбула – Гнеденко [5] представим в виде

$$F(\delta) = 1 - e^{-\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^c}.$$

За параметр масштаба примем среднее выборочное значение:

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \delta_i.$$

Для данной выборки получим $\theta = 36{,}831$.

Параметр c = 1,557 находим методом наибольшего правдоподобия по формулам (18), (19), при условии $b = c$.

Для обобщенного гамма-распределения за параметр масштаба примем средне выборочное значение $\theta = 36{,}831$. Методом наибольшего правдоподобия по формулам (18), (19) находим значения параметров: $b = 2{,}304$ и $c = 1{,}874$.

Полученные значения параметров позволяют сравнить функции распределения различных законов (рис. 4).

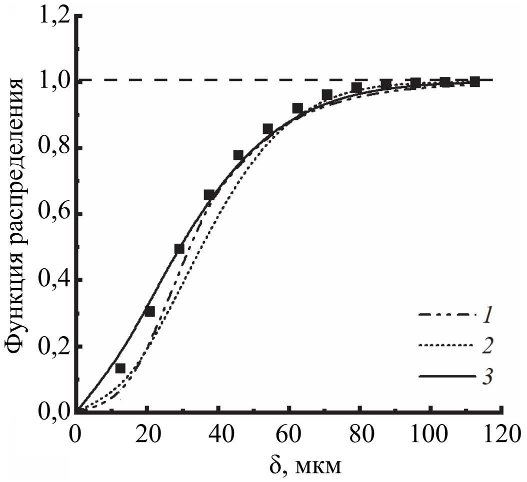

Рис. 4. Функции распределения дисперсного состава топлива:
1 – Вейбулла – Гнеденко;
2 – обобщенное Гамма-распределение;
3 – логарифмически нормальный закон

Рассматриваемые законы распределения (рис. 4) достаточно точно описывают исследуемую выборку (таблица).

Обобщенное гамма-распределение является наиболее удобным в силу своей универсальности. Находим основные характеристики этого распределения: математическое ожидание – 37,291; дисперсия – 344,025; ассиметрия – 0,636; эксцесс – 0,308.

По формуле (24) могут быть найдены плотности распределения размеров, поверхностей, объемов и их средние характеристики (1).

Заключение. Обобщенное гамма-распределение имеет широкую область применения в силу своей универсальности. Но его использование ограничивалось отсутствием способов достоверной оценки параметров на основании статистических данных.

Предложенный метод наибольшего правдоподобия, полученные уравнения (17)–(19), знакоположительность матрицы информации Фишера позволяют получить состоятельные, ассимптотически эффективные статистические оценки параметров распределения, что доказывают их единственность.

Данное распределение даст возможность находить все характеристики, необходимые для исследования различных физических процессов.

Список литературы

1. Распыливание жидкостей / Ю. Ф. Дитякин [и др.]. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.

2. Разумовский Н. К. Характер распределения содержаний металла в рудных месторождениях // Доклады АН СССР. 1940. Т. 28. С. 55–57.

3. Колмогоров А. Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // Доклады АН СССР. 1944. Т. 31. С. 99–101.

4. Коузов П. А. Основы анализа дисперсионного состава промышленных пылей и измельченных материалов. Л.: Химия, 1987. 264 с.

5. Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.

6. Лышевский А. С. Процессы распыливания топлива дизельными форсунками. М.: Машгиз, 1963. 180 с.

7. Авдеев Н. Я. Об аналитическом методе расчета седиментометрического анализа. Ростов н/Д: Ростов. гос. ун-т, 1964. 202 с.

8. Шифрин К. С. О вычислении радиационных свойств облаков // Труды ГГО им. А. И. Воейкова, 1955. Вып. 46 (108). С. 5–33.

9. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statistics. 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.

10. Кудрявцев А. А. О представлении гамма-экспоненциального и обобщенного отрицательного биномиального распределений // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 4. С. 76–80.

11. Королев В. Ю., Крылов В. А., Кузьмин В. Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5, вып. 1. С. 31–38.

12. Кудрявцев А. А. Априорное обобщенное гамма-распределение в байесовских моделях баланса // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 3. С. 27–33.

13. Закс Л. М., Королев В. Ю. Обобщенные дисперсионные гамма-распределения как предельные для случайных сумм // Информатика и ее применения. 2013. Т. 7, вып. 1. С. 105–115.

14. Левданский Э. И., Волк А. М., Плехов И. М. О законе распределения частиц при дроблении // ТОХТ. 1986. № 5. С. 672–677.

15. Волк А. М. Обобщенное гамма-распределенние // Актуальные проблемы информатики: сб. тр. VI Междунар. науч. конф., 26–30 окт. 1998 г., Минск: в 3 ч. Минск: БГУ, 1998. Ч. 2. С. 426–432.

16. Джонсон Н. Л., Коц С, Балакришнан Н. Одномерные непрерывные распределения: в 2 ч. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. Ч. 1. 703 с.

17. Янке Е., Эмдэ Ф., Леш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 458 с.

18. Крамер Г. Математические методы статистики: Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Мир, 1975. 648 с.

19. Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 448 с.

References

1. Dityakin Yu. F., Klyachko L. A., Novikov B. V., Yagodkin V. I. *Raspylivaniye zhidkostey* [Spraying liquids]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1977. 208 p. (In Russian).

2. Razumovsky N. K. Character of metal content distribution in ore deposits. *Doklady akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1940, vol. 28, pp. 55–57. (In Russian).

3. Kolmogorov A. N. On the log-normal law of particle size distribution during crushing. *Doklady akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1944, vol. 31, pp. 99–101. (In Russian).

4. Kouzov P. A. *Osnovy analiza dispersionnogo sostava promyshlennykh pyley i izmel'chennykh materialov* [Principles of analysis of variance and composition of industrial dust from grinding materials]. Leningrad, Khimiya Publ., 1987. 264 p. (In Russian).

5. Vadzinsky R. N. *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam* [Handbook on Probability Distributions]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2001. 295 p. (In Russian).

6. Lyshevsky A. S. *Protsessy raspylivaniya topliva dizel'nymi forsunkami* [Fuel atomisation processes by diesel injectors]. Moscow, Mashgiz Publ., 1963. 180 p. (In Russian).

7. Avdeev N. Ya. *Ob analiticheskom metode rascheta sedimentometricheskogo analiza* [About analytical method of calculation of sedimentometric analysis]. Rostov-on-Don, Rostovskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 1964. 202 p. (In Russian).

8. Shifrin K. S. On calculating the radiation properties of clouds. *Trudy GGO imeni. A. I. Voyeykova* [Proceedings of GGO named after A. I. Voyeikov], 1955, vol. 46 (108), pp. 5–33 (In Russian).

9. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution. *Ann. Math. Statistics*, 1962, vol. 33, pp. 1187–1192.

10. Kudryavtsev A. A. On the representation of the gamma exponential and generalized negative binomial distributions. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2019, vol. 13, issue 4, pp. 76–80 (In Russian).

11. Korolev V. Yu., Krylov V. A., Kuzmin V. Yu. Stability of finite mixtures of generalized gamma distributions with respect to perturbations of parameters. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2011, vol. 5, issue 1, pp. 31–38 (In Russian).

12. Kudryavtsev A. A. A priori generalized gamma distribution in Bayesian balance models. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2019, vol. 13, issue 3, pp. 27–33 (In Russian).

13. Zaks L. M., Korolev V. Yu. Generalized dispersion gamma distributions as the limit for random sums. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2013, vol. 7, issue 1, pp. 105–115 (In Russian).

14. Levdanskiy E. I., Volk A. M., Plekhov I. M. On the particle distribution law in crushing. *Tekhnicheskiye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Technical Foundations of Chemical Engineering], 1986, no 5, pp. 672–677 (In Russian).

15. Volk A. M. Generalized Gamma-distribution. *Aktual'nyye problemy informatiki*: *sb. trudov VI Mezhdunarodnoy nauchnoy konferetsii. 26–30 okt. 1998* [Actual problems of informatics: collection of works of the VI International scientific conference. In 3 parts. Part 2]. Minsk, 1998, pp. 426–432 (In Russian).

16. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. *Odnomernyye nepreryvnyye raspredeleniya* [One-dimensional continuous distributions. In 2 parts. Part 1]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 2010. 703 p. (In Russian).

17. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nyye funktsii: formuly, grafiki, tablitsy* [Special functions: formulas, graphs, tables]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 458 p. (In Russian).

18. Kramer G. *Matematicheskiye metody statistiki: Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh* [Mathematical Methods of Statistics: Basics of modeling and primary data processing]. Moscow, Mir Pupl., 1975. 648 p. (In Russian).

19. Lehman E. *Teoriya tochechnogo otsenivaniya* [The theory of point estimation]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. Publ., 1991. 448 p. (In Russian).

Информация об авторе

Волк Анатолий Матвеевич − кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

Information about the author

Volk Anatoliy Matveevich − PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

Поступила после доработки 17.04.2023