ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.948

С. В. Пономарева[1], О. Н. Пыжкова[2], Г. С. Ромащенко[1]
[1]Белорусский государственный университет
[2]Белорусский государственный технологический университет

ПРОБЛЕМА ВЫБОРА ВИДА ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются разные неэквивалентные определения операций дробного интегрирования (дробного дифференцирования), предложенные Вейлем, Риманом – Лиувиллем, Адамаром, Грюнвальдом – Летниковым, Маршо. Выбор конструкции дробного интеграла (дробной производной) обусловлен удобством решения конкретной задачи и приводит к появлению важных свойств на классах некоторых функций. С другой стороны, зачастую конструкция приводит и к определенным «недостаткам», которые описаны в работе. Показано, что на множестве периодических функций, суммируемых с p-й степенью, данные определения эквивалентны.

Ключевые слова: дробные производные, оператор дробного интегрирования, периодические функции.

Для цитирования: Пономарева С. В., Пыжкова О. Н., Ромащенко Г. С. Проблема выбора вида производных дробного порядка для периодических функций // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 5–8. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-1.

S. V. Ponomareva[1], O. N. Pyzhkova[2], G. S. Romashchenko[1]
[1]Belarusian State University
[2]Belarusian State Technological University

THE PROBLEM OF CHOOSING THE TYPE OF DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDER FOR PERIODIC FUNCTIONS

Various non-equivalent definitions of fractional integration (fractional differentiation) operations proposed by Weil, Riemann – Liouville, Hadamard, Grunwald – Letnikov, Marchaux are considered. The choice of the construction of a fractional integral (fractional derivative) is due to the convenience of solving a specific problem and leads to the appearance of important properties on the classes of some functions. On the other hand, the design often leads to certain «disadvantages», which are described in the work. It is shown that on the set of periodic functions summable to the pth power, these definitions are equivalent.

Keywords: fractional derivative, integral operator of fractional order, periodic functions.

For citation: Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N., Romashchenko G. S. The problem of choosing the type of derivatives of fractional order for periodic functions. *Proceedings of BSTU*, *issue* 3, *Physics and Mathematics*. *Informatics*, 2023, no. 2 (272), pp. 5–8. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-1 (In Russian).

Введение. Данная работа продолжает обсуждение темы дробного интегродифференцирования периодических функций (см. [1]).

Существует множество различных (и неэквивалентных) определений дробных производных (Римана – Лиувилля, Адамара, Грюнвальда – Летникова, Вейля, Капуто – Герасимова и других, см., например, [2], [3], [4]). Поэтому, в зависимости от решаемой проблемы, возникает вопрос выбора наиболее подходящей по определенным критериям конструкции дробного интеграла (или производной).

Основная часть. Для периодических функций в теории тригонометрических рядов наиболее подходящим выбором видится конструкция Г. Вейля, так как при таком подходе к производным и интегралам нецелого порядка сохраняется важнейшее свойство таких функций – их периодичность.

Пусть $x(t)$ является 2π-периодической функцией с нулевым средним значением по периоду $\int_0^{2\pi} x(t)dt = 0$. Другими словами, функция $x(t)$ может быть разложена в ряд Фурье. С учетом свойств свертки Фурье определение интеграла дробного порядка в форме Вейля для периодических функций выглядит следующим образом:

$$I_{\pm}^{(\alpha)} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t-s) \Psi_{\pm}^{(\alpha)}(s) ds, \quad \alpha > 0,$$

где

$$\Psi_{\pm}^{(\alpha)}(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi / 2)}{k^{\alpha}}.$$

Дробная производная по Вейлю при $0 < \alpha < 1$ определяется равенством

$$D_{\pm}^{(\alpha)} x = \pm \frac{d}{dt} I_{\pm}^{(1-\alpha)} x. \qquad (1)$$

При этом производные и интегралы дробного порядка в форме Вейля не являются взаимно обратными и в общем случае не обладают полугрупповым свойством.

Этими «хорошими» свойствами обладает другая форма интегралов и производных в виде Римана – Лиувилля. Для дробных интегралов в форме Римана – Лиувилля выполняется, в частности, полугрупповое свойство (а в определенных функциональных пространствах и при чисто комплексном порядке интегрирования операторы дробного интегродифференцирования Римана – Лиувилля даже образуют однопараметрическую сильно непрерывную в операторной топологии группу (см. [5])). Для лиувиллевой формы дробных производных выполняется также замечательное свойство равенства с «обычной» производной при целых значениях порядка интегрирования и другие, позволяющие использовать эту конструкцию при решении многих сложных прикладных задач физики, биологии, теории управления и т. д. (см. [2], [3], [4]), которые невозможно решить средствами обычного интегродифференцирования.

Интеграл и производная дробного порядка Римана – Лиувилля для $0 < \alpha < 1$ определяется равенствами (см. [2]):

$$I^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{x(s)\, ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

$$D^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t} \frac{x(s)\, ds}{(t-s)^{\alpha}} \right), \qquad (2)$$

где Γ – гамма-функция Эйлера; α – порядок интегрирования (дифференцирования), а интеграл понимается как условно сходящийся:

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{x(s)\, ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \int_{t-2\pi n}^{t} \frac{x(s)\, ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

Сходимость интеграла для периодических функций следует из равенства нулю в среднем по периоду.

Но есть у дробных производных Римана – Лиувилля особенность – неравенство нулю от константы при нецелых порядках дифференцирования. Этого «недостатка» лишена производная в форме Маршо, определяемой следующим равенством:

$$D_{+}^{\alpha} x(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x(t) - x(t-s)}{s^{1+\alpha}} ds. \qquad (3)$$

Существует еще один подход к дробному интегродифференцированию – разностный. Этот подход предложенный еще А. Грюнвальдом и А. В. Летниковым в 1867–1868 гг. (см [3]), привлекателен с точки зрения удобства в приближенных вычислениях.

Еще одним преимуществом разностного подхода к определению дробных производных является также относительная простота вычислений. Так, вычислить дробную производную Римана – Лиувилля, Вейля или Маршо очень непросто даже для простых тригонометрических функций типа синус, не говоря уже о комбинации. Более того, конкретные численные значения таких производных все равно оказываются вычисленными приближенно из-за представления точных решений через специальные функции.

Разностный подход широко известен в решении дифференциальных уравнений целых порядков, однако теперь нужно определять конечные разности дробного порядка (см. [2]).

Для функции $x(t)$, заданной на всей прямой, положим

$$\left(\Delta_h^\alpha x\right)(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}x(t-kh),\quad \alpha>0, \quad (4)$$

где $\binom{\alpha}{k}=\dfrac{(-1)^{k-1}\alpha\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}$ – биномиальные коэффициенты; Γ – гамма-функция Эйлера; α – порядок интегрирования (дифференцирования).

Разность (4) называют левосторонней, если $h>0$, и правосторонней, если $h<0$. Заметим, что разность (4) не определена при $\alpha<0$.

Дробной производной Грюнвальда – Летникова функции $x(t)$ порядка α называют функцию

$$x^{(\alpha)}(t)=\lim_{h\to+0}\frac{\left(\Delta_h^\alpha x\right)(t)}{h^\alpha},\quad \alpha>0, \quad (5)$$

где предел может рассматриваться в зависимости от изучаемых вопросов поточечный, почти всюду или по норме пространства (в этом случае речь идет о сильной производной).

Симметрично вводится также дробное дифференцирование при $0<\alpha<1$ в форме Грюнвальда – Летникова – Рисса (так как для 2π-периодических функций совпадает с операцией, обратной риссову потенциалу):

$$x^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}\lim_{h\to+0}\frac{\left(\Delta_h^\alpha x\right)(t)+\left(\Delta_{-h}^\alpha x\right)(t)}{|h|^\alpha},$$
$$\alpha>0. \quad (6)$$

Производная Грюнвальда – Летникова совпадает с производной Маршо (см. [2]) для 2π-периодических функций из $L_p(0,2\pi), 1<p<\infty$. Также для того же функционального класса доказано совпадение вейлевской и лиувиллевской производных дробного порядка.

Обобщая вышесказанное, а также обращаясь к [2] и [3], приходим к выводу, что производная в форме Грюнвальда – Летникова совпадает для 2π-периодических с нулевым средним значением по периоду, заданных на всей прямой функций из $L_p(0,2\pi), 1<p<\infty$ также с лиувиллевской производной дробного порядка. Вначале рассмотрим случай для порядка дифференцирования $0<\alpha<1$. Для нецелых порядков $\alpha>1$ понадобятся некоторые дополнительные условия.

Для указанного класса функций выполняется следующая **теорема.**

Пусть $x(t)$ *–* 2π*-периодическая функция с нулевым средним значением по периоду,* $x(t)\in L_p(0,2\pi)$, $1<p<\infty$, $0<\alpha<1$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) для $x(t)$ *существует дробная производная порядка* α *Грюнвальда – Летникова (5);*

2) для $x(t)$ *существует дробная производная Вейля (1) порядка* α*;*

3) для $x(t)$ *существует дробная производная Маршо (3) порядка* α*;*

4) для $x(t)$ *существует дробная производная Римана – Лиувилля (2) порядка* α *по всей прямой.*

И все эти производные равны между собой в каждой точке, т. е.

$$x^{(\alpha)}(t)=\lim_{h\to+0}\frac{\left(\Delta_h^\alpha x\right)(t)}{h^\alpha}=\frac{1}{2\pi}\left(\pm\frac{d}{dt}\right)\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}x(t-s)\Psi_\pm^{(1-\alpha)}(s)ds=$$
$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{x(t)-x(t-s)}{s^{1+\alpha}}ds=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_{-\infty}^{t}\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^\alpha},\quad 0<\alpha<1,$$

где $\Psi_\pm^{(\alpha)}(t)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos(kt\mp\alpha\pi/2)}{k^\alpha}$, *а интеграл понимается как условно сходящийся*:

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\int_{t-2\pi n}^{t}\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

Эквивалентность $4)\Leftrightarrow 2)$ прямо следует из леммы 19.3 (см. [2]), доказанной для $x(t)\in L_1(0,2\pi)$, так как для лебеговых пространств известно вложение

$$1\le p\le q\le\infty,\ \Rightarrow L_q\subset L_p.$$

Эквивалентность $3)\Leftrightarrow 2)$ следует из принадлежности $x(t)\in H_\lambda^p$, $\lambda>\alpha$ (а эта принадлежность, очевидно, следует из условия $\int_0^{2\pi}x(t)dt=0$).

Эквивалентность $1)\Leftrightarrow 3)$ для 2π–периодических функций доказана в [2, теорема 20.2]

Таким образом, для определенных классов функций можно в некотором смысле произвольно выбирать форму дробного интегрирования, в зависимости от задачи и предпочтений исполнителя.

Заметим, что все вышесказанное выполняется для периодической функции со средним значением по периоду $\int_0^{2\pi}x(t)dt=a$, не равным нулю, после линейной замены $s=t-a$, а также длиной периода, не обязательно равной 2π.

Представляет интерес расширение полученных утверждений на почти периодические функции ввиду широкого применения такого класса функций в прикладных дифференциальных уравнениях с почти периодическими коэффициентами, а также на функции с нулевым пределом Банаха – Мазура.

Заключение. Рассмотрены различные определения операций дробного дифференцирования и интегрирования, указаны различия определений. Сформулирована и доказана теорема об эквивалентности этих определений на классе периодических функций, суммируемых с p-й степенью $(1 < p < \infty)$.

Список литературы

1. Пономарева С. В., Пыжкова О. Н. К вопросу о дробных производных Вейля // Материалы 85-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 1–13 февр. 2021 г. Минск, 2021. С. 143–145.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
3. Oldham K. and Spanier J. The Fractional Calculus. New York; London; Academic Press, 1974. 234 p.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam: Elsevier Science B. V., 2006. 523 p.
5. Пономарева С. В., Пыжкова О. Н., Яблонская Н. Б. Полугрупповые свойства операторов интегрирования дробного порядка Римана – Лиувилля // Физико-математические науки: тез. 83-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 4–15 февр. 2019 г. Минск, 2019. С. 48.

References

1. Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N. On the question of fractional Weyl derivatives. *Materialy 85-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodavat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunar. uchastiem)* [Materials of the 85th scientific and technical conference of the teaching staff, researchers and postgraduate students (with international participation)]. Minsk, 2021, pp. 143–145 (In Russian).
2. Samko S. G, Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p. (In Russian).
3. ldham K. and Spanier J. The Fractional Calculus. New York, London, Academic Press Publ., 1974. 234 p.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam, Elsevier Science B. V. Publ., 2006, 523 p.
5. Ponomareva S. V., Pyzhkova O. N., Yablonskaya N. B. Semigroup Properties of Riemann-Liouville Fractional Order Integration Operators. *Fiziko-matematicheskiye nauki: tez. 83-y nauch.-tekhn. konf. prof.-prepodavat. sostava*, *nauch. sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunar. uchastiem)* [Materials of the 83th scientific and technical. conferences of faculty, researchers and graduate students (with international participation)]. Minsk, 2019, p. 48 (In Russian).

Информация об авторах

Пономарева Светлана Владимировна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики. Белорусский государственный университет (220050, г. Минск, пр. Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: demyanko@bsu.by

Пыжкова Ольга Николаевна − кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Ромащенко Галина Станиславовна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики. Белорусский государственный университет (220050, г. Минск, пр. Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: gal.romash@gmail.com

Information about the authors

Ponomareva Svetlana Vladamirovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Functional Analysis and Analytical Economics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demyanko@bsu.by

Pyzhkova Olga Nikolaevna − PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Romashchenko Galyna Stanislavovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Functional Analysis and Analytical Economics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gal.romash@gmail.com

Поступила после доработки 15.03.2023