

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**В. Г. Матыс, А. А. Черник**

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

**Лабораторный практикум для студентов специальности  
1-48 01 04 «Технология электрохимических производств»**

Минск 2023

УДК 544.6.018.2(076.5)(075.8)

ББК 24.57я73

М34

Рассмотрен и рекомендован к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета.

**Р е ц е н з е н т ы :**

доцент кафедры электронной техники и технологии  
учреждения образования «Белорусский государственный  
университет информатики и радиоэлектроники»  
кандидат технических наук *И. В. Бычек*  
ведущий научный сотрудник НИИ ФХП Белорусского  
государственного университета доцент,  
кандидат химических наук *С. М. Бутрим*

**Матыс, В. Г.**

М34      Моделирование и оптимизация электрохимических процес-  
сов: лаб. практикум для студентов специальности 1-48 01 04  
«Технология электрохимических производств» / В. Г. Матыс,  
А. А. Черник. – Минск : БГТУ, 2023. – 137 с.  
ISBN 978-985-897-101-4.

В издание включены лабораторные работы по построению вероятностно-статистических и физико-химических моделей простейших физико-химических систем в области технологии электрохимических производств. Описаны методики проведения работ, варианты заданий, требования к результатам и их оформлению, а также даны вопросы и задания для допуска к работе и защиты работы.

Пособие предназначено для студентов специальности «Технология электрохимических производств» с целью выполнения лабораторных работ по дисциплине «Моделирование и оптимизация химико-технологических процессов в отрасли».

**УДК 544.6.018.2(076.5)(075.8)**

**ББК 24.57я73**

**ISBN 978-985-897-101-4**

© УО «Белорусский государственный  
технологический университет», 2023

© Матыс В. Г., Черник А. А., 2023

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Раздел 1. Основы работы в системе автоматизированного проектирования «MathCad» .....	6
Лабораторная работа. Основы работы в системе MathCad .....	7
Раздел. 2. Эмпирические, вероятностно-статистические модели .....	22
2.1. Элементы корреляционного анализа .....	22
Лабораторная работа 2.1.1. Обработка мнений специалистов .....	22
Лабораторная работа 2.1.2. Корреляционный анализ.....	34
2.2. Основы регрессионного анализа. ....	40
Лабораторная работа 2.2.1. Однофакторный регрессионный анализ.....	41
Лабораторная работа 2.2.2. Многофакторный регрессионный анализ.....	54
Раздел 3. Физико-химические модели. ....	59
3.1. Простые гидравлические системы .....	59
Лабораторная работа 3.1.1. Стационарный режим движения жидкости в гидравлической системе .....	59
Лабораторная работа 3.1.2. Нестационарный режим движения жидкости в гидравлической системе .....	75
3.2. Моделирование гальванических процессов.....	99
Лабораторная работа 3.2.1. Массообменные процессы в системе промывки в гальванотехнике.....	99
Приложение «Интерфейс пользователя САПР MathCad» .....	129
Литература .....	136

## ВВЕДЕНИЕ

Для эффективного совершенствования существующих электрохимических производств, создания новых технологий, автоматизации технологических процессов инженеры-технологи в области электрохимических производств должны обладать прочными знаниями основ моделирования технологических процессов и навыками использования систем автоматизированного проектирования для построения различных математических моделей процессов. Лабораторный практикум по дисциплине «Моделирование и оптимизация химико-технологических процессов в отрасли» позволит будущему инженеру изучить основы построения математических моделей.

Объектами моделирования в области технологии электрохимических производств являются: химические источники тока, печатные платы и микросхемы, технологические процессы подготовки металлической поверхности перед нанесением металлических и неметаллических покрытий; химические и электрохимические методы водоподготовки и очистки сточных вод на предприятиях по производству печатных плат и микросхем, на металлургических заводах и предприятиях машино-, приборо-, автомобилестроения; технологические процессы нанесения металлических и оксидных покрытий электрохимическими и химическими методами; установки и аппараты для проведения электрохимических и химических процессов; приборы и методы исследования свойств наносимых покрытий в производственно-коммерческих, научно-исследовательских и образовательных учреждениях.

В данном практикуме для построения математических моделей используется система автоматизированного проектирования MathCad. Это одна из наиболее популярных и старейших систем, которая отличается в то же время простотой освоения в отличие от других, возможно, более продвинутых систем.

При выполнении лабораторных работ по построению эмпирических и физико-химических моделей студентам необходимо использовать тексты лекций по данной дисциплине (Матыс В. Г., 2019).

**Порядок выполнения лабораторных работ.** При выполнении лабораторных работ студенты используют систему MathCad обычно версии 14 или 15, которые установлены в компьютерных классах. Возможно использование систем MathCad, установленных на собственные

компьютеры или ноутбуки студентов. Документы MathCad с расчетами студенты сохраняют в своей папке, которая создается в специально отведенном месте на диске (обычно диск «D:\»), но не диск «C:\»). После окончания занятий желательно рабочие документы сохранять на собственном носителе информации либо в системе дистанционного обучения (СДО) БГТУ.

Преподаватель в начале семестра регистрирует группу студентов, изучающих данную дисциплину, в системе СДО на курс под названием «Моделирование и оптимизация химико-технологических процессов в отрасли». Студенты в этом курсе могут найти для каждой лабораторной работы элемент «задание» (в системе Moodle) с названием «результаты...». Этот элемент представляет собой папку, куда студенты могут сохранять как текущие рабочие документы, так и окончательные документы MathCad с выполненными расчетами и отчеты о лабораторной работе.

**Требования к отчету о лабораторной работе.** В отчете кроме расчетов должны присутствовать следующие обязательные элементы:

- название работы;
- фамилия и имя студента, группа и факультет;
- цель работы;
- теоретические основы работы (формулы, используемые для расчетов с их расшифровкой, описание методов решения той или иной задачи и др.);
- задание по лабораторной работе (формулировки конкретного варианта задания);
- расчеты с необходимыми комментариями;
- выводы как по частям работы, так и в целом по работе.

Последняя часть представляет собой заключение в целом по работе, если в ней только один важнейший результат, или выводы – если результатов несколько. Заключение и выводы должны быть сформулированы логически четко и ясно.

Отчеты о лабораторной работе можно оформить в разных системах: Microsoft Word, в виде pdf-файла, MathCad и др. Отчет должен быть представлен для защиты как на цифровом, так и на бумажном носителе.

# ОСНОВЫ РАБОТЫ В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ «MATHCAD»

Компьютерная программа «MathCad» впервые была представлена в 1986 г. для компьютеров, работавших под операционной системой DOS. Более поздние версии создавались под новые операционные системы. В настоящее время программа имеет интуитивный и простой для использования интерфейс пользователя. Для ввода формул и данных можно использовать как клавиатуру, так и специальные панели инструментов. Работа осуществляется в пределах рабочего листа, на котором уравнения и выражения отображаются графически. При создании документов используется принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get — «что видишь, то и получаешь»).

Программа «MathCad» содержит сотни операторов и встроенных функций для решения различных технических задач. Она позволяет выполнять численные и символьные вычисления, производить операции со скалярными величинами, векторами и матрицами, автоматически переводить одни единицы измерения в другие. Перечень возможностей системы включает в себя:

- аналитическое и численное решение дифференциальных уравнений;
- построение двумерных и трехмерных графиков функций;
- использование греческого алфавита в уравнениях и в тексте;
- символьные вычисления;
- операции с векторами и матрицами;
- аппроксимация кривых;
- разработка вычислительных подпрограмм пользователя;
- поиск корней многочленов и функций;
- проведение статистических расчетов и работа с функциями важнейших статистических распределений;
- вычисления с единицами измерения;
- интеграция с САПР-системами, использование результатов вычислений в качестве управляющих параметров.

С помощью программы «MathCad» инженеры могут документировать все вычисления в процессе их проведения. Систему особенно удобно использовать для обучения вычислениям и инженерным расчетам. Описание работы с системой дано в приложении.

Наиболее важными для решения задач моделирования операциями, которые должны уметь выполнять студенты в системе MathCad, являются: операции простых вычислений, решение уравнений и их систем, создание и использование функций пользователя, построение графиков, разработка и использование вычислительных подпрограмм пользователя.

## Лабораторная работа

### ОСНОВЫ РАБОТЫ В СИСТЕМЕ MATHCAD

**Цель работы:** усвоение основ работы в системе MathCad, векторных и матричных вычислений, решения уравнений и систем уравнений и приемов построения графиков.

Для выполнения заданий студенты могут использовать электронный учебник, который представлен в СДО БГТУ и справочную систему MathCad.

#### Варианты заданий



##### Вариант 1

1. Вычислите для каждого значения  $x = \{1, 5, 7\}$  следующие выражения:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad y = \frac{\operatorname{arctg}^2(x)}{2}.$$

Рекомендуется использовать операцию векторизации (панель инструментов *MathPalette*, *Матрица*). Измените количество значащих цифр, выводимых на экран после десятичной точки, на 6.

2. Решите двумя способами (матричным и с помощью функции *lsolve*) систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x + y - 3z = 1, \\ y - x + 5z = 1. \end{cases}$$

Информацию по использованию функции *lsolve* найдите в справочной системе MathCad.

3. Определите функцию пользователя

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) - 1.$$

Постройте график этой функции.

4. Выполните следующие матричные операции:

а) задайте вектор  $V1$ , состоящий из трех элементов  $\{2, 3, 1\}$ , и вектор  $V2 = \{4, 1, 7\}$ .

б) вычислите матричные выражения:  $V1 \cdot 3$ ,  $V1 - V2$ ,  $V1 \cdot V2$  (скалярное произведение),  $V1 \times V2$  (векторное произведение);

в) просуммируйте элементы  $V1$ , транспонируйте вектор  $V2$ , вычислите норму вектора  $V1$ ;

г) используя операцию векторизации, вычислите  $\sin(V1)$  и посчитайте норму получившегося вектора.

### Вариант 2

1. Вычислите значение плотности тока при перенапряжениях 10, 100 и 500 мВ, используя уравнение Фольмера, если плотность тока обмена  $i_0 = 0,13 \text{ мА/см}^2$ ;  $\alpha_a = \alpha_k = 0,5$ ;  $z = 2$ ; температура стандартная. При вычислениях исходные данные перенапряжения задайте в виде вектора, а вычисления проведите с вектором. Укажите единицы измерения всех величин в отчете.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите перенапряжение, при котором плотность тока составит  $100 \text{ мА/см}^2$  согласно уравнению Фольмера и данным из п. 1. При расчетах используйте блок *Given Find* для решения нелинейных уравнений и систем уравнений. Справку по использованию блока *Given Find* найдите в справочной системе MathCad или электронном учебнике.

3. Определите функцию зависимости диффузионного перенапряжения от плотности тока, приняв  $i_{lim} = 0,5 \text{ мА/см}^2$  (предельная диффузионная плотность тока);  $z = 2$ ; температура – стандартная. Постройте график этой функции.

4. Постройте трехмерный график поверхности сферы. Параметрическое представление сферы с центром в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + R \sin \theta \cos \varphi, \\ y = y_0 + R \sin \theta \sin \varphi, \\ z = z_0 + R \cos \theta, \end{cases}$$

где  $\theta \in [0, \dots, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, \dots, 2\pi]$ . Примите радиус сферы равным 10, а центр расположите в точке  $(10, 10, 10)$ .



### Вариант 3

1. Вычислите значение плотности предельного диффузионного тока восстановления ионов некоторого двухвалентного металла через 5, 10 и 100 с после начала процесса, используя уравнение Коттреля, если коэффициент диффузии ионов  $D = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$ , концентрация –  $C = 0,1$  моль/л, температура – стандартная. Исходные данные о времени введите в MathCad в виде вектора, а расчет проведите с использованием этого вектора. Укажите единицы измерения для полученных значений плотности тока.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите время, при котором плотность предельного диффузионного тока согласно уравнению Коттреля составит  $1 \text{ мкА}/\text{см}^2$ . Используйте данные из п. 1.

3. Определите функцию зависимости плотности тока от перенапряжения согласно теории замедленного разряда (уравнение Фольмера) при плотности тока обмена, равной  $0,01 \text{ мА}/\text{см}^2$ . Коэффициенты переноса анодной и катодной реакции примите равными  $0,5$ , а число электронов, участвующих в процессе, –  $1$ . Постройте график этой функции.

4. Используя оператор символьного вывода и блок *Given Find*, решите в символьном виде систему уравнений

$$\begin{cases} -400(y - x^2)x - 2b + 2x = 0; \\ 200y - 200x^2 = 0. \end{cases}$$

### Вариант 4

1. Вычислите значение диффузионного перенапряжения при плотностях тока  $1, 2$  и  $3 \text{ мА}/\text{см}^2$ , используя выражение

$$\eta = \frac{RT}{zF} \ln \left( 1 - \frac{i}{i_{\text{lim}}} \right),$$

если плотность предельного диффузионного тока составляет  $4 \text{ мА}/\text{см}^2$ ,  $z = 1$ , а температура – стандартная. Плотности тока представьте в виде вектора, который используйте при вычислениях.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите плотность тока, при которой диффузионное перенапряжение составит «минус»  $100 \text{ мВ}$ . Используйте данные из п. 1.

3. Определите функцию зависимости плотности предельного диффузионного тока от времени согласно уравнению Коттреля. Примите коэффициент диффузии частиц деполяризатора равным  $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$ ,

концентрацию – 0,2 моль/л, а число электронов участвующих в процессе, – 1. Постройте график этой функции.

4. Исследуйте аналитически функцию

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

определите точки максимума и минимума, точки перегиба, постройте графики первой и второй производной этой функции.

### Вариант 5

1. Вычислите значение плотности тока при перенапряжениях 5, 110 и 300 мВ, используя уравнение Фольмера, если плотность тока обмена составляет 2,5 мА/см<sup>2</sup>, коэффициенты переноса анодной и катодной реакции равны по 0,5, число электронов, участвующих в реакции, – 1; температура – стандартная. Используйте при вычислении операцию задания вектора для ввода в MathCad значений перенапряжения. При расчете плотности тока используйте заданный вектор. Укажите единицы измерения физических величин.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите перенапряжение, при котором плотность тока составит 10 мА/см<sup>2</sup> согласно уравнению Фольмера и данным из п. 1. Для решения нелинейного уравнения Фольмера рекомендуется использовать блок *Given Find*, информацию по которому можно найти в справочной системе и в электроном учебнике по MathCad.

3. Определите функцию зависимости диффузионного перенапряжения от плотности тока, приняв плотность предельного диффузионного тока равной 0,033 мА/см<sup>2</sup>, число электронов, участвующих в процессе, – 1; температуру – стандартной. Постройте график этой функции.

4. Найдите решения, если они существуют, систем уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + 3y = 1, \\ 2\sqrt{y} - x^2 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - y = 0, \\ x^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

с помощью блоков *Given Find* и *Given Minner*. Проверьте, все ли решения найдены.

### Вариант 6

1. Вычислите значение плотности предельного диффузионного тока восстановления однозарядных ионов металла через 1, 10 и 100 с после начала процесса, используя уравнение Коттреля, если коэффициент

диффузии ионов составляет  $8 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$ ; концентрация – 0,01 моль/л. При вычислениях исходные данные времени представьте в виде вектора, а расчет проведите с использованием этого вектора. Укажите единицы измерения результата.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите время, при котором плотность предельного диффузионного тока составит  $1 \text{ мА}/\text{см}^2$  согласно уравнению Коттреля и данным из п. 1.

3. Определите функцию зависимости плотности тока от перенапряжения согласно теории замедленного разряда (уравнение Фольмера) для двухэлектронного процесса при плотности тока обмена  $10 \text{ мА}/\text{см}^2$ , коэффициенте переноса 0,5 и стандартной температуре. Постройте график этой функции.

4. Составьте программу, вычисляющую количество зерна, фигурирующего в легенде об изобретателе шахмат. Изобретатель попросил дать ему в награду количество зерна, которое получится, если положить на первую клетку шахматной доски одно зернышко ( $2^{1-1}$ ), на вторую – два зернышка ( $2^{2-1}$ ), на третью – четыре ( $2^{3-1}$ ) и т. д. На каждой последующей клетке зерен в 2 раза больше, чем на предыдущей. Найдите общее число зерен, составляющих награду изобретателя. Вычислите их массу, приняв за массу одного зерна 0,3 г. Переведите полученный результат в тонны.

### Вариант 7

1. Вычислите значения плотности предельного диффузионного тока восстановления ионов  $[\text{Fe}(\text{CN})_6]^{3-}$  на вращающемся дисковом электроде согласно уравнению Левича при скоростях вращения дискового электрода 1000, 3000 и 5000 оборотов в минуту. Коэффициент диффузии ионов примите равным  $1,36 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$ , концентрацию ионов –  $0,001 \text{ моль}/\text{дм}^3$ , кинематическую вязкость раствора –  $0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ . Данные о скорости вращения представьте в MathCad в виде вектора, который применяйте в расчетах.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите, при какой скорости вращения дискового электрода при данных условиях задания из п. 1 плотность тока составит  $1 \text{ мА}/\text{см}^2$ .

3. Определите функцию зависимости плотности предельного диффузионного тока от времени, используя уравнение Коттреля, если коэффициент диффузии разряжающихся частиц равен  $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$ , концентрация – 0,1 моль/л, число электронов, участвующих в реакции, – 2. Постройте график этой функции.

4. Составьте программу-функцию, вычисляющую по заданным длинам сторон треугольника  $a, b, c$  три величины: периметр треугольника –  $P$ , его площадь –  $s$  и радиус вписанной окружности –  $r$ . Для вычисления площади треугольника используйте формулу Герона:

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где  $p$  – полупериметр. Радиус вписанной окружности можно найти по формуле

$$r = \frac{s}{p}.$$

Предусмотрите в программе оценку существования треугольника с заданными длинами сторон и выдачу результата об ошибке, если треугольник с указанными сторонами не существует.

### Вариант 8

1. Вычислите значение равновесного потенциала медного электрода по уравнению Нернста при концентрациях ионов меди: 0,1; 0,2 и 0,5 моль/л. Стандартный потенциал медного электрода равен 0,34 В. Расчет проведите, представив значения концентраций в виде вектора в MathCad.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите, при какой концентрации ионов меди в растворе равновесный потенциал медного электрода будет равен 0 В.

3. Определите функцию зависимости плотности предельного диффузионного тока от скорости вращения дискового электрода:

$$i_d = 0,62zFD^{\frac{2}{3}}\nu^{-\frac{1}{6}}C\omega^{\frac{1}{2}},$$

если коэффициент диффузии разряжающихся на электроде частиц равен  $1,2 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с, концентрация этих частиц – 0,1 моль/л, кинематическая вязкость раствора –  $10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с, число электронов, участвующих в реакции, – 2. Постройте график этой функции.

4. Выполните следующие матричные операции:

а) задайте матрицу  $M$  размерностью  $2 \times 3$ , транспонируйте ее;

б) создайте единичную матрицу  $E$  размерности  $5 \times 5$ , вычислите ее след;

в) создайте две квадратные матрицы  $M1$  и  $M2$  размерностью  $3 \times 3$ , перемножьте их, у полученной матрицы вычислите определитель, выведите на экран второй столбец и поэлементно третью строку;

г) сложите матрицы  $M1$  и  $M2$  (матрица  $MM$ ), для полученной матрицы вычислите  $\exp(MM)$ .

д) объедините матрицу  $MM$  и вектор  $V1$ , отсортируйте полученную матрицу по первым столбцу и строке;

е) вычислите собственные значения любой из введенных матриц размерности  $3 \times 3$ , а также собственный вектор, принадлежащий второму собственному значению.

### Вариант 9

1. Используя уравнение Фольмера, вычислите значение плотности тока при перенапряжениях  $-10$ ,  $-100$  и  $-500$  мВ, если плотность тока обмена составляет  $0,13$  мА/см<sup>2</sup>, коэффициенты переноса анодного и катодного процесса равны по  $0,5$ ; число электронов, участвующих в реакции,  $-2$ , температура – стандартная. При вычислениях необходимо применять векторные операции.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите перенапряжение, при котором плотность тока составит  $200$  мА/см<sup>2</sup> согласно уравнению Фольмера и данным из п. 1. Для решения уравнения используйте блок *Given–Find* в системе MathCad.

3. Определите функцию зависимости плотности предельного диффузионного тока от времени, используя уравнение Коттреля, если коэффициент диффузии разряжающихся частиц равен  $1,5 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с, концентрация –  $0,02$  моль/л, число электронов, участвующих в процессе,  $-2$ . Постройте график этой функции.

4. Найдите корни многочлена

$$y(x) = 2x^3 + 20x^2 - 2x + 100$$

с помощью функций *root* и *polyroots*. Справку по этим функциям можно найти в справочной системе и в электронном учебнике по MathCad.

### Вариант 10

1. Рассчитайте переходное время процесса восстановления ионов  $Pb^{2+}$  по уравнению Санда

$$\tau = \frac{z^2 F^2 \pi D C^2}{4i^2}$$

у поверхности электрода при плотностях тока  $1$ ,  $5$  и  $10$  мА/см<sup>2</sup>, если концентрация ионов в объеме раствора составляет  $1 \cdot 10^{-2}$  моль/дм<sup>3</sup>, коэффициент диффузии равен  $1,16 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с. При расчетах исходные

данные для плотности тока представьте в виде вектора, который используйте при расчете.

2. Применяя средства MathCad для решения уравнений, определите плотность тока, при которой переходное время в условиях задания из п. 1 составит 4 с.

3. Определите функцию зависимости плотности предельного диффузионного тока на вращающемся дисковом электроде от концентрации разряжающихся частиц

$$i_d = 0,62zFD^{3/4}v^{1/4}C\omega^{1/2},$$

если коэффициент диффузии разряжающихся на электроде частиц равен  $1,2 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с, скорость вращения электрода – 1000 об/мин, число электронов, участвующих в реакции, – 2, кинематическая вязкость раствора –  $10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с. Постройте график этой функции.

4. Постройте график функции, заданной явным выражением:

$$f(x) = x(\sin(2x))^2.$$

Используйте для построения графика ранжированную переменную  $x$ , меняющуюся от 0 до 1,5 с шагом 0,1.

### Вариант 11

1. В соответствии с моделью полубесконечной одномерной диффузии в гальваностатических условиях рассчитайте концентрацию ионов  $Pb^{2+}$  у поверхности электрода через 1, 2, 5 с после включения тока. Для расчета используйте уравнение

$$C_s = C_v - \frac{2i}{zF} \sqrt{\frac{t}{\pi D}},$$

где  $C_s$ ,  $C_v$  – концентрации у поверхности и в объеме раствора соответственно. Примите, что концентрация ионов в объеме раствора составляет  $1 \cdot 10^{-2}$  моль/дм<sup>3</sup>, коэффициент диффузии ионов  $Pb^{2+}$  равен  $1,16 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с, плотность тока – 2 мА/см<sup>2</sup>. При расчетах исходные данные для времени представьте в виде вектора, который применяйте при вычислении.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите время, через которое концентрация ионов  $Pb^{2+}$  в условиях задания из п. 1 уменьшится до нуля. Как называется это время?

3. Определите функцию зависимости плотности тока от перенапряжения согласно теории замедленного разряда (уравнение Фольмера)

при плотности тока обмена, равной  $1 \text{ мА/см}^2$ , коэффициенте переноса катодного процесса  $-0,4$  и числе электронов, участвующих в реакции,  $-2$ . Постройте график этой функции.

4. Постройте график функции, заданной явным выражением

$$g(x, y) = x^2 - y^2,$$

где переменные  $x$  и  $y$  меняются от  $-5$  до  $+5$ .

### Вариант 12

1. Вычислите значение потенциала свинцового электрода в гальваностатическом обратимом процессе восстановления ионов  $\text{Pb}^{2+}$  через  $1, 2, 6$  с после включения катодного тока, если стандартный потенциал свинцового электрода равен  $-0,326 \text{ В}$  ( $\text{Ag}|\text{AgCl}$ ), концентрация ионов  $\text{Pb}^{2+}$  в растворе составляет  $0,01$  моль/л, переходное время процесса  $-8$  с, температура  $-$  стандартная. Зависимость потенциала обратимого процесса от времени имеет вид

$$E = E^\circ + \frac{RT}{zF} \ln C + \frac{RT}{zF} \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}} \right).$$

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите в условиях задания из п. 1. Через какое время после включения поляризирующего тока потенциал электрода снизится до  $-0,8 \text{ В}$ ?

3. Определите функцию зависимости переходного времени процесса согласно уравнению Санда от плотности поляризирующего тока. Примите число электронов, участвующих в реакции, равным  $2$ , коэффициент диффузии реагирующих частиц  $-9,3 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$ , а концентрацию частиц  $-0,01$  моль/л. Постройте график этой функции.

4. По заданным матрицам

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0,1 & 2,2 & 1 & 3,1 \\ 1 & 0,4 & 0,1 & 12 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 3,5 & 1 & 13 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -1,2 & 1 & 2,7 \\ -2 & 5 & 4 & -12 & 8 \\ 1 & 10 & 2 & -2,2 & 4,5 \\ 4,7 & 8 & -2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

найдите:

- а) транспонированные матрицы  $A^T$  и  $B^T$ ;
- б) сумму матриц  $A + B$ ;
- в) произведение матрицы на число  $\lambda \cdot A$ , где  $\lambda = 3$ ;
- г) произведения матриц  $A \cdot B^T$  и  $A^T \cdot B$ .

### Вариант 13

1. Вычислите величину мгновенного тока на ртутном капающем электроде через 1, 2 и 3 с после начала роста капли согласно уравнению Ильковича:

$$I_d = 4\sqrt{\frac{7}{3}}\pi\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}}zFD^{\frac{1}{2}}m^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{6}}C,$$

где плотность ртути  $\rho = 13533,5 \text{ кг/м}^3$ ; число электронов, участвующих в реакции, равно 2; коэффициент диффузии реагирующих на поверхности электрода частиц  $1,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$ ; скорость вытекания ртути из капилляра 2 мл/с (нужно перевести в килограммы на секунду); время от начала роста капли задано выше; концентрация реагирующих частиц 0,01 моль/л. При вычислении учтите единицы измерения величин. Лучше представить все единицы в системе СИ.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите время, при котором величина мгновенного тока составит 40 мА согласно уравнению Ильковича и данным из п. 1.

3. Определите функцию зависимости потенциала обратимого процесса восстановления ионов меди от времени:

$$E = E^\circ + \frac{RT}{zF} \ln C + \frac{RT}{zF} \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}} \right).$$

Примите концентрацию ионов меди в растворе равной 0,005 моль/л, стандартный потенциал процесса – 0,34 В, переходное время процесса – 8,8 с. Постройте график этой функции.

4. По заданным матрицам

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2,4 & 1,5 & 3,3 \\ 10 & 0,7 & 1,8 & 1,2 & -2,1 \\ 3,3 & 2,3 & 1,2 & 2,7 & 0,4 \\ 3,1 & 1,9 & 1,3 & -17 & 2,2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3,4 & 2,8 & -1,5 & 5,1 & -2,9 \\ 12 & -4,5 & 4 & 1,2 & 0,8 \\ 10 & -1 & 21 & 2,9 & -4,5 \\ 4,1 & -2,8 & 1,2 & -9,1 & 7,7 \end{pmatrix}$$

найдите:

- сумму элементов 3-го столбца матрицы  $A$  и 3-й строки матрицы  $B$ ;
- разность матриц  $A - B$ ;
- сумму элементов 1-го столбца произведения матриц  $A \cdot B^T$ ;
- сумму элементов 4-ой строки произведения матриц  $A^T \cdot B$ .



### Вариант 14

1. Вычислите значение потенциала свинцового электрода через 1, 2, 5 с после включения постоянного катодного тока в соответствии с уравнением хронопотенциограммы обратимого процесса:

$$E = E^{\circ} + \frac{RT}{zF} \ln C + \frac{RT}{zF} \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}} \right).$$

При расчетах примите стандартный потенциал свинцового электрода равным  $-0,126$  В, концентрацию ионов  $\text{Pb}^{2+}$  –  $0,015$  моль/л, переходное время процесса –  $6$  с, температуру –  $298$  К.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений и данные из п. 1, определите время, через которое потенциал свинцового электрода станет равным  $-0,2$  В.

3. Определите функцию зависимости тока от потенциала согласно уравнению обратимой катодной полярографической волны Ильковича – Гейровского:

$$I(E) = - \frac{I_d}{1 + e^{\frac{zF}{RT}(E - E_{1/2})}},$$

где  $I_d$  – предельный диффузионный ток,  $40$  мА;  $z$  – число электронов, участвующих в реакции,  $2$ ;  $F$  – постоянная Фарадея,  $96\,484$  Кл/моль;  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $8,31$  Дж·моль $^{-1}$ ·К $^{-1}$ ;  $T$  – температура,  $298$  К;  $E$  – потенциал электрода, В;  $E_{1/2}$  – потенциал полуволны,  $0,134$  В. Постройте график этой функции.

4. Составьте программу-функцию решения квадратного уравнения через дискриминант. На входе программы (аргументы функции): коэффициенты квадратного уравнения  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . На выходе – вектор с двумя корнями квадратного уравнения. Если дискриминант отрицательный, то корни представьте в виде комплексно-сопряженных чисел. Если дискриминант равен  $0$ , то корни – два одинаковых числа. С помощью программы-функции найдите корни уравнений:

- $x^2 + 6x + 9 = 0$ ;
- $x^2 + 3x - 4 = 0$ ;
- $11x^2 - 9x + 7 = 0$ .

### Вариант 15

1. Вычислите значения концентраций реагирующих частиц в растворе на расстояниях  $0,1$ ;  $0,5$  и  $1$  мм от поверхности электрода через  $50$  с после начала электролиза. Процесс электролиза протекает в условиях

модели полубесконечной одномерной диффузии, профиль концентраций частиц в растворе дается выражением

$$C = C_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz.$$

Примите объемную концентрацию реагирующих частиц ( $C_0$ ) равной 0,01 моль/л, а коэффициент диффузии частиц –  $10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите, на каком расстоянии от поверхности электрода концентрация реагирующих частиц в растворе составит 70% от объемной в условиях задачи из п. 1.

3. Определите функцию зависимости мгновенного тока, текущего на ртутный капаящий электрод, от времени на основании уравнения Ильковича:

$$I_d = 4\sqrt{\frac{7}{3}}\pi \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}} zFD^{\frac{1}{2}}m^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{6}}C,$$

где плотность ртути  $\rho = 13533,5$  кг/м<sup>3</sup>; число электронов, участвующих в реакции,  $-z = 2$ ; коэффициент диффузии реагирующих на поверхности электрода частиц –  $D = 1 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с; скорость вытекания ртути из капилляра – 2 мл/с (нужно перевести в килограммы на секунду);  $t$  – время от начала роста капли, с; концентрация реагирующих частиц  $C = 0,01$  моль/л. При вычислении учтите единицы измерения величин (лучше представить их в системе СИ). Постройте график этой функции.

4. Составьте программы-функции:

а) для выбора индекса наибольшего и наименьшего числа в заданной строке матрицы;

б) для выбора положения наибольшего и наименьшего элемента в заданной матрице.

В матрицах  $A$  и  $B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2,4 & 1,5 & 3,3 \\ 10 & 0,7 & 1,8 & 1,2 & -2,1 \\ 3,3 & 2,3 & 1,2 & 2,7 & 0,4 \\ 3,1 & 1,9 & 1,3 & -17 & 2,2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3,4 & 2,8 & -1,5 & 5,1 & -2,9 \\ 12 & -4,5 & 4 & 1,2 & 0,8 \\ 10 & -1 & 21 & 2,9 & -4,5 \\ 4,1 & -2,8 & 1,2 & -9,1 & 7,7 \end{pmatrix}$$

с помощью составленных программ найдите: индексы наибольшего элемента в 3-й строке матрицы  $A$  и наименьшего элемента в 1-й строке матрицы  $B$ ; положение наибольшего и наименьшего элементов в данных матрицах.

## Вариант 16

1. Вычислите значение потенциала ртутного капающего электрода при силе тока, равной 10, 50 и 90% от предельного диффузионного тока по уравнению обратимой катодной полярографической волны Гейровского – Ильковича:

$$E = E_{1/2} + \frac{RT}{zF} \ln \left( \frac{I_d - I}{I} \right).$$

Примите потенциал полуволны равным 0,18 В, число электронов, принимающих участие в реакции, – 2, температуру – 25°C.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите силу тока, при которой потенциал электрода составит 0,2 В при данных задачи из п. 1. Примите величину предельного диффузионного тока равной 50 мА.

3. Определите функцию зависимости концентрации электроактивного вещества от расстояния до поверхности электрода, если процесс протекает в условиях полубесконечной одномерной диффузии, в соответствии с которыми зависимость концентрации от расстояния дается выражением

$$C(x) = C_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz.$$

Примите концентрацию электроактивного вещества в объеме раствора равной 0,001 моль/л, коэффициент диффузии –  $1 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с, время после начала электролиза – 10 с. Постройте график этой функции.

4. Постройте трехмерные графики поверхности тора, используя его параметрические уравнения:

$$x(\varphi, \psi) = (R + r \cos \psi) \cos \varphi;$$

$$y(\varphi, \psi) = (R + r \cos \psi) \sin \varphi;$$

$$z(\varphi, \psi) = r \sin \psi,$$

где  $R$  – расстояние от центра образующей окружности до оси тора;  $r$  – радиус образующей окружности;  $\varphi$  – азимутальный угол,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ;  $\psi$  – зенитный угол,  $\psi \in [-\pi, \pi)$ . Примите радиус образующей окружности равным 2, а расстояние от центра образующей окружности до оси тора: а) 1; б) 2; в) 3.

## Вариант 17

1. Вычислите значения концентраций реагирующих частиц в растворе на расстоянии 0,1 мм от поверхности электрода через 1, 5 и 20 с

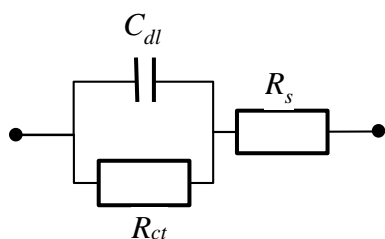
после начала электролиза. Процесс электролиза протекает в условиях модели полубесконечной одномерной диффузии, и распределение концентраций частиц в растворе дается выражением

$$C = C_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz.$$

Примите объемную концентрацию реагирующих частиц ( $C_0$ ) равной 0,01 моль/л, а коэффициент диффузии частиц  $10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с.

2. Используя средства MathCad для решения уравнений, определите, через какое время концентрация реагирующих частиц уменьшится на 90% от объемной в условиях задачи из п. 1.

3. Рассчитайте действительную и мнимую части импеданса схемы, моделирующей поведение идеально поляризуемого электрода:



На данной схеме:  $C_{dl}$  – емкость двойного слоя, Ф;  $R_{ct}$  – сопротивление переноса заряда, Ом;  $R_s$  – сопротивление раствора, Ом. Импеданс емкости имеет только мнимую часть и определяется выражением

$$Z_{dl} = -j(\omega C_{dl})^{-1},$$

где  $j$  – мнимая единица,  $\omega$  – круговая частота, рад/с. Импедансы сопротивлений имеют только действительную часть и равны соответствующим сопротивлениям

$$Z_{ct} = R_{ct}, Z_s = R_s.$$

При расчетах примите:  $R_{ct} = 300$  Ом;  $C_{dl} = 10^{-4}$  Ф;  $R_s = 30$  Ом. Частота ( $f$ ) переменного тока меняется от  $10^{-2}$  до  $10^5$  Гц. На каждую декаду частоты нужно взять 10 точек. Интервалы между точками возьмите равными в логарифмической шкале. При вычислении импеданса схемы используйте правила для расчета последовательных и параллельных соединений сопротивлений. Постройте точечный график Найквиста – зависимость мнимой части импеданса с обратным знаком от действительной:  $-\text{Im}(Z)$  от  $\text{Re}(Z)$ .

4. Графически исследуйте решение нелинейных уравнений и для каждого корня получите решение:

а)  $\ln^2(x-1) = 3\cos(2x) + 1$ ;

б)  $\sqrt{25-x^2} = \text{arctg}(2x)$ ;

в)  $10e^{-0,3x^2} = 2\pi x + x^2 + 3\sin x$ .

## Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой система MathCad?
2. Перечислите основные возможности системы MathCAD.
3. Охарактеризуйте основные компоненты, входящие в состав системы MathCAD.
4. Перечислите основные элементы интерфейса системы MathCAD.
5. Перечислите основные компоненты панели Math.
6. Способы ввода текстовых комментариев в системе MathCad.
7. Форматирование текстовых комментариев в MathCAD.
8. Перемещение и копирование текстовых, формульных и графических объектов в MathCad.
9. Операторы ввода (присваивания), вывода, символьного равенства в MathCad.
10. Назначение клавиши «Пробел» в формульном редакторе MathCad.
11. Понятие ранжированной переменной. Ввод и вывод ранжированных переменных в MathCad.
12. Основные команды панели Graph (График) MathCad.
13. Создание и форматирование графиков в MathCad.
14. Назначение и синтаксис команды simplify в MathCad.
15. Назначение и синтаксис команды expand в MathCad.
16. Назначение и синтаксис команды factor в MathCad.
17. Назначение и синтаксис команды substitute в MathCad.
18. Назначение и синтаксис команды convert to partial fraction в MathCad.
19. Назначение команды Given в MathCad.
20. Назначение и синтаксис команды Find в MathCad.
21. Основные команды панели Matrix в MathCad.
22. Поэлементный ввод и вывод матриц и векторов в MathCad.
23. Назначение и синтаксис системной переменной ORIGIN в MathCad.
24. Назначение и синтаксис основных функций работы с матрицами (matrix, diag, identity) в MathCad.
25. Назначение и синтаксис основных функций работы с матрицами (augment, stack, submatrix) в MathCad.
26. Назначение и синтаксис функций вычисления числовых характеристик матриц (last, length, rows, cols) в MathCad.
27. Назначение и синтаксис функций вычисления числовых характеристик матриц (max, min, tr, rank) в MathCad.
28. Назначение и синтаксис основных функций, реализующих численные алгоритмы решения задач линейной алгебры (rref, lsolve) в MathCad.
29. Назначение и синтаксис команд Minimize и Maximize в MathCad.

## Раздел 2

# ЭМПИРИЧЕСКИЕ, ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

## 2.1. ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

### Лабораторная работа 2.1.1

#### ОБРАБОТКА МНЕНИЙ СПЕЦИАЛИСТОВ

**Цель работы:** определение согласованности мнений специалистов по степени влияния предложенных факторов на исследуемый процесс и выбор наиболее важных факторов.

#### Теоретическая часть

При решении различных технологических задач, связанных с оптимизацией технологических процессов, требуется выделить наиболее важные факторы, которые оказывают заметное влияние на рассматриваемый технологический процесс и которые необходимо стараться контролировать на каком-то оптимальном уровне. Часто эффект и сила влияния этих факторов недостаточно известны, и поэтому требуется провести опрос экспертов, которые могли бы высказать свое мнение о силе влияния тех или иных факторов на данный процесс или более точно на какой-то показатель процесса. Эксперты выставляют рейтинговую оценку для каждого фактора по силе его влияния на процесс. Для выбора согласованного мнения и вообще для математической оценки степени согласованности мнений существуют специальные статистические показатели. Одним из таких показателей является коэффициент конкордации Кендалла  $W$ , который характеризует степень согласованности мнений экспертов. Формулы и процедура расчета коэффициента конкордации будут представлены ниже.

Коэффициент конкордации  $W$  может принимать значения от 0 до 1. Чем ближе значение  $W$  к 1, тем больше степень согласованности мнений экспертов. Для оценки значимости коэффициента конкордации используют критерий Пирсона, процедура расчета которого также представлена ниже. Критерий Пирсона подчиняется распределению  $\chi^2(n - 1)$ , где  $n$  – число факторов.

В данной работе проводится сбор, обработка мнений экспертов о степени влияния ряда предложенных факторов на выбранный показатель технологического процесса. В качестве экспертов выступают студенты группы, изучающей данную дисциплину. Эксперт для каждого фактора выставляет его ранг – натуральное число, характеризующее важность данного фактора. При этом наиболее важному фактору ставится 1 и далее по степени уменьшения важности ранг возрастает. Если факторов много, то естественно, что для некоторых факторов могут ставиться одинаковые ранги. Далее проводится расчет коэффициента конкордации, оценка его значимости и степени согласованности мнений экспертов, а также определение согласованного мнения.

Опрос экспертов и обработка результатов могут быть осуществлены не только с целью выбора наиболее важных факторов, влияющих на технологический процесс, но и для целей, не связанных с технологией. Например, как будет показано ниже, можно провести опрос студентов по степени важности (интереса) различных предметов, изученных ими в вузе, а затем дать оценку согласованности мнений. Ниже приведено описание порядка выполнения работы и примеры вариантов заданий. При расчетах будут широко использоваться матрицы, и поэтому студентам нужно уметь проводить вычисления с матрицами и знать способы доступа к их элементам.

### **Ход работы**

1. Четко сформулируйте цели исследования для опроса специалистов.

2. Выберите факторы (не менее 7), которые требуется проранжировать по степени влияния на изучаемый процесс.

3. Составьте анкету для опроса специалистов.

4. Проведите опрос.

5. Обработайте результаты опроса.

5.1) составление матрицы рангов. Строка – эксперт, столбец – фактор. Число факторов (столбцов матрицы рангов) обозначим  $n$ , а число экспертов (число строк матрицы рангов) –  $m$ ;

5.2) составление модифицированной матрицы рангов. Модифицирование матрицы рангов нужно проводить в том случае, если хотя бы один эксперт при опросе выставил одинаковые ранги для двух или более факторов. Такие ранги будем называть *связанными*. Матрицу рангов нужно модифицировать таким образом, чтобы для каждой строки сумма рангов равнялась сумме натуральных чисел от 1 до  $n$ :

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2.1)$$

Если в строке нет связанных (совпавших) рангов, то нужно просто пронумеровать ранги в порядке возрастания и вместо рангов проставить их номера. Отметим, что если эксперт сразу выставил для каждого фактора ранги в виде разных чисел от 1 до  $n$ , то строку модифицировать вообще не нужно.

Если есть совпавшие (связанные) ранги для какой-то строки, то модифицировать такую строку нужно на основе следующего рассуждения: если пронумеровать все ранги в последовательности их увеличения (при этом для совпавших рангов их номера можно проставить в любом порядке), то сумма номеров рангов будет как раз равна требуемому числу; если заменить совпавшие ранги средним значением от их номеров, а несовпавшие ранги их номерами, то сумма полученных рангов будет равна требуемому числу, и при этом относительные значения рангов будут отражать мнение экспертов о важности рассматриваемых факторов. Например, строку

$$1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad \sum_{j=1}^n j = 20 \neq \frac{7(7+1)}{2} = 28$$

заменяют строкой

$$1 \quad 2,5 \quad 2,5 \quad 4,5 \quad 6 \quad 4,5 \quad 7 \quad \sum_{j=1}^n j = 28.$$

При этом два совпавших ранга, равных двум (2), заменили на 2,5, а две совпавшие тройки (3) заменили на 4,5. Для рассматриваемого выше примера замену факторов поясним табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Пример модифицирования строки матрицы рангов**

Показатель для строки матрицы рангов	Номер ранга в анкете							Сумма
	1	2	3	4	5	6	7	
Исходная строка рангов	1	2	2	3	4	3	5	20
Номер ранга по возрастанию	1	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	6	<b>5</b>	7	28
Модифицированная строка	1	2,5	2,5	4,5	6	4,5	7	28



В табл. 2.1 жирным шрифтом выделены номера совпавших рангов: 2 и 3 для совпавших двоек, а 4 и 5 для совпавших троек. В модифицированной строке исходные совпавшие ранги, равные 2, заменили на среднее значение их номеров (среднее арифметическое от 2 и 3 равно 2,5). Аналогично сделали для исходных совпавших рангов, равных 3 (среднее арифметическое от 4 и 5 равно 4,5). Остальные ранги (1, 4 и 5) заменили их номерами (1, 6 и 7);

5.3) подсчет суммы рангов по факторам:

$$F_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad (2.2)$$

где  $m$  – число экспертов;  $i$  – номер эксперта;  $j$  – номер фактора;

5.4) подсчет разностей между суммой рангов каждого фактора и средней суммой рангов (отклонения от среднего):

$$\Delta_j = F_j - \bar{F}, \quad (2.3)$$

где  $\bar{F}$  – средняя сумма рангов, которую можно найти по формуле

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} = \frac{m(n+1)}{2}; \quad (2.4)$$

5.5) подсчет суммы квадратов отклонений для всех факторов:

$$S = \sum_{j=1}^n (\Delta_j)^2; \quad (2.5)$$

5.6) расчет коэффициента конкордации  $W$ . В случае, если в матрице рангов нет связанных рангов, т. е. каждый эксперт выставил различные ранги для всех факторов, коэффициент конкордации рассчитывают по следующей формуле:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}. \quad (2.6)$$

Если же в матрице рангов есть связанные факторы, т. е. хотя бы один эксперт выставил хотя бы для двух факторов одинаковые ранги, то расчет коэффициента конкордации проводят по формуле

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{j=1}^m T_j}, \quad (2.7)$$

где  $T_j$  – коэффициент, зависящий от числа совпадений и числа совпавших рангов в  $j$ -й строке матрицы рангов или у  $j$ -го эксперта.

Этот коэффициент определяется по формуле

$$T_j = \sum_{q=1}^{Q_j} (t_{jq}^3 - t_{jq}), \quad (2.8)$$

где  $Q_j$  – число совпадений рангов у  $j$ -го эксперта;  $t_{jq}$  – число совпавших рангов у  $j$ -го эксперта в  $q$ -совпадении.

Например, для  $j$ -й строки

$$1 \quad 2,5 \quad 2,5 \quad 4,5 \quad 6 \quad 4,5 \quad 7$$

есть 2 совпадения рангов: по 2,5 и по 4,5. Поэтому для этой строки число совпадений  $Q_j = 2$ . В первом совпадении – два совпавших ранга  $t_{j1} = 2$ . Во втором совпадении – также два совпавших ранга  $t_{j2} = 2$ . Тогда для этой строки коэффициент

$$T_j = (2^3 - 2) + (2^3 - 2) = 12.$$

Для расчета  $W$  в случае связанных рангов потребуется в MathCad создать вектор коэффициентов  $T$  с числом строк, равным  $m$ , элементы которого рассчитывают по вышеприведенному примеру для каждой строки матрицы рангов. Если в какой-то строке матрицы нет совпавших рангов, то коэффициент  $T_j$  будет равен нулю.

6. Определите согласованность мнений экспертов при уровнях значимости ( $\alpha$ ) 0,1; 0,05 и 0,01.

Оценка значимости коэффициента конкордации проводится по критерию Пирсона. Для несвязанных рангов критерий Пирсона рассчитывают по формуле

$$\chi_p^2 = \frac{12S}{mn(n+1)}. \quad (2.9)$$

Для связанных рангов – по формуле

$$\chi_p^2 = \frac{12S}{mn(n+1) - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m T_j}. \quad (2.10)$$

Рассчитанное значение критерия Пирсона сравнивают с табличным значением  $\chi_{\text{табл}}^2$  при заданном уровне значимости  $\alpha$  и числе степеней свободы. Если  $\chi_p^2 > \chi_{\text{табл}}^2$ , то согласованность мнений специалистов не случайна.

Табличное значение представляет собой квантиль уровня  $1 - \alpha$  распределения  $\chi^2$  с числом степеней свободы  $n - 1$ , который выражается

$\chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ . Его значение можно найти в специальных таблицах или в Mathcad с помощью встроенной функции qchisq:

$$\chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \text{qchisq}(1-\alpha, n-1). \quad (2.11)$$

7. Постройте диаграмму рангов и выберите наиболее важные факторы. Диаграмма рангов строится в виде зависимости суммы рангов по факторам от номера фактора. В качестве наиболее важных факторов выбирают те, для которых сумма рангов меньше средней суммы.

В заключении к работе необходимо все исследованные факторы расположить в порядке уменьшения их важности, а также сделать заключения о значимости коэффициента конкордации и о степени согласованности мнений специалистов о влиянии исследуемых факторов на рассматриваемый процесс.

Варианты формулирования цели исследования и составления анкеты представлены ниже.

### *Вариант 1*

Для оптимизации по выбранному параметру (коррозионная стойкость покрытия) процесса цинкования в щелочном электролите с использованием барабанов необходимо выявить факторы, оказывающее наибольшее влияние на данный параметр. Было выбрано 11 факторов: содержание оксида цинка, содержание щелочи, содержание блескообразующей добавки, вид добавки, плотность тока, температура, отношение площади катод/анод, конструкция барабана, вид пассивирующего раствора, время выдержки в пассивирующем растворе, время активации.

Экспертам предлагается анкета (табл. 2.2) со списком факторов, в которой необходимо для каждого из них проставить ранг, т. е. число, характеризующее степень важности данного фактора среди предложенных.

Таблица 2.2

#### **Факторы, влияющие на коррозионную стойкость цинковых покрытий**

Наименование фактора	Ранг
1. Содержание оксида цинка	
2. Содержание щелочи	
3. Содержание блескообразующей добавки	
4. Вид блескообразующей добавки	
5. Плотность тока	
6. Температура электролита	
7. Отношение площади катод/анод	
8. Конструкция барабана	
9. Вид пассивирующего раствора	
10. Время выдержки в пассивирующем растворе	
11. Время активации	

Чем меньше число, тем больше степень важности фактора. Эксперту фактически необходимо пронумеровать факторы в порядке убывания степени их влияния на выбранный параметр оптимизации. Нескольким факторам можно проставлять одинаковые ранги, если эксперт не уверен, что какой-то из факторов важнее другого.

### *Вариант 2*

Для оценки комплексного показателя качества цинковых покрытий на крепеже (болты, гайки, шайбы) выбран ряд показателей качества покрытий: толщина, равномерность, износостойкость, коррозионная стойкость, твердость, прочность сцепления, пористость, блеск, паяемость. Необходимо проранжировать данные показатели качества покрытий по степени важности для рассматриваемых деталей.

Экспертам предлагается анкета (табл. 2.3) со списком показателей качества, в которой необходимо для каждого из них проставить ранг, т. е. число, характеризующее степень важности данного показателя для цинковых покрытий на крепежных деталях. Чем меньше число, тем больше степень важности показателя. Эксперту фактически необходимо пронумеровать показатели в порядке убывания степени их важности для цинковых покрытий на крепежных деталях. Нескольким показателям можно проставлять одинаковые ранги, если эксперт не уверен, что какой-то показатель важнее другого.

### *Вариант 3*

Для оценки комплексного показателя качества хромовых покрытий на штоки гидроцилиндров (твердое хромирование) выбран ряд показателей: толщина, равномерность, износостойкость, коррозионная стойкость, твердость, прочность сцепления, пористость, блеск, паяемость. Необходимо проранжировать данные показатели качества покрытий по степени важности для рассматриваемых деталей.

Экспертам предлагается анкета (табл. 2.3) со списком показателей качества, в которой необходимо для каждого из них проставить ранг, т. е. число, характеризующее степень важности данного показателя для хромовых покрытий на штоках гидроцилиндров. Чем меньше число, тем больше степень важности показателя. Эксперту фактически необходимо пронумеровать показатели в порядке убывания степени их важности для хромовых покрытий на штоках гидроцилиндров. Нескольким показателям можно проставлять одинаковые ранги, если эксперт не уверен, что какой-то показатель важнее другого.

**Показатели качества покрытий**

Наименование параметра	Ранг
1. Толщина	
2. Равномерность	
3. Износостойкость	
4. Коррозионная стойкость	
5. Твердость	
6. Прочность сцепления с основой	
7. Пористость	
8. Блеск	
9. Паяемость	

**Вариант 4**

Для оценки комплексного показателя качества покрытий никель-никель-хром на корпусе водопроводного крана выбран ряд показателей: толщина, равномерность, износостойкость, коррозионная стойкость, твердость, прочность сцепления, пористость, блеск, паяемость. Необходимо проранжировать данные показатели качества покрытий по степени важности для рассматриваемых деталей.

Экспертам предлагается анкета (табл. 2.3) со списком показателей качества, в которой необходимо для каждого показателя проставить его ранг, т. е. число, характеризующее степень важности данного показателя для покрытий никель-никель-хром на корпусе водопроводного крана. Чем меньше число, тем больше степень важности показателя. Эксперту фактически необходимо пронумеровать показатели в порядке убывания степени их важности для покрытий никель-никель-хром на корпусе водопроводного крана. Нескольким показателям можно проставлять одинаковые ранги, если эксперт не уверен, что какой-то показатель важнее другого.

**Вариант 5**

Для оптимизации по выбранному параметру (износостойкость) процесса хромирования штоков амортизаторов необходимо выявить факторы, оказывающие наибольшее влияние на данный параметр. Было выбрано 9 факторов: содержание оксида хрома в электролите, содержание серной кислоты, качество предварительной обработки поверхности, плотность тока, температура, отношение площади катод/анод, содержание Fe и Cr (III) в электролите хромирования, геометрическое расположение деталей и анодов.

Экспертам предлагается анкета (табл. 2.4) со списком факторов, в которой необходимо для каждого фактора проставить его ранг, т. е.

число, характеризующее степень важности данного фактора среди предложенных. Чем меньше число, тем больше степень важности фактора. Эксперту фактически необходимо пронумеровать факторы в порядке убывания степени их влияния на выбранный параметр оптимизации. Нескольким факторам можно проставлять одинаковые ранги, если эксперт не уверен, что какой-то из факторов важнее другого.

Таблица 2.4

**Факторы, влияющие на износостойкость хромовых покрытий**

Наименование фактора	Ранг
1. Содержание оксида хрома в электролите	
2. Содержание серной кислоты	
3. Качество предварительной обработки поверхности	
4. Плотность тока	
5. Температура электролита	
6. Содержание железа в электролите хромирования	
7. Отношение площади катод/анод	
8. Содержание Cr (III) в электролите хромирования	
9. Геометрическое расположение деталей и анодов	

**Вариант 6**

Для оптимизации учебной нагрузки с целью улучшения качества образования требуется определить, какие из изучаемых предметов наиболее важны для будущих специалистов химиков-технологов специальности «Технология электрохимических производств». Было выбрано 11 предметов изучаемых на 3-м и 4-м курсах: теоретическая электрохимия; приборы и методы исследования электрохимических систем; химические источники тока; коррозия и защита металлов; технология печатных плат; основы научных исследований и инновационная деятельность; моделирование и оптимизация химико-технологических процессов в отрасли; электрохимический синтез и основы гидроэлектрометаллургии; гальванотехника; электрохимическая очистка сточных вод и водоподготовка; основы ресурсосбережения в электрохимических производствах.

Экспертам предлагается анкета (табл. 2.5) со списком предметов, в которой необходимо для каждого из них проставить ранг, т. е. число, характеризующее степень важности данного предмета среди предложенных. Чем меньше число, тем больше степень важности предмета. Эксперту необходимо пронумеровать предметы в порядке убывания степени их важности для будущей специальности. Нескольким предметам можно проставлять одинаковые ранги, если эксперт не уверен, что какой-то из предметов важнее другого.

Таблица 2.5

**Предметы, изучаемые студентами специальности  
«Технология электрохимических производств»**

Наименование предмета	Ранг
1. Теоретическая электрохимия	
2. Приборы и методы исследования электрохимических систем	
3. Химические источники тока	
4. Коррозия и защита металлов	
5. Технология печатных плат	
6. Основы научных исследований и инновационная деятельность	
7. Моделирование и оптимизация химико-технологических процессов в отрасли	
8. Электрохимический синтез и основы гидроэлектрометаллургии	
9. Гальванотехника	
10. Электрохимическая очистка сточных вод и водоподготовка	
11. Основы ресурсосбережения в электрохимических производствах	

**Вариант 7**

Для оценки степени опасности гальванического производства необходимо выявить компоненты электролитов, наиболее опасные для окружающей среды. Было выбрано 11 компонентов: едкий натр, серная кислота, соляная кислота, аммиак, хроматы калия (натрия), соли хрома (III), соли цинка, соли никеля, ПАВ, фосфаты, органические добавки.

Экспертам предлагается анкета (табл. 2.6) со списком компонентов, в которой необходимо для каждого из них проставить ранг, т. е. число, характеризующее степень опасности данного компонента среди предложенных. Чем меньше число, тем больше степень опасности компонента. Нескольким компонентам можно проставлять одинаковые ранги.

Таблица 2.6

**Компоненты электролитов, используемые в гальваническом производстве**

Наименование компонента	Ранг
1. Едкий натр	
2. Серная кислота	
3. Соляная кислота	
4. Аммиак	
5. Хроматы натрия (калия)	
6. Соли хрома (III)	
7. Соли цинка	
8. Соли никеля	
9. ПАВ	
10. Фосфаты	
11. Органические добавки	

## Вариант 8

Для оптимизации производственной практики с целью улучшения качества образования требуется определить, какие из базовых предприятий практики более востребованы и интересны для будущих специалистов химиков-технологов специальности «Технология электрохимических производств». Было выбрано 10 предприятий, на которых в последние годы проходили практику студенты. Можно предприятия, представленные в списке в анкете ниже, заменить на другие, на которых студенты проходили практику в текущем году.

Экспертам предлагается анкета (табл. 2.7) со списком предприятий, в которой необходимо для каждого из них проставить ранг, т. е. число, характеризующее востребованность, полезности предприятия среди предложенных. Чем меньше число, тем больше востребованность предприятия. Желательно проранжировать предприятия по пятибалльной шкале, и тогда нескольким предприятиям нужно проставить одинаковые ранги.

Таблица 2.7

### Предприятия для прохождения практики студентами специальности «Технология электрохимических производств»

Наименование предприятия	Ранг
1. ОАО «МАЗ»	
2. РУП «МТЗ»	
3. ОАО «МЗКТ»	
4. УП и НТПЦ «Белкоммунмаш»	
5. ОАО «БелОМО», ММЗ им. С. И. Вавилова	
6. ОАО Минский электротехнический завод им. В. И. Козлова	
7. ОАО «БЕЛАЗ»	
8. ОАО «Белорусский металлургический завод»	
9. ОАО «Гомсельмаш»	
10. СП ОАО «Брестгазоаппарат»	

## Вариант 9

Для оптимизации процесса обучения студентов специальности «Технология электрохимических производств» с целью выбора приоритетов в обучении на старших курсах требуется определить, какие должности на гальваническом производстве современных предприятий Беларуси более востребованы студентами. Было выбрано 9 должностей, на которых могут работать выпускники специальности «Технология электрохимических производств».



Экспертам предлагается анкета (табл. 2.8) со списком должностей, в которой необходимо для каждой из них проставить ранг, т. е. число, характеризующее степень востребованности, желательности данной должности среди предложенных. Чем меньше число, тем больше степень желательности. Эксперту необходимо пронумеровать должности в порядке желательности для будущей работы. Нескольким должностям нужно проставлять одинаковые ранги, если эксперт считает, что эти должности одинаково желательны для него.

Таблица 2.8

**Должности на гальванических производствах предприятий**

Наименование фактора	Ранг
1. Инженер-технолог в бюро (работа в кабинете)	
2. Инженер-технолог в цеху (работа в цеху технологом)	
3. Инженер-механик в цеху (работа с оборудованием в цеху)	
4. Мастер участка (промежуточная должность между рабочим и инженером)	
5. Рабочий (гальваник, корректировщик, оператор автоматизированной линии)	
6. Инженер-лаборант (анализ в заводской лаборатории)	
7. Инженер, ответственный за закупку и хранение химических реактивов и оборудование (вопросы снабжения)	
8. Инженер-экономист (решение экономических вопросов)	
9. Руководитель цеха или участка (решает вопросы организации и управления)	

**Вопросы для самоконтроля**

1. Перечислите требования к параметру оптимизации.
2. Как рассчитывают коэффициент конкордации для несвязанных рангов?
3. Каков смысл уровня значимости при оценке значимости коэффициента конкордации?
4. Перечислите требования к факторам.
5. Как рассчитывают коэффициент конкордации для связанных рангов?
6. Как оценивается значимость коэффициента конкордации?
7. Приведите этапы априорного ранжирования.
8. Как рассчитывают критерий Пирсона для несвязанных рангов?
9. В чем заключается смысл коэффициента конкордации?
10. Последовательность обработки матрицы рангов.
11. Какие ранги называются связанными?
12. Как рассчитывают критерий Пирсона для связанных рангов?
13. Что такое несвязанные ранги?
14. Как строится модифицированная матрица рангов?
15. Какие факторы называются управляемыми?

### КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

**Цель работы:** проверка наличия линейной связи между параметрами, характеризующими заданный объект исследования, и усвоение методов расчета доверительного интервала и проверки значимости коэффициента парной корреляции.

#### Теоретическая часть

Корреляционный анализ предполагает изучение зависимостей (корреляций) между случайными величинами и установление значимости этих зависимостей. Корреляционный анализ может проводиться без предположений о наличии причинно-следственных связей между величинами. Поэтому его можно применять для изучения зависимостей между самыми разными величинами, характеризующими технологический процесс.

На практике при изучении объекта исследования приходится иметь дело со многими выходными параметрами. Например, в гальваническом производстве при осаждении покрытий приходится учитывать физико-механические (пористость, механическая и коррозионная стойкость), технологические (толщина покрытия, плотность тока), экономические (себестоимость) и другие параметры. Любой из них может быть выбран в качестве количественного параметра оптимизации процесса производства в зависимости от цели исследования. Между некоторыми выходными параметрами может существовать тесная линейная связь. В этом случае для выбора наилучшего или наиболее удобного (легкость измерения, простой физический смысл) для исследователя параметра оптимизации можно воспользоваться корреляционным анализом.

Проверить наличие корреляции между величинами  $x$  и  $y$  можно по имеющимся опытным данным, которые представляют собой пары значений  $(x_i, y_i)$ , полученные, например, в ходе эксперимента или производственного процесса, когда некоторому значению  $x_i$  можно поставить в соответствие некоторое значение  $y_i$ . Для этого необходимо рассчитать выборочный коэффициент парной корреляции, который находится по формуле

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (2.12)$$

где  $n$  – число опытов;  $i$  – номер опыта, в котором были получены значения параметров;  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  – средние значения параметров.

Последнюю формулу можно переписать в более удобном для вычислений виде:

$$r_{xy} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\left( n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \left( n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)}}. \quad (2.13)$$

Значения коэффициента парной корреляции могут лежать в пределах от  $-1$  до  $+1$ . Чем ближе значение коэффициента парной корреляции по модулю к единице, тем сильнее связь между параметрами. Коэффициент парной корреляции имеет четкий математический смысл только при линейной зависимости между параметрами и в случае нормального их распределения.

Положительное значение коэффициента парной корреляции указывает на то, что с ростом значения одного параметра растет значение другого. Отрицательное значение этого коэффициента свидетельствует об уменьшении значения одного из параметров при увеличении значения другого. Нулевое значение коэффициента парной корреляции указывает на отсутствие линейной статистической связи между параметрами. Обычно рассчитанные значения коэффициента парной корреляции не равны нулю. В этом случае для выяснения того, насколько достоверно можно говорить о связи между параметрами, проводят проверку значимости коэффициента парной корреляции и рассчитывают доверительный интервал при выбранном уровне значимости.

Проверку значимости можно провести с использованием критерия Стьюдента, который рассчитывают по формуле

$$t_{\text{расч}} = |r_{xy}| \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}}. \quad (2.14)$$

Рассчитанное значение сравнивают с табличным значением критерия Стьюдента при выбранном уровне значимости  $\alpha$  и числе степеней свободы  $f = n - 2$ . Табличное значение критерия Стьюдента представляет собой квантиль распределения Стьюдента с  $n - 2$  степенями свободы уровня  $1 - \alpha / 2$  и может быть найдено с использованием встроенной в Mathcad функции  $qt$ , аргументами которой являются уровень квантиля и число степеней свободы:

$$t_{\text{табл}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} = qt \left( 1 - \frac{\alpha}{2}, n-2 \right). \quad (2.15)$$

Если  $t_{\text{расч}} > t_{\text{табл}}$ , то гипотеза о линейной связи между параметрами не отвергается. Для проверки значимости обычно выбирают уровень значимости, равный 0,01; 0,05 или 0,10. Также для проверки значимости выборочного коэффициента парной корреляции  $r_{xy}$  можно сравнить его с критическим значением  $r_{\text{кр}}$ . Критическое значение коэффициента парной корреляции для выбранного уровня значимости  $\alpha$  и числа опытов  $n$  можно выразить из формулы (2.14), подставив вместо  $t_{\text{табл}}$  квантиль распределения Стьюдента:

$$r_{\text{кр}} = \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}}{\sqrt{t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}^2 + n-2}}. \quad (2.16)$$

Выборочный коэффициент парной корреляции будет значим, если он по модулю будет больше  $r_{\text{кр}}$ .

Доверительный интервал для коэффициента парной корреляции можно рассчитать с использованием  $z$ -преобразования Фишера, который установил, что величина  $z$ , получаемая из выборочного коэффициента парной корреляции по формуле

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}}, \quad (2.17)$$

подчиняется приблизительно нормальному закону распределения со средним значением

$$\zeta \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_{xy}}{1-\rho_{xy}} \quad (2.18)$$

и дисперсией

$$D_z \approx \frac{1}{n-3}. \quad (2.19)$$

В формуле (2.18)  $\rho_{xy}$  представляет собой коэффициент парной корреляции между случайными величинами  $x$  и  $y$ . Эту величину можно рассматривать как истинное значение коэффициента парной корреляции, тогда как  $r_{xy}$  — это выборочная оценка этого коэффициента.

Тогда, перейдя к стандартной нормальной случайной величине, доверительный интервал выразим в виде неравенств:

$$-u_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\zeta - z}{\sqrt{D_z}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (2.20)$$

где  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  – квантиль стандартного нормального распределения уровня

$1 - \alpha / 2$ . Квантиль стандартного нормального распределения может быть найдена в Mathcad с помощью встроенной функции `qnorm` аргументами которой являются уровень квантиля и параметры стандартного нормального распределения ( $a = 0$  и  $\sigma = 1$ ):

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \text{qnorm}(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1). \quad (2.21)$$

Решая неравенство (2.20) относительно  $\zeta$ , получим доверительный интервал для среднего значения случайной величины  $z$ :

$$z_1 = z - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{D_z} < \zeta < z + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{D_z} = z_2. \quad (2.22)$$

Границы доверительного интервала обозначены как  $z_1$  (левая граница) и  $z_2$  (правая граница). Теперь, используя обратное преобразование Фишера, можно определить левую ( $r_1$ ) и правую ( $r_2$ ) границы для коэффициента парной корреляции. Формула обратного преобразования Фишера имеет вид

$$r_{1(2)} = \frac{e^{2z_{1(2)}} - 1}{e^{2z_{1(2)}} + 1}. \quad (2.23)$$

В итоге доверительный интервал для коэффициента парной корреляции получаем в виде следующего неравенства:

$$r_1 < \rho_{xy} < r_2. \quad (2.24)$$

Если выборочный коэффициент парной корреляции оказался значим, то можно говорить о наличии линейной связи между параметрами  $x$  и  $y$ , а также составить линейное корреляционное уравнение:

$$y = a + bx. \quad (2.25)$$

Коэффициенты корреляционного уравнения можно найти по формулам:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}; \quad (2.26)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (2.27)$$

## Задание

Проведите корреляционный анализ между значениями потенциалов образцов, измеренных в процессе коррозионных испытаний  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\Delta E$ , и скоростью контактной коррозии алюминия и алюминиевого сплава Д16  $\Delta m$ : рассчитайте выборочные коэффициенты парной корреляции  $r_{E_0\Delta m}$ ,  $r_{E_1\Delta m}$ ,  $r_{E_2\Delta m}$ ,  $r_{\Delta E\Delta m}$ ; проверьте значимость рассчитанных коэффициентов при уровнях значимости 0,10 и 0,05 с использованием критерия Стьюдента; постройте доверительные интервалы при уровнях значимости 0,10 и 0,05 для коэффициентов парной корреляции с использованием  $z$ -преобразования Фишера.

Варианты со значениями данных находятся в файлах в системе СДО БГТУ или у преподавателя. Возможно использование собственных экспериментальных данных, для которых нужно провести корреляционный анализ.

## Ход работы

1. Рассчитайте коэффициенты парной корреляции  $r_{E_0\Delta m}$ ,  $r_{E_1\Delta m}$ ,  $r_{E_2\Delta m}$ ,  $r_{\Delta E\Delta m}$ .

2. Найдите критерии значимости для коэффициентов парной корреляции по формуле (2.14).

3. Рассчитайте критическое значение коэффициента парной корреляции при уровнях значимости 0,05 и 0,10 по формуле (2.16).

4. Проверьте значимость рассчитанных коэффициентов парной корреляции при уровнях значимости 0,05 и 0,10:

4.1) с помощью критического значения коэффициента парной корреляции  $r_{кр}$ :

$$r > r_{кр}, \text{ следовательно, значим;}$$

4.2) с использованием  $t$ -критерия:

$$t_{расч} > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}, \text{ следовательно, значим.}$$

5. Постройте доверительный интервал для рассчитанных значений коэффициентов парной корреляции, используя  $z$ -преобразование Фишера при уровнях значимости 0,05 и 0,10.

6. Для значимых коэффициентов парной корреляции составьте линейное корреляционное уравнение между соответствующими параметрами.

7. Составьте программы-функции:

7.1) для расчета коэффициента парной корреляции;

7.2) проверки значимости коэффициента парной корреляции по критерию Стьюдента;

7.3) расчета доверительного интервала для коэффициента парной корреляции с использованием  $z$ -преобразования Фишера.

В отчете привести все расчеты, подписанные в соответствии с ходом работы. Результаты определения табличных критериев значимости и критического коэффициента парной корреляции представьте в табл. 2.9.

Значения выборочных коэффициентов парной корреляции, а также результаты по определению их значимости, границы доверительных интервалов и коэффициенты линейных корреляционных уравнений между парами параметров, для которых установлена значимая линейная связь, представьте в табл. 2.10.

Таблица 2.9

**Табличные значения критерия значимости и критические значения коэффициента парной корреляции при разных уровнях значимости  $\alpha$**

Критерий	Уровень значимости	
	0,05	0,10
$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$		
$r_{кр}$		

Таблица 2.10

**Результаты корреляционного анализа**

Пары параметров $x$ и $y$	$E0$ и $\Delta m$		$E1$ и $\Delta m$		$E2$ и $\Delta m$		$\Delta E$ и $\Delta m$	
Коэффициент корреляции $r_{xy}$								
Критерии значимости								
Значимость коэффициента парной корреляции (значим/незначим)								
$\alpha = 0,05$								
$\alpha = 0,10$								
Доверительный интервал для коэффициента парной корреляции ( $r_1 < \rho < r_2$ )								
	$r_1$	$r_2$	$r_1$	$r_2$	$r_1$	$r_2$	$r_1$	$r_2$
$\alpha = 0,05$								
$\alpha = 0,10$								
Коэффициенты линейного корреляционного уравнения $y = a + bx$								
$a$								
$b$								

### Вопросы для самоконтроля

1. Формула для расчета выборочного коэффициента парной корреляции  $r_{xy}$ .

2. Формула для расчета  $t$ -критерия Стьюдента, используемого при проверке значимости выборочного коэффициента корреляции.

3. Как обозначается табличное значение критерия Стьюдента и как выбирается?
4. Формула  $z$ -преобразования Фишера.
5. Построение доверительного интервала для коэффициента парной корреляции.
6. Понятие коэффициента парной корреляции.
7. Понятие корреляционного анализа.
8. Значимость выборочного коэффициента парной корреляции.

---

## 2.2. ОСНОВЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

---

### Лабораторная работа 2.2.1

---

#### ОДНОФАКТОРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

---

**Цель работы:** приобретение навыков построения эмпирических моделей процессов в виде полиномиальных регрессионных функций от одной входной переменной.

#### Теоретическая часть

Под регрессионным анализом понимают исследование закономерностей связи между явлениями (процессами, между параметром оптимизации и фактором), которые зависят от многих, часто неконтролируемых (случайных) факторов. В регрессионном анализе исследуют связь между зависимой (выходной) переменной и одной или несколькими независимыми (входными) переменными. Зависимую переменную будем обозначать  $y$ , а независимые –  $x_k$ , где  $k = 1, \dots, l$ , а  $l$  – число независимых переменных. Независимые переменные можно рассматривать как элементы вектора  $\bar{x}$  – вектора независимых переменных:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_l). \quad (2.28)$$

Регрессионному анализу подвергается набор экспериментальных данных в виде значений зависимой переменной при соответствующих значениях независимых переменных, который можно представить как множество ( $D$ ) точек в  $l$ -мерном факторном пространстве:

$$D = \{(y_i, \bar{x}_i), i = 1, \dots, n\}, \quad (2.29)$$

где  $n$  – число экспериментальных точек.



Зависимая переменная рассматривается как случайная величина, а независимые переменные – как неслучайные (детерминированные) величины. Такой подход значительно упрощает использование методов теории вероятностей и математической статистики для оценки функциональной связи между изучаемыми переменными. Функция, связывающая зависимую переменную с независимыми, называется регрессионной и в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$y(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{\alpha}), \quad (2.30)$$

где  $\bar{\alpha}$  – вектор коэффициентов, входящих в функциональную зависимость. Поскольку  $y$  – случайная величина, то регрессионная функция должна возвращать математическое ожидание.

В соответствии с методом регрессионного анализа  $y$  считается случайной величиной, подчиняющейся нормальному закону распределения. Поэтому, согласно закономерностям теории вероятностей, при каждом фиксированном значении вектора  $\bar{x}$  величина  $y$  является случайной величиной с определенным (зависящим от  $\bar{x}$ ) условным распределением вероятностей. В этой связи зависимость (2.30) правильнее представлять как зависимость условного математического ожидания случайной величины  $y$  ( $M[y|\bar{x}]$ ) от  $\bar{x}$ . Зависимости такого типа принято называть *уравнениями регрессии*:

$$M[y|\bar{x}] = f(\bar{x}, \bar{\alpha}), \quad (2.31)$$

а коэффициенты уравнения (2.31)  $\bar{\alpha} = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m]$  называются *теоретическими коэффициентами регрессии*.

Так как коэффициенты ( $\bar{\alpha}$ ) определяются по ограниченной выборке (статистике) экспериментальных данных, то их значения отличаются от истинных (теоретических) и обозначаются  $\bar{a}$  (так называемые *выборочные коэффициенты регрессии*). В результате регрессионного анализа получают *приближенное уравнение регрессии*, в котором вместо условного математического ожидания величины  $y$   $M[y|\bar{x}]$  фигурирует ее оценка  $\hat{y}$  и выборочные коэффициенты регрессии  $\bar{a}$ :

$$\hat{y}(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{a}). \quad (2.32)$$

Регрессионный анализ обычно используется в том случае, если причинно-следственные связи между зависимой переменной и независимыми переменными или факторами сложны и невозможно без опыта оценить силу и характер зависимости. Поэтому вид регрессионной функции может выбираться произвольно, и часто выбирается линейная функция, если требуется оценить силу влияния фактора. Также можно

один и тот же набор экспериментальных точек обработать с использованием разных регрессионных функций и, используя статистические критерии для оценки адекватности функции и значимости коэффициентов, выбрать наилучшую функцию. Рассмотрим вначале уравнения регрессии для случая одного фактора, т. е. когда имеется только одна независимая переменная  $x$ .

Если вид математической зависимости между параметром оптимизации и варьируемым фактором *a priori* (от латинского «до опыта») неизвестен, то часто в качестве регрессионной модели используют полиномы некоторого порядка:

$$\hat{y}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k, \quad (2.33)$$

где  $k$  – порядок полинома.

Так, полиномиальная модель первого порядка (линейная) имеет вид

$$\hat{y}(x) = a_0 + a_1x; \quad (2.34)$$

– полином второго порядка –

$$\hat{y}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; \quad (2.35)$$

– модель третьего порядка –

$$\hat{y}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2.36)$$

Полиномиальная модель первого порядка определяется двумя параметрами:  $a_0$  и  $a_1$ , модель второго порядка – тремя параметрами:  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$ , модель третьего порядка – четырьмя параметрами:  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ .

Для нахождения параметров регрессионной модели используем метод наименьших квадратов. Суть этого метода заключается в минимизации суммы квадратов отклонений между найденными на опыте значениями параметра оптимизации и предсказываемыми данной моделью.

Рассмотрим этот метод на примере линейной модели в случае одного фактора. Пусть был поставлен эксперимент, состоящий из  $n$  опытов, в которых варьировались значения какого-то одного фактора ( $x$ ) и определялись значения параметра оптимизации ( $y$ ). В результате получен набор из  $n$  значений фактора и соответствующих им значений параметра оптимизации:

$$\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{matrix} \quad \text{или} \quad (x_i, y_i), \quad i:1 \dots n. \quad (2.37)$$

Разность между экспериментальным и вычисленным по уравнению регрессии значением  $y$  называется отклонением или невязкой.

В случае линейного уравнения регрессии отклонение для каждого опыта можно выразить по формуле

$$s_i = y_i - a_0 - a_1 x_i. \quad (2.38)$$

Если верна линейная модель связи между  $y$  и  $x$ , то ненулевые значения отклонений порождаются только случайными ошибками опыта. Необходимо подобрать такие значения параметров модели  $a_0$  и  $a_1$ , при которых значения отклонений будут минимальны. Это требование обычно записывают в виде задачи нахождения минимума суммы квадратов отклонений, как функции нескольких переменных, в качестве которых выступают искомые параметры модели. Сумма квадратов отклонений записывается в виде

$$S = \sum_{i=1}^n s_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2. \quad (2.39)$$

Эта функция двух переменных  $a_0$  и  $a_1$ . Известно, что минимум функции нескольких переменных достигается при одновременном равенстве нулю частных производных функции по всем переменным, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0. \quad (2.40)$$

Последние два уравнения образуют систему с двумя неизвестными, решением которой можно получить значения параметров  $a_0$  и  $a_1$ , при которых достигается минимум суммы квадратов отклонений.

Выразим в явном виде эту систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0, \\ -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0; \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

Из последних двух уравнений выразим формулы для нахождения параметров линейной модели:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}; \quad a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (2.42)$$

Как видно, расчетные формулы для коэффициентов линейного уравнения регрессии достаточно сложные и громоздкие. Если использовать

уравнения регрессии с бóльшим числом коэффициентов, то формулы для расчета коэффициентов будут еще более сложными и громоздкими.

Формулы для расчета коэффициентов уравнения регрессии по методу наименьших квадратов намного проще выглядят, если их представить в матричном виде. Так, для линейного уравнения регрессии можно ввести следующие векторы и матрицы:

– вектор коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}; \quad (2.43)$$

– вектор значений выходной переменной:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad (2.44)$$

– матрицу значений входной переменной:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Тогда система уравнений (2.41) для определения коэффициентов уравнения регрессии в матричной форме будет иметь вид

$$\Phi^T \Phi A = \Phi^T Y. \quad (2.46)$$

Решение системы уравнений (2.46) в матричной форме имеет вид

$$A = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y. \quad (2.47)$$

Матрица

$$C = (\Phi^T \Phi)^{-1} \quad (2.48)$$

называется ковариационной или матрицей ошибок, которая может использоваться для оценки случайных погрешностей коэффициентов уравнения регрессии и их взаимозависимости.

Если известна выборочная оценка дисперсии выходной переменной, то можно рассчитать случайную погрешность найденных коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$  уравнения регрессии, оценить значимость

коэффициентов и проверить адекватность уравнения регрессии для описания экспериментальных данных.

Проверку адекватности полученной модели можно провести по критерию Фишера:

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2}, \quad (2.49)$$

где  $S_{ad}^2$  – выборочная оценка дисперсии адекватности уравнения регрессии;  $S_y^2$  – выборочная оценка дисперсии воспроизводимости выходной переменной  $y$ .

Дисперсия адекватности характеризует погрешность модели и определяется по формуле

$$S_{ad}^2 = \frac{S}{v_{ad}} = \frac{S}{n - p}, \quad (2.50)$$

где  $v_{ad}$  – число степеней свободы дисперсии адекватности;  $p$  – число параметров в уравнении модели (в случае линейного уравнения регрессии  $p = 2$ ).

Дисперсия воспроизводимости характеризует погрешность эксперимента. Она рассчитывается на основе данных параллельных опытов. Допустим, параллельные опыты проводились в одной какой-то точке (при одном и том же значении  $x$ ). Обозначим полученные значения  $y$ :

$$y_{pi}, i: 1, \dots, k, \quad (2.51)$$

где  $k$  – число параллельных опытов. Тогда дисперсия воспроизводимости рассчитывается следующим образом<sup>1</sup>:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (y_{pi} - y_{p\text{cp}})^2}{k - 1}, \quad (2.52)$$

где  $y_{p\text{cp}}$  – среднее арифметическое значение  $y$  в параллельных опытах. Знаменатель в последнем выражении называют также числом степеней свободы дисперсии воспроизводимости:

$$v_y = k - 1. \quad (2.53)$$

Это число используется при выборе табличных значений критериев Стьюдента и Фишера в качестве числа степеней свободы распределений Стьюдента и Фишера соответственно.

---

<sup>1</sup>Если параллельные опыты ставятся не в одной точке, а в разных, то формулы для расчета дисперсии воспроизводимости будут немного другими. Подробнее см. в лекциях по дисциплине.

Рассчитанное значение критерия Фишера сравнивают с табличным ( $F_{\text{табл}}$ ) при выбранном уровне значимости  $\alpha$ . Табличное значение критерия Фишера представляет собой квантиль распределения Фишера уровня  $1 - \alpha$  с числом степеней свободы  $\nu_{ad}$  и  $\nu_y$ :

$$F_{\text{табл}} = F_{1-\alpha}(\nu_{ad}, \nu_y). \quad (2.54)$$

Условие адекватности уравнения регрессии при выбранном уровне значимости можно выразить неравенством:

$$F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}}. \quad (2.55)$$

Эффективность регрессионной модели можно оценить по отношению дисперсии относительно среднего к дисперсии адекватности:

$$F_u = \frac{S_{\text{ср}}^2}{S_{ad}^2}, \quad (2.56)$$

где  $S_{\text{ср}}^2$  – дисперсия относительно среднего. Она вычисляется по формуле

$$S_{\text{ср}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}, \quad (2.57)$$

где  $\bar{y}$  – среднее значение  $y$ .

$F_u$  показывает, во сколько раз регрессионная модель точнее описывает экспериментальные данные, чем простое среднее. Регрессионная модель считается эффективной, если  $F_u > (3-5)$ .

Произведение ковариационной матрицы на дисперсию воспроизводимости представляет собой матрицу дисперсий-ковариаций коэффициентов уравнения регрессии, которая имеет следующий вид:

$$C \cdot S_y^2 = \begin{pmatrix} S_{a_0}^2 & \text{cov}(a_0, a_1) \\ \text{cov}(a_1, a_0) & S_{a_1}^2 \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

где  $S_{a_0}^2$  и  $S_{a_1}^2$  – выборочные дисперсии коэффициентов уравнения регрессии;  $\text{cov}(a_0, a_1)$ ,  $\text{cov}(a_1, a_0)$  – ковариации коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$ . Для оценки случайных ошибок и определения значимости коэффициентов уравнения регрессии необходимы их дисперсии. Дисперсии коэффициентов линейного уравнения регрессии можно выразить формулами из матрицы (2.58):

$$S_{a_0}^2 = C_{00} S_y^2 \quad \text{и} \quad S_{a_1}^2 = C_{11} S_y^2, \quad (2.59)$$

где  $C_{00}$  и  $C_{11}$  – диагональные элементы матрицы ошибок  $C$  (2.48). Нижние индексы означают номер строки и номер столбца матрицы, при условии, что нумерация строк и столбцов начинается с 0. Такой порядок нумерации принят по умолчанию в системе Mathcad.

Зная дисперсию коэффициента уравнения регрессии, можно оценить его значимость с помощью критерия Стьюдента. Критерий Стьюдента представляет собой отношение модуля коэффициента уравнения регрессии к его среднеквадратичному отклонению:

$$t_0 = \frac{|a_0|}{S_{a_0}} = \frac{|a_0|}{S_y \sqrt{C_{00}}} \quad \text{и} \quad t_1 = \frac{|a_1|}{S_{a_1}} = \frac{|a_1|}{S_y \sqrt{C_{11}}}. \quad (2.60)$$

Коэффициент уравнения регрессии значим, если соответствующий критерий Стьюдента больше табличного значения при некотором выбранном уровне значимости  $\alpha$ . Табличное значение критерия Стьюдента представляет собой квантиль уровня  $1 - \frac{\alpha}{2}$  распределения Стьюдента с числом степеней свободы, равным числу степеней свободы дисперсии воспроизводимости  $v_y$ :

$$t_{\text{табл}} = t_{1 - \frac{\alpha}{2}}(v_y). \quad (2.61)$$

Таким образом, условия значимости для коэффициентов линейного уравнения регрессии  $a_0$  и  $a_1$  можно записать соответственно:

$$t_0 > t_{\text{табл}} \quad \text{и} \quad t_1 > t_{\text{табл}}. \quad (2.62)$$

При известной дисперсии коэффициента уравнения регрессии можно построить доверительный интервал для среднего, который можно выразить следующими неравенствами:

– для коэффициента  $a_0$ :

$$a_0 - \Delta a_0 < \alpha_0 < a_0 + \Delta a_0; \quad (2.63)$$

– для коэффициента  $a_1$ :

$$a_1 - \Delta a_1 < \alpha_1 < a_1 + \Delta a_1. \quad (2.64)$$

В данных неравенствах  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  представляют собой средние (истинные) значения коэффициентов линейного уравнения регрессии,  $a_0$  и  $a_1$  – их выборочные оценки, а  $\Delta a_0$  и  $\Delta a_1$  – радиусы доверительных интервалов для соответствующих коэффициентов. Радиусы доверительных интервалов можно рассчитать с помощью табличного критерия Стьюдента по формулам:

$$\Delta a_0 = t_{\text{табл}} S_{a_0} = t_{\text{табл}} S_y \sqrt{C_{00}} \quad \text{и} \quad \Delta a_1 = t_{\text{табл}} S_{a_1} = t_{\text{табл}} S_y \sqrt{C_{11}}. \quad (2.65)$$

Матричная формула (2.47) может быть использована для расчета коэффициентов по методу наименьших квадратов любых линейных по коэффициентам уравнений регрессии. Нужно только соответствующим образом модифицировать матрицу значений входной переменной  $\Phi$ . Линейное по коэффициентам уравнение регрессии является суммой слагаемых, состоящих из произведения коэффициента уравнения на некоторое выражение, зависящее только от входной переменной  $x$ :

$$\hat{y}(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x). \quad (2.66)$$

Число столбцов в матрице  $\Phi$  должно равняться числу коэффициентов в уравнении регрессии, и каждый столбец соответствует какому-то коэффициенту. Число строк матрицы  $\Phi$  равно числу опытных точек. В каждой строке представлены значения, вычисленные подстановкой опытных значений  $x_i$  в соответствующие выражения от  $x$  при каждом коэффициенте уравнения. Для линейного по коэффициентам уравнения в общем виде (2.66) матрица входных переменных будет выглядеть таким образом:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Размерность этой матрицы –  $n \times (m + 1)$ ,  $n$  – число экспериментальных точек,  $m + 1$  – число коэффициентов в уравнении регрессии.

Для полинома второго порядка (2.35) матрица входных переменных  $\Phi$  может быть представлена в следующем виде:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

При этом вектор коэффициентов будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$



Аналогично для полинома 3-го порядка (2.36) матрицы  $\Phi$  и  $A$  будут иметь вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Адекватность уравнения регрессии можно проверить по условию (2.55). При этом дисперсию адекватности для произвольного уравнения регрессии  $\hat{y}(x)$  можно вычислить по формуле

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}(x_i))^2}{v_{ad}}, \quad (2.71)$$

где  $v_{ad}$  – число степеней свободы дисперсии адекватности, которое равно числу экспериментальных точек ( $n$ ) за вычетом числа коэффициентов в уравнении регрессии ( $p$ ):

$$v_{ad} = n - p. \quad (2.72)$$

Для проверки значимости коэффициента уравнения регрессии общего вида (2.66) рассчитывают критерий Стьюдента по формуле, аналогичной формулам (2.60):

$$t_j = \frac{|a_j|}{S_{a_j}} = \frac{|a_j|}{S_y \sqrt{C_{jj}}}, \quad (2.73)$$

где  $C_{jj}$  – диагональный элемент матрицы ошибок;  $j$  – номер коэффициента. Матрица ошибок  $C$  рассчитывается по формуле (2.48) из матрицы входных переменных  $\Phi$ , составленной в соответствии с уравнением модели. Номера коэффициентов должны соответствовать номерам столбцов матрицы входных переменных.

Коэффициент  $a_j$  уравнения регрессии будет значим при условии

$$t_j > t_{\text{табл.}} \quad (2.74)$$

Радиус доверительного интервала для коэффициента  $a_j$  может быть найден аналогично (2.65):

$$\Delta a_j = t_{\text{табл.}} S_{a_j} = t_{\text{табл.}} S_y \sqrt{C_{jj}}. \quad (2.75)$$

## Задание

Найдите параметры полиномиальных моделей первого, второго и третьего порядка для заданных значений  $x$  и  $y$ , оцените эффективность регрессионных моделей и оцените значимость полученных параметров по критерию Фишера. Проверьте значимость коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента и постройте доверительный интервал для значимых коэффициентов регрессии. Экспериментальные данные и вариант задания нужно взять у преподавателя, который должен выдать набор экспериментальных точек и данные по параллельным опытам для расчета дисперсии воспроизводимости.

## Ход работы

1. Импортируйте из текстового файла экспериментальные данные  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $n$  – число экспериментальных точек. Можно использовать диалог «Мастер импорта данных» в системе Mathcad. Ниже приводится описание работы с данным «мастером».

Для вызова диалога используйте команды меню «Вставка» → «Данные» → «Мастер импорта данных...». Выберите нужный формат файла. Чаще всего данные представлены в текстовом формате. Есть два вида текстовых форматов: «Текст с разделителями» и «Текст фиксированной ширины».

Выберите нужный файл, используя кнопку «Обзор», после чего появится диалоговое окно с настройками, зависящими от выбранного ранее формата файла.

Чаще всего для загрузки данных используют формат «Текст с разделителями». В качестве символов-разделителей могут использоваться пробел, табуляция и др. Обычно в настройках диалога в поле выбора символа-разделителя выбирается опция «Авто». В этом случае программа анализирует структуру текстового файла и автоматически выбирает символ-разделитель. В любом случае структуру текстового файла и используемый символ-разделитель можно посмотреть через стандартное приложение Windows «Блокнот».

Формат «Текст фиксированной ширины» используется, если в каждой строке текстового файла ширина столбцов данных одинакова. В этом случае нужно посчитать число символов, приходящихся на каждый столбец данных, и ввести в соответствующее поле в настройках диалога через запятую число символов на каждый последовательный столбец численных данных.

В первом диалоге настроек в поле «Начальная строка» введите номер строки, с которой начинаются численные данные, так как файл может содержать заголовки столбцов, которые не нужно импортировать. Остальные поля диалога можно не изменять. После нажатия на кнопку «Далее» появится диалог параметров текста для конвертации в числовой формат. В этом диалоге обратите внимание на важный параметр «Десятичный разделитель», который указывает символ, используемый для деления целой и дробной части числа. Нужно сделать правильный выбор десятичного разделителя: «точка» или «запятая», для чего также можно использовать приложение «Блокнот». Остальные настройки диалога обычно не меняют.

Затем нажмите кнопку «Далее» для перехода к последнему диалогу «Мастера импорта данных», в котором можно выбрать диапазон загружаемых столбцов и строк числовых данных. По умолчанию загружаются все столбцы и строки, и обычно здесь ничего менять не надо. После нажатия кнопки «Готово» текстовые данные будут конвертированы в числовой формат и представлены в системе MathCad в виде типа данных «Матрица».

В данной работе импортированные данные будут представлять собой матрицу, состоящую из двух столбцов, которой нужно назначить идентификатор, например  $D$ . Первый столбец обычно представляет собой значения входной переменной  $x$ , а второй – значения выходной переменной  $y$ . Обратите внимание, чтобы введенные данные в матрице представляли собой числа, а не текст; текст отображается кавычками "80". Если есть кавычки, значит данные были конвертированы неправильно и нужно повторить импорт данных с другими настройками.

2. Постройте линейную регрессионную модель:

2.1) формирование вектор-столбцов выходных переменных  $y$  и входных переменных  $x$  из импортированных данных.

$$y:=D^{(1)}; x:=D^{(0)};$$

2.2) расчет коэффициентов линейного уравнения регрессии по формулам (2.42);

2.3) проверка адекватности линейной модели по критерию Фишера при уровнях значимости 0,10; 0,05 и 0,01:

2.3.1) расчет дисперсии адекватности по уравнению (2.50);

2.3.2) определение дисперсии воспроизводимости по экспериментальным данным для параллельных опытов по формуле (2.51);

2.3.3) нахождение табличных значений критерия Фишера при заданных уровнях значимости  $\alpha$ . Можно использовать встроенную в MathCad функцию:

$$F_{\text{табл}} = \text{qF}(1 - \alpha, \nu_{ad}, \nu_y); \quad (2.76)$$

2.3.4) проверка адекватности модели при заданных уровнях значимости;

2.4) оценка эффективности линейной регрессионной модели с использованием формулы (2.56).

3. Постройте полиномиальные регрессионные модели 1-го, 2-го и 3-го порядков, используя матричный подход для расчета коэффициентов уравнения регрессии. Для каждой модели проведите расчеты в порядке, представленном ниже:

3.1) формирование вектор-столбца выходных переменных  $Y$  (2.44) и матрицы входных переменных  $\Phi$  (2.45), (2.68), (2.70). Ниже (рис. 2.1) представлен пример формирования матрицы входных переменных (2.46) для линейного уравнения регрессии в системе MathCad;

```
n := rows(D)
i := 0..n - 1
Phii,0 := 1    $\Phi_{i,1} := D_{i,0}$ 
```

Рис. 2.1. Снимок экрана с фрагментом документа Mathcad создания матрицы входных переменных линейного уравнения регрессии (2.45)

3.2) расчет коэффициентов регрессии по матричной формуле (2.47);

3.3) определение корреляционной матрицы по формуле (2.48);

3.4) расчет дисперсии воспроизводимости по данным для параллельных опытов;

3.5) проверка значимости коэффициентов корреляционного уравнения по неравенству (2.74) при уровнях значимости 0,10; 0,05 и 0,01. Табличное значение критерия Стьюдента можно найти с использованием встроенной в MathCad функции:

$$t_{\text{табл}} = qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, v_y\right); \quad (2.77)$$

3.6) расчет дисперсии адекватности (2.71) и критерия Фишера (2.49);

3.7) проверка адекватности модели по неравенству (2.55);

3.8) расчет дисперсии относительно среднего (2.57) и оценка эффективности модели с помощью показателя (2.56);

3.9) построение доверительных интервалов для коэффициентов регрессии. Радиусы доверительных интервалов для коэффициентов рассчитывают по формуле (2.75);

3.10) построение графиков зависимостей  $y$  от  $x$ . На графиках привести исходные экспериментальные данные в виде точечного графика, а также график построенных уравнений регрессии в виде линейного графика. Вид графиков можно менять в диалоге настроек, который появляется после двойного щелчка мышью по области графика.

## Лабораторная работа 2.2.2

### МНОГОФАКТОРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

**Цель работы:** проведение двухфакторного регрессионного анализа на основе полиномиальных моделей первого и второго порядка.

#### Теоретическая часть

Если набор экспериментальных данных включает в себя две входные независимые переменные и одну выходную, то каждая точка данных будет представлена тремя числами:

$$\begin{aligned} & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \\ & x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n} \quad \text{или} \quad (x_{1i}, x_{2i}, y_i), \quad i:1\dots n. \\ & y_1, y_2, \dots, y_n \end{aligned} \quad (2.78)$$

Полиномиальная модель первого порядка или линейное уравнение регрессии для двух факторов  $x_1, x_2$  имеет вид

$$\hat{y}(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2. \quad (2.79)$$

Полиномиальная модель второго порядка содержит уже 6 коэффициентов:

$$\hat{y}(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{12} x_1 x_2. \quad (2.80)$$

Иногда уравнение второго порядка используют без квадратичных членов, тогда получают уравнение первого порядка с учетом взаимного влияния факторов:

$$\hat{y}(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2. \quad (2.81)$$

Для определения коэффициентов уравнений методом наименьших квадратов будем использовать матричную формулу (2.47).

Матрица входных переменных и вектор коэффициентов для линейного уравнения регрессии от двух входных переменных (2.79) выглядят следующим образом:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Для уравнения регрессии, соответствующего полиному второго порядка от двух переменных (2.80), матрица входных переменных и вектор коэффициентов будут иметь вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{11}^2 & x_{21}^2 & x_{11}x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{12}^2 & x_{22}^2 & x_{12}x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{1n}^2 & x_{2n}^2 & x_{1n}x_{2n} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_{11} \\ a_{22} \\ a_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Аналогично для уравнения регрессии (2.81) матрица входных переменных и вектор коэффициентов будут выглядеть так:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{11}x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{12}x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{1n}x_{2n} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Формулы для расчета критериев Стьюдента, Фишера и радиуса доверительных интервалов для коэффициентов регрессии будут такими же, как в теоретической части предыдущей лабораторной работы «Однофакторный регрессионный анализ». Необходимо только следить за соответствием обозначений коэффициентов в уравнениях регрессии (2.79)–(2.81) и номерами столбцов в матрице входных переменных  $\Phi$ .

### Задание

Найдите коэффициенты полиномиальных моделей первого и второго порядка для двух факторов (2.79)–(2.81) на основе набора экспериментальных данных типа (2.78). Определите значимость коэффициентов

уравнений регрессии и адекватность регрессионных моделей при уровнях значимости 0,10 и 0,05. Оцените эффективность регрессионных моделей. Постройте доверительные интервалы для значимых коэффициентов уравнений регрессии при уровнях значимости 0,10 и 0,05. Набор экспериментальных данных нужно взять у преподавателя или в системе СДО в соответствии с заданным вариантом. Можно использовать свои экспериментальные данные, полученные при выполнении лабораторных работ по специальным дисциплинам.

### Ход работы

1. Импортируйте из текстового файла экспериментальные данные, используя «Мастер импорта данных». Описание смотрите выше в пункте «Ход работы» предыдущей лабораторной работы «Однофакторный регрессионный анализ». В данной работе импортированные данные будут представлять собой матрицу ( $D$ ), состоящую из трех столбцов. Первые два столбца – это значения входных переменных  $x_1$  и  $x_2$ , а третий столбец – значения выходной переменной  $y$ .

2. Постройте полиномиальные регрессионные модели для двух факторов по уравнениям (2.79)–(2.81), используя матричный подход для расчета коэффициентов уравнении регрессии. Для каждой модели проводят расчеты в представленном ниже порядке:

2.1) формирование матрицы входных переменных  $\Phi$  и вектора-столбца выходных переменных  $Y$ . Ниже (рис. 2.2) представлен пример формирования матрицы входных переменных (2.84) для уравнения регрессии полинома второго порядка в системе MathCad;

```
n := rows(D)
i := 0..n - 1
 $\Phi_{i,0} := 1$     $\Phi_{i,1} := D_{i,0}$     $\Phi_{i,2} := D_{i,1}$     $\Phi_{i,3} := (D_{i,0})^2$     $\Phi_{i,4} := (D_{i,1})^2$     $\Phi_{i,5} := D_{i,0} \cdot D_{i,1}$ 
```

Рис. 2.2. Снимок экрана с фрагментом документа Mathcad создания матрицы входных переменных вида (2.84)

2.2) расчет коэффициентов регрессии по матричной формуле (2.47);

2.3) определение корреляционной матрицы по формуле (2.48);

2.4) расчет дисперсии воспроизводимости по экспериментальным данным для параллельных опытов;

2.5) проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии по неравенству (2.74) при уровнях значимости 0,10 и 0,05;

2.6) расчет дисперсии адекватности (2.71), критерия Фишера (2.49) и проверка адекватности модели по неравенству (2.55);

2.7) расчет дисперсии относительно среднего (2.57) и оценка эффективности модели с помощью показателя (2.56);

2.8) построение доверительных интервалов для коэффициентов регрессии. Радиусы доверительных интервалов для коэффициентов рассчитывают по формуле (2.75);

2.9) построение трехмерных графиков с данными и графиков уравнений моделей в виде графиков поверхности. На графиках привести исходные экспериментальные данные в виде точек, а график уравнения регрессии в виде поверхности. Следите, чтобы диапазоны значений  $x_1$  и  $x_2$  для графиков поверхности совпадали с диапазоном экспериментальных данных. Вид графиков и диапазоны значений по осям можно менять в диалоге настроек, который появляется после двойного щелчка мышью по области графика.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Понятие регрессионного анализа.
2. Каким методом находят параметры регрессионной модели?
3. Как определяется дисперсия адекватности?
4. Что включает в себя регрессионный анализ?
5. В чем заключается суть метода наименьших квадратов?
6. Как определяется эффективность регрессионной модели?
7. Условия использования регрессионного анализа.
8. Что называется отклонением (невязкой) в методе наименьших квадратов?
9. Матричная запись системы линейных уравнений для нахождения параметров полиномиальных моделей методом наименьших квадратов.
10. Понятие однофакторного регрессионного анализа.
11. Что такое сумма квадратов отклонений?
12. Что такое ковариационная матрица?
13. Понятие регрессионной модели.
14. По каким формулам находят коэффициенты линейной модели?
15. Как определить значимость параметров полиномиальной регрессионной модели?
16. Какие регрессионные функции чаще всего используют, если вид математической зависимости между параметром оптимизации и фактором неизвестен?



17. В чем заключается статистическая обработка регрессионной модели?

18. Как оценить погрешности определения параметров регрессионной модели с использованием коэффициента Стьюдента?

19. Формула для расчета коэффициентов регрессионного уравнения в матричном виде.

20. Формула для расчета корреляционной матрицы  $C$  в матричном виде.

21. Матрица входных переменных для  $\Phi$  для полинома 2-го порядка.

22. Проверка значимости коэффициента уравнения регрессии  $a_j$ . Формула для расчета критерия Стьюдента  $t_j$ . Как обозначается табличное значение критерия Стьюдента и как оно выбирается?

23. Построение доверительного интервала для коэффициента уравнения регрессии  $a_j$ .

24. Формула для расчета дисперсии воспроизводимости  $S_y^2$  для случая параллельных опытов в одной экспериментальной точке.

25. Проверка адекватности модели по критерию Фишера. Формула для расчета критерия Фишера. Табличное значение критерия Фишера и метод его выбора. Формула для расчета дисперсии адекватности.

## 3.1. ПРОСТЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### Лабораторная работа 3.1.1

#### СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

**Цель работы:** приобретение навыков построения теоретических моделей процессов, описываемых системами конечных уравнений.

#### Теоретическая часть

Технологические сети трубопроводов используются в химико-технологических системах для соединения разных аппаратов в единую технологическую линию. Рассмотрим сеть трубопроводов в виде простой гидравлической системы, которая включает только клапаны с постоянными коэффициентами пропускной способности и закрытые емкости или аккумуляторы. Пример схемы простой гидравлической системы, состоящей из 5 клапанов и 2 аккумуляторов представлен на рис. 3.1.

Для математического описания (МО) движения жидкости в простых гидравлических системах принимаются следующие допущения:

- во всех трубах протекает однофазный поток жидкости, температура которого одинакова на всех участках;
- все трубы располагаются на одном уровне, в системе не учитываются местные сопротивления и перепады давления в трубах, т. е. рассматриваются так называемые короткие трубопроводы;
- давление газа в аккумуляторах подчиняется законам идеальных газов.

Система уравнений МО гидравлической системы включает в себя следующие виды уравнений:

- уравнения для *расхода жидкостей*, движущихся через клапаны;
- уравнения *давления жидкости* на дно аккумулятора;
- уравнения *давления газа* над поверхностью жидкости в аккумуляторе;
- *балансовые уравнения* движения жидкости в узловых точках гидравлической системы;

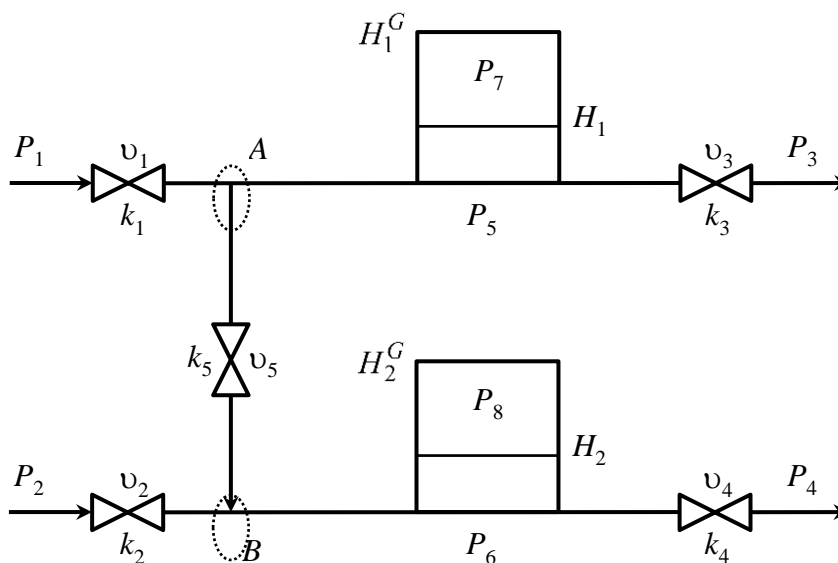


Рис. 3.1. Схема простой гидравлической системы

Формула для определения *расхода жидкости*, движущейся через клапан, в соответствии с уравнением Бернулли для суммарной удельной энергии элементарной струи идеальной жидкости при установившемся движении и с учетом допущений о простой гидравлической системе имеет вид

$$v = k \sqrt{P_{\text{ВХ}} - P_{\text{ВЫХ}}}, \quad (3.1)$$

где  $v$  – расход жидкости,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $k$  – коэффициент пропускной способности клапана,  $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Па}^{-1/2}$ ;  $P_{\text{ВХ}}$ ,  $P_{\text{ВЫХ}}$  – давления жидкости на входе и на выходе из клапана, Па. Вход и выход определяются в соответствии со стрелками на схеме гидравлической системы.

Для расчетов скорости движения жидкости через клапан необходимо использовать более универсальную запись предыдущей формулы, учитывающую направление движения жидкости через клапан:

$$v = \text{sign}(P_{\text{ВХ}} - P_{\text{ВЫХ}}) k \sqrt{|P_{\text{ВХ}} - P_{\text{ВЫХ}}|}, \quad (3.2)$$

где  $\text{sign}(x)$  – функция знака, которая может принимать только три значения:  $-1, 0, +1$  в соответствии со схемой

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Знак скорости потока жидкости становится отрицательным, если направление ее движения будет противоположным направлению стрелок на схеме гидравлической системы. Кроме того, выражение под корнем берется по модулю, чтобы в процессе расчетов не появлялась ошибка.

В соответствии со следствием из закона Паскаля *давление жидкости*  $P_{\text{жидк}}$  на дно аккумулятора определяется по формуле

$$P_{\text{жидк}} = P_{\text{газ}} + \rho g H, \quad (3.4)$$

где  $P_{\text{газ}}$  – давление газа над поверхностью жидкости, Па;  $\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $g$  – ускорение свободного падения, 9,8 м/с<sup>2</sup>;  $H$  – уровень жидкости в аккумуляторе, м.

Для определения давления газа  $P_{\text{газ}}$  используется соотношение для идеального газа:

$$P_{\text{газ}} V_{\text{газ}} = P_N V_N, \quad (3.5)$$

где  $V_{\text{газ}}$  – объем газа в аккумуляторе, м<sup>3</sup>;  $P_N$  – давление газа в аккумуляторе, не заполненном жидкостью, Па;  $V_N$  – объем аккумулятора, не заполненного жидкостью, м<sup>3</sup>.

Если принять площадь поперечного сечения аккумулятора постоянной по высоте, то

$$V_N = S \cdot H^G; \quad V_{\text{газ}} = S \cdot (H^G - H), \quad (3.6)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения аккумулятора, м<sup>2</sup>;  $H^G$  – высота аккумулятора, м;  $H$  – высота поднятия жидкости в аккумуляторе, м.

В результате *давление газа* в аккумуляторе будет определяться высотой поднятия уровня жидкости и исходным давлением газа в аккумуляторе, не заполненном жидкостью:

$$P_{\text{газ}} = P_N \frac{H^G}{H^G - H}. \quad (3.7)$$

Балансовые уравнения записываются для узловых точек схемы, в которых соединяются два и более трубопровода и происходит разделение или объединение потоков жидкости. Объединение или разделение потоков определяется в соответствии со стрелками, показывающими направление движения жидкости на схеме. Если в результате расчетов

получится какой-то из потоков отрицательный, то балансовые уравнения не изменятся. *Балансовое уравнение* в общем виде можно представить как разность суммы входящих потоков в узловую точку и суммы выходящих потоков из узловой точки, равную нулю:

$$\sum_{i \in \text{ВХ}} v_i - \sum_{j \in \text{ВЫХ}} v_j = 0. \quad (3.8)$$

Система уравнений математического описания стационарного режима движения жидкости в простой гидравлической системе представляет собой систему конечных уравнений (СКУ). После составления системы уравнений математического описания выбираются определяемые переменные, число которых должно быть равно числу уравнений в системе. Определяемые переменные выбираются в соответствии с решаемой задачей. В варианте лабораторной работы в качестве определяемых переменных выбирают те, значения которых не заданы в условии. Обычно определяемыми переменными являются давление жидкости в трубопроводах, давление газов в аккумуляторах, скорость протекания жидкости через клапаны и высота поднятия жидкости в аккумуляторах.

Для представленной выше схемы (рис. 3.1) система уравнений МО будет выглядеть следующим образом.

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad v_1 &= k_1 \cdot \text{sign}(P_1 - P_5) \sqrt{|P_1 - P_5|}. \\ 2. \quad v_2 &= k_2 \cdot \text{sign}(P_2 - P_6) \sqrt{|P_2 - P_6|}. \\ 3. \quad v_3 &= k_3 \cdot \text{sign}(P_5 - P_3) \sqrt{|P_5 - P_3|}. \\ 4. \quad v_4 &= k_4 \cdot \text{sign}(P_6 - P_4) \sqrt{|P_6 - P_4|}. \\ 5. \quad v_5 &= k_5 \cdot \text{sign}(P_5 - P_6) \sqrt{|P_5 - P_6|}. \\ 6. \quad v_1 - v_3 - v_5 &= 0. \\ 7. \quad v_2 + v_5 - v_4 &= 0. \\ 8. \quad P_5 &= P_7 + \rho g H_1. \\ 9. \quad P_7 &= \frac{H_1^G}{H_1^G - H_1}. \\ 10. \quad P_6 &= P_8 + \rho g H_2. \\ 11. \quad P_8 &= \frac{H_2^G}{H_2^G - H_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Уравнения п. 1–5 – это уравнения для скорости потоков жидкости через клапаны (3.2). Уравнения п. 6 и 7 – уравнения балансов для точек соединения трубопроводов. Уравнения п. 8 и 10 – уравнения для давления жидкости на дно аккумулятора (3.4). Уравнения п. 9 и 11 – для давления газа в аккумуляторах (3.7).

Так как система конечных уравнений (3.9) включает 11 независимых уравнений (в дальнейшем используется последовательная нумерация уравнений от 1 до 11), она может быть решена, в принципе, относительно любых 11 переменных, которые называются *определяемыми переменными*. Все остальные переменные системы (3.9) должны задаваться.

Кроме этого, должны быть специфицированы коэффициенты (например, коэффициенты пропускной способности клапанов – вектор  $\vec{k}$ ), а также постоянные в системе уравнений (3.9) – геометрические высоты емкостей  $H_1^G$ ,  $H_2^G$ , давление в незаполненной жидкостью емкости  $P_N$  и плотность жидкости  $\rho$ .

Исходя из физических соображений определяемыми переменными выбираются:

- скорость движения жидкости на всех участках трубопроводов, отходящих от точек соединения  $A$  и  $B$ , –  $v_1, v_2, v_3, v_4$  и  $v_5$ ;
- давления жидкости в трубопроводах внутри системы  $P_5$  и  $P_6$ ;
- давления газов в аккумуляторах  $P_7$  и  $P_8$ ;
- уровни жидкости в аккумуляторах  $H_1$  и  $H_2$ .

Давления на входе в систему  $P_1$  и  $P_2$ , а также давления на выходе из системы  $P_3$  и  $P_4$  задаются независимо и согласно физическому смыслу решаемой задачи. Это означает, что, если предполагается движение жидкости в соответствии со стрелками, изображенными на рис. 3.1, давления на входе в систему  $P_1$  и  $P_2$  должны быть больше давлений на выходе  $P_3$  и  $P_4$ .

Для составления алгоритма решения системы уравнений будем использовать информационную матрицу. Информационная матрица системы уравнений позволяет наглядно составить алгоритм решения системы уравнений декомпозиционным методом. Декомпозиционный метод основан на снижении размерности системы уравнений путем последовательного выражения определяемых переменных из уравнений системы. Этот метод эффективен, если определяемые переменные одновременно не входят во все уравнения системы. В идеале декомпозиционным методом можно свести решение системы уравнений к задаче нахождения корня нелинейного уравнения от одной переменной. Алгоритмы решения таких задач хорошо известны в вычислительной математике и сравнительно просты.

*Информационная матрица* системы уравнений представляет собой квадратную матрицу, строки которой соответствуют номерам уравнений, а столбцы – определяемым переменным. Информационная матрица формируется следующим образом: в  $i$ -й строке, соответствующей  $i$ -му уравнению, в  $j$ -м столбце ставится знак плюс, если  $i$ -е уравнение включает  $j$ -ю определяемую переменную. Если  $i$ -е уравнение не содержит  $j$ -ю переменную, то в соответствующей ячейке матрицы ничего не ставится.

При построении информационных матриц используются следующие условные обозначения:

а) для левого столбца информационных матриц – номеров уравнений:

1 – конечное уравнение 1;

$1^*$  – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, представленное в конечно-разностном виде;

$\overline{10}$  – система конечных уравнений;

$\overline{11}^*$  – система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, представленная в конечно-разностном виде;

$\overline{11}^*$  – система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, представленная в конечно-разностном виде;

5 – номер корректирующего уравнения в системе для нахождения определяемой переменной;

$\overline{12}$  – система конечных корректирующих уравнений для нахождения определяемых переменных;

б) для правого столбца информационных матриц: № – последовательность вычислений.

В поле информационных матриц применяются условные обозначения, представленные на рис. 3.2.

д) для правого столбца информационных матриц: № – последовательность вычислений.

В поле информационных матриц применяются условные обозначения, представленные на рис. 3.2.

В поле информационных матриц применяются условные обозначения, представленные на рис. 3.2.

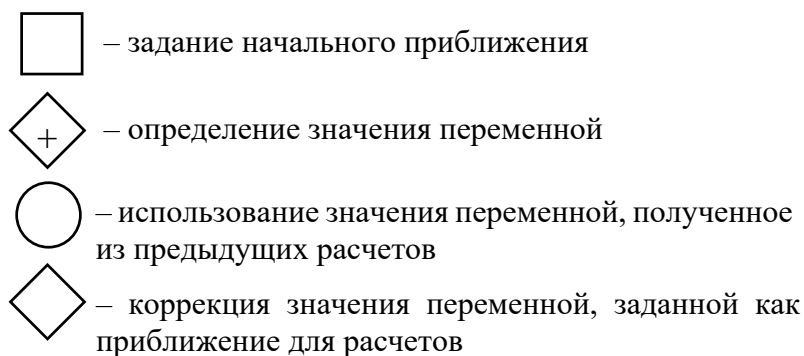


Рис. 3.2. Условные обозначения в ячейках информационной матрицы

Разработка алгоритмов решения задачи – моделирующих алгоритмов (МА) – выполняется с применением *блок-схем алгоритмов* расчетов, реализующих выбранный метод или методы решения задачи. При этом предлагается пользоваться условными обозначениями графических блоков, представленными на рис. 3.3.

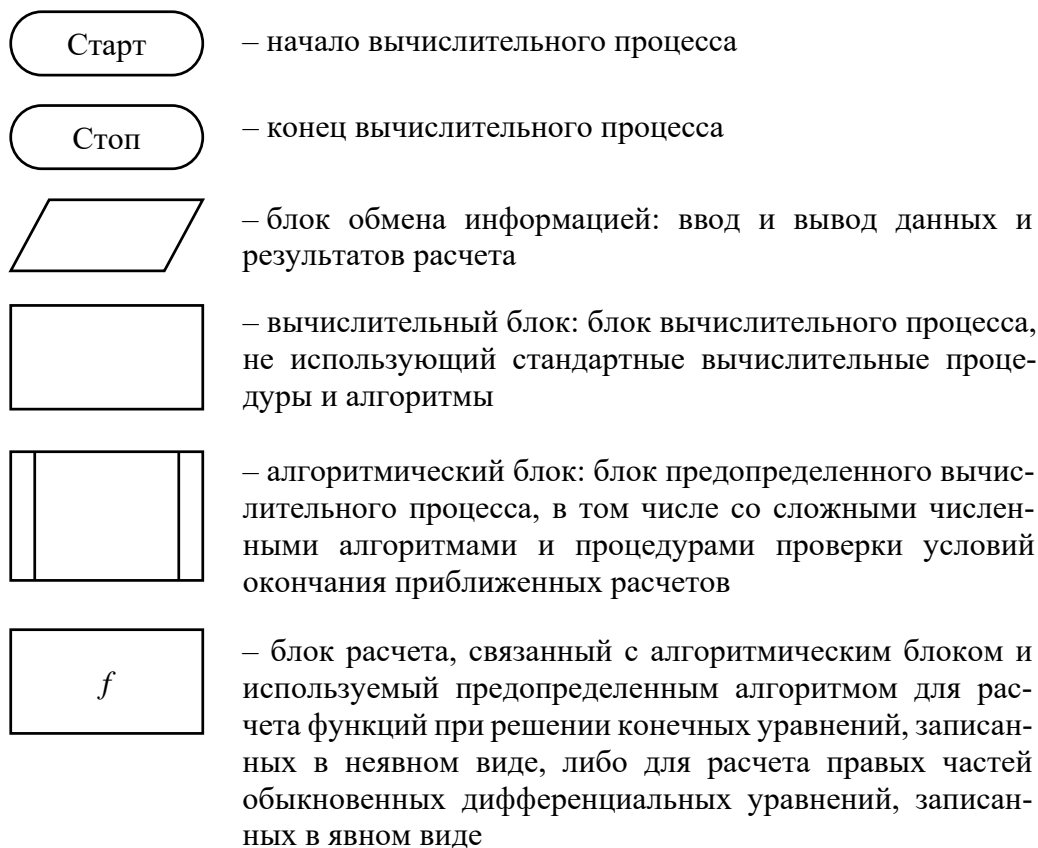


Рис. 3.3. Условные обозначения на блок-схемах алгоритмов решения задачи

Составленный алгоритм решения системы уравнений реализуется в MathCad с помощью программы-функции, вычисляющей левую часть корректирующего уравнения или программ-функций, вычисляющих левые части корректирующих уравнений. Затем эта (эти) программа-функция (программы-функции) используется для решения системы уравнений меньшей размерности. Решать такую систему можно с использованием стандартных средств MathCad, например блока **Given Find**. В случае, если получилось одно корректирующее уравнение, то его можно решить с применением какого-нибудь стандартного алгоритма, например метода *дихотомии* или метода *Ньютона*. Этот алгоритм нужно оформить в виде программы-функции.

Для системы уравнений (3.9) информационная матрица представлена в табл. 3.1.



Таблица 3.1

**Информационная матрица системы уравнений (3.9) математического описания стационарного режима движения жидкости в гидравлической системе (рис. 3.1)**

№ уравн.	Определяемые переменные										№ шага	
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$H_1$		$H_2$
1	+					+						3
2		+					+					7
3			+			+						4
4				+			+					8
5					+	+	+					6
6	+		+		+							5
7 кор ур		+		+	+					+		9
8						+		+		+		2
9								+		+		1
10							+		+		+	10, 11
11									+		+	10, 11

Каждое уравнение системы (3.9) содержит несколько определяемых переменных: как минимум две. Начальные приближения для итерационных расчетов при решении нелинейных уравнений следует задавать в тех уравнениях, которые содержат наименьшее число определяемых переменных (в данном случае две) и могут быть хорошо обоснованы из физических соображений. Например, значение приближения для  $H_1$  может быть задано в интервале от 0 до  $H_1^G$ .

Для обозначения задания начального приближения итерационного процесса вычисления в информационной матрице знак «плюс», соответствующий задаваемой переменной в конкретном уравнении, обводится квадратом. В данном примере в качестве начального приближения задается значение для переменной  $H_1$  и обводится квадратом знак «плюс» в уравнении (9). Первым шагом вычислительной процедуры будет вычисление значения переменной  $P_7$  по уравнению (9) (в правом столбце информационной матрицы ставится 1). Для обозначения переменной,

которая определяется в уравнении (9), соответствующий ей плюс в строке (9) обводится ромбом. Заданное значение приближения  $\tilde{H}_1$  и найденная переменная  $P_1$  справедливы для всей системы уравнений, и могут использоваться другими уравнениями системы. Значит, после первого шага будут известны текущие значения переменных  $H_1$  и  $P_7$ . Поэтому все остальные плюсы в столбцах  $H_1$  и  $P_7$  нужно обвести кружком, и это означает, что текущие значения переменных вычислены к 1-му шагу.

После 1-го шага в уравнении (8) кружками обведены плюсы для переменных  $H_1$ , и  $P_7$  и не обведен только один плюс для переменной  $P_5$ . Это означает, что после 1-го шага значения переменных  $H_1$ , и  $P_7$  известны, а  $P_5$  – неизвестно, что позволяет решить это уравнение относительно  $P_5$ . Решение уравнения фактически сведется к простому вычислению значения переменной  $P_5$  по уравнению (8). Это будет 2-й шаг вычислений. После этого переменная  $P_5$  в 8-й строке матрицы (3.1) обводится ромбом, а остальные плюсы в столбце  $P_5$  обводятся кружком.

На 3-м шаге (табл. 3.1), зная  $P_5$ , вычисляем значение переменной  $v_1$  по уравнению (1), на 4-м шаге вычисляем значение переменной  $v_3$  по уравнению (3). Нахождение переменных  $v_1$  и  $v_3$  можно проводить в любом порядке, т. е. шаги 3 и 4 можно поменять местами. На блок-схеме эти шаги можно изображать выполняющимися параллельно.

На 5-м шаге, зная  $v_1$  и  $v_3$ , из уравнения (6) выражаем значение переменной  $v_5$ :

$$v_5 = v_1 - v_3. \quad (3.10)$$

На 6-м шаге, зная  $v_5$  и  $P_5$ , выражаем значение переменной  $P_6$  из уравнения (5). Учитывая, что переменная  $v_5$  может быть как положительной, так и отрицательной, для вычисления  $P_6$  будем использовать функцию  $\text{sign}(x)$  (3.3):

$$P_6 = P_5 - \text{sign}(v_5) \frac{v_5^2}{k_5^2}. \quad (3.11)$$

Далее на 7-м и 8-м шагах, зная  $P_6$ , вычисляем значения переменных  $v_2$  и  $v_4$  по уравнениям (2) и (4) соответственно.

После 8-го шага, на котором было вычислено приближенное значение переменной  $v_4$ , мы получим, что в уравнении (7) все плюсы будут обведены кружком, т. е. все переменные этого уравнения известны. Но поскольку эти переменные вычислены на основе произвольного начального приближения  $\tilde{H}_1$ , то уравнение (7) не будет выполняться.

Однако мы можем все вычисления по шагам 1–8 представить в виде функции, зависящей от  $H_1$  и определяющей левую часть уравнения (7):

$$f_7(H_1) = v_2(H_1) + v_5(H_1) - v_4(H_1). \quad (3.12)$$

После чего мы уравнение (7) можем представить в виде

$$f_7(H_1) = 0. \quad (3.13)$$

Уравнение (7) называют корректирующим уравнением для переменной  $H_1$ . В информационной матрице (3.1) под номером уравнения (7) делают соответствующую пометку, а в строке 7 для переменной  $H_1$  ставится пустой ромб.

Таким образом, мы девять уравнений системы (3.9) свели к одному уравнению (3.13) относительно переменной  $H_1$ . После решения этого уравнения будет найдено точное значение переменной  $H_1$ , которое обозначим  $H_1^*$ , что позволит найти точные значения остальных восьми из одиннадцати искомых переменных:  $P_7^*, P_5^*, v_1^*, v_3^*, v_5^*, P_6^*, v_2^*, v_4^*$ .

Шаги 10 и 11 в матрице (3.1) представляют собой решение системы двух уравнений (10) и (11) с двумя неизвестными  $P_8$  и  $H_2$ . Эту систему можно решить простой подстановкой выражения для  $P_8$  из уравнения (11) в уравнение (10). В итоге получим квадратное уравнение относительно  $H_2$ , из которого найдем  $H_2$ , а затем и  $P_8$  по уравнению (11).

Блок-схема (рис. 3.4) алгоритма решения системы уравнений (3.9) строится на основе последнего столбца информационной матрицы (3.1). Параллелограммы в блок-схеме изображают блоки ввода исходных данных и вывода результатов решения системы. Прямоугольные блоки с номерами внутри изображают простые вычисления переменных в соответствии с шагами 1–8 информационной матрицы. Линии со стрелками обозначают переменные, которые вычисляются на последовательных шагах. Шаги 3 и 4, так же как шаги 7 и 8, могут выполняться параллельно, что и изображено на блок-схеме параллельным размещением соответствующих блоков 3 и 1, так же как блоков 4 и 2.

Прямоугольные блоки, обозначенные  $f_7$  и  $f_{10,11}$ , представляют собой блоки функций, которые всегда используются в сочетании с алгоритмическими блоками, соответственно 7 и 10, 11. Эти функции фактически включают в себя последовательность простых вычислительных операций, изображенных на блок-схеме выше блока функции. Так, блок функции  $f_7$  представляет собой вычисление левой части уравнения (7) системы (3.9), для чего нужно провести последовательность вычислений по шагам 1 – 8. Далее эта функция используется алгоритмическим блоком для выполнения своей задачи, например численного решения нелинейного уравнения с одной переменной.

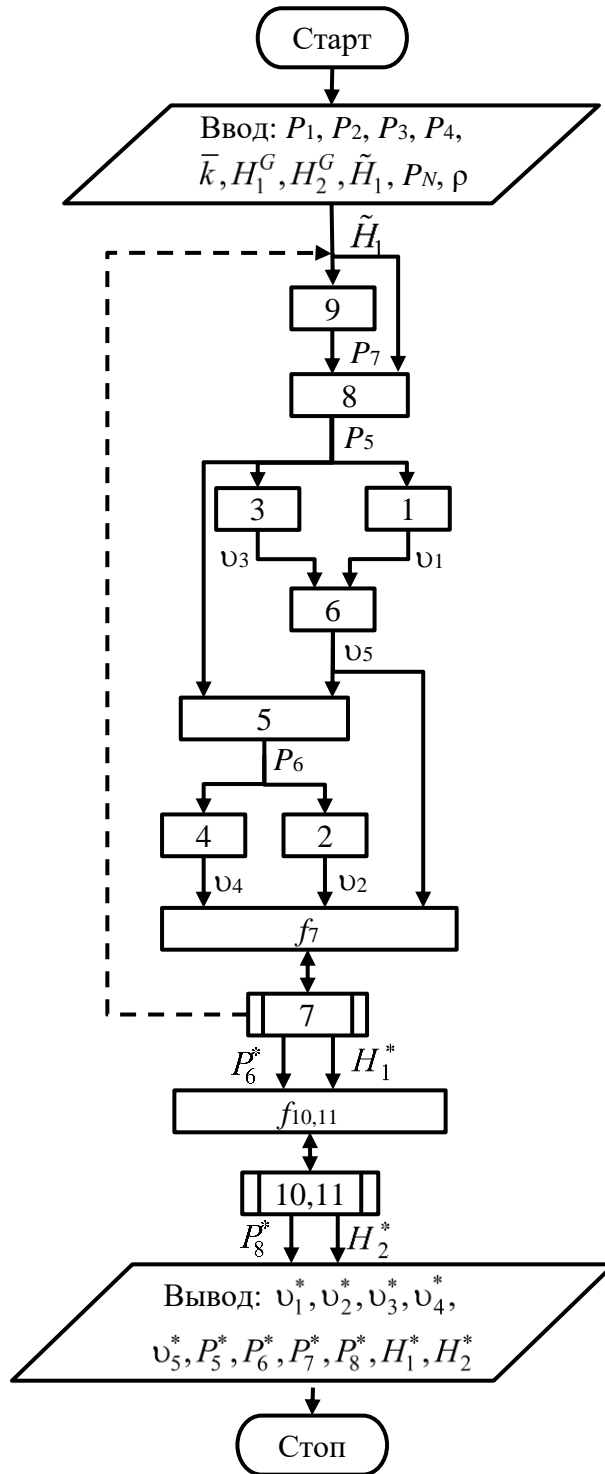


Рис. 3.4. Блок-схема алгоритма решения системы уравнений (3.9) в соответствии с информационной матрицей (3.1)

Алгоритмический блок представляет собой стандартный алгоритм в вычислительной математике для решения какой-либо задачи.

В блок-схеме используются два алгоритмических блока, в которых реализуются два численных алгоритма:

– алгоритм метода половинного деления: алгоритмический блок «7» для определения  $H_1$ ;

– алгоритм решения системы двух уравнений (10) и (11) с двумя переменными ( $P_8$  и  $H_2$ ): алгоритмический блок «10, 11» для определения  $H_2$  и  $P_8$ .

Уравнение (3.13) можно решить численно в системе MathCad, для чего нужно составить программу-функцию для вычисления левой части корректирующего уравнения (7). Реализация этой функции в системе MathCad представлена на рис. 3.5.

$$f7(H1) := \left| \begin{array}{l} P7 \leftarrow PN \cdot \frac{H1G}{H1G - H1} \\ P5 \leftarrow P7 + \rho \cdot g \cdot H1 \\ v1 \leftarrow k1 \cdot \text{sign}(P1 - P5) \cdot \sqrt{|P1 - P5|} \\ v3 \leftarrow k3 \cdot \text{sign}(P5 - P3) \cdot \sqrt{|P5 - P3|} \\ v5 \leftarrow v1 - v3 \\ P6 \leftarrow P5 - \text{sign}(v5) \left( \frac{v5}{k5} \right)^2 \\ v2 \leftarrow k2 \cdot \text{sign}(P2 - P6) \cdot \sqrt{|P2 - P6|} \\ v4 \leftarrow k4 \cdot \text{sign}(P6 - P4) \cdot \sqrt{|P6 - P4|} \\ v2 + v5 - v4 \end{array} \right.$$

Рис. 3.5. Фрагмент документа MathCad с программой-функцией, вычисляющей левую часть корректирующего уравнения системы (3.9)

Решение уравнения (3.13) будем проводить с использованием численного метода половинного деления или дихотомии. Допустим, необходимо найти корень уравнения:

$$f(x) = 0. \quad (3.14)$$

Предварительно корни уравнения должны быть отделены, т. е. найдены интервалы  $x$ , в которых имеется только один корень. В общем случае нелинейные уравнения могут иметь множество корней. Для отделения корней будем использовать графический метод. Если

построить график функции  $f(x)$ , то корни уравнения (3.14) можно увидеть как точки пересечения графика с осью ординат.

Например, для решения уравнения (3.13) необходимо построить график функции  $f_7(H_1)$ . Построим график в системе MathCad (рис. 3.6). Видно, что в диапазоне возможных значений  $H_1$  от 0 до  $H_1^G$  уравнение (3.13) имеет один корень в интервале от 0,2 до 0,4.

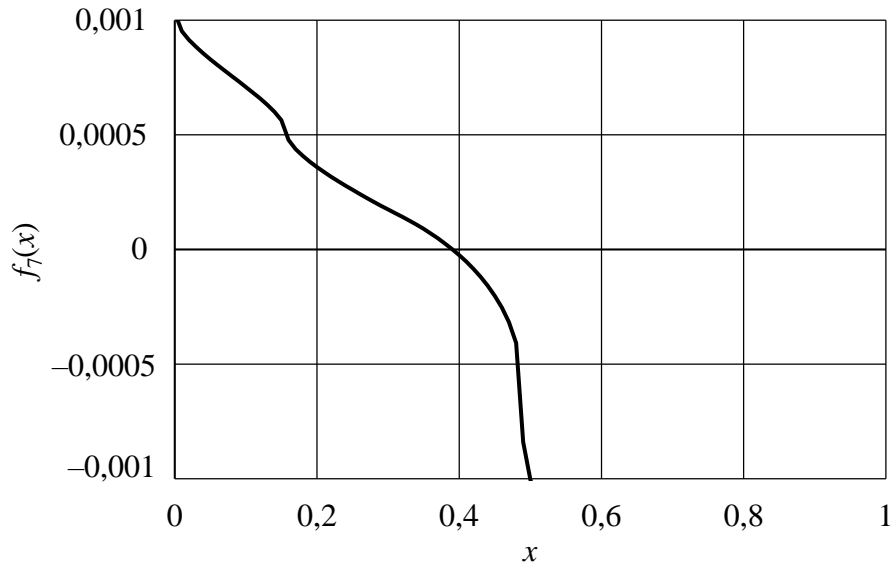


Рис. 3.6. График функции  $f_7(x)$  в MathCad для отделения корней уравнения (3.13)

Рассмотрим далее уточнение корней методом дихотомии. Допустим, мы отделили один корень уравнения на интервале  $[\alpha; \beta]$ . В основе метода дихотомии лежит деление интервала  $[\alpha; \beta]$  пополам. Итерационная формула для данного метода имеет вид

$$x^{(k+1)} = \frac{\alpha^{(k)} + \beta^{(k)}}{2}, \quad (3.15)$$

где  $k$  – номер итерации. На каждой итерации интервал  $[\alpha^{(k)}; \beta^{(k)}]$  делят пополам и выбирают ту половину интервала, на которой функция  $f(x)$  имеет разные знаки, а именно: если  $f(\alpha^{(k)}) \cdot f(x^{(k+1)}) < 0$ , то  $\beta^{(k+1)} := x^{(k+1)}$ , иначе –  $\alpha^{(k+1)} := x^{(k+1)}$ . Процесс деления каждого нового интервала пополам продолжается до тех пор, пока не выполнится условие окончания итерационного процесса:

$$\beta^{(k)} - \alpha^{(k)} \leq \varepsilon, \quad (3.16)$$

где  $\varepsilon$  – точность вычисления корня уравнения. Блок-схема алгоритма уточнения корней методом дихотомии представлена на рис. 3.7.

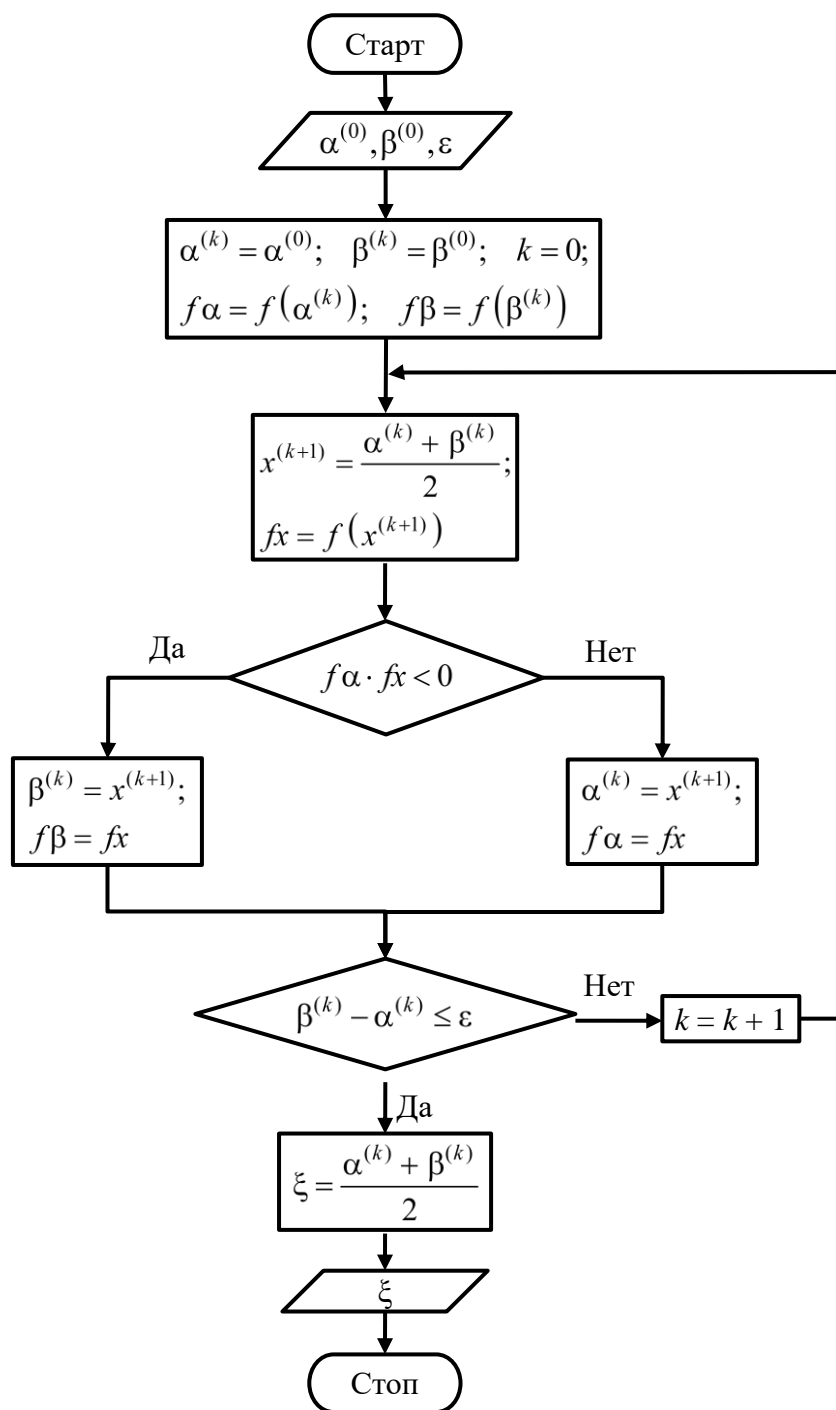


Рис. 3.7. Блок-схема алгоритма уточнения корней методом дихотомии

Реализация метода дихотомии решения уравнения (3.13) в системе Mathcad в виде программы-функции Dihot представлена на рис. 3.8. Программа-функция принимает 3 параметра:  $a0$  и  $b0$  – границы интервала, на котором имеется один корень;  $\varepsilon$  – точность вычисления корня.

```

Dihot(a0, b0, ε) :=
| a ← a0
| b ← b0
| fa ← f7(a)
| fb ← f7(b)
| while (b - a) > ε
|   | ba ← (b + a) / 2
|   | fba ← f7(ba)
|   | if (fba · fa < 0)
|   |   | b ← ba
|   |   | fb ← fba
|   | otherwise
|   |   | a ← ba
|   |   | fa ← fba
|   | ba ← (b + a) / 2

```

Рис. 3.8. Программа-функция Dihot в системе MathCad для уточнения корня уравнения методом дихотомии

Фрагмент документа использования программы-функции Dihot для решения уравнения (3.13) и нахождения  $H_1^*$  с последующим нахождением переменных  $P_7^*, P_5^*, v_1^*, v_3^*, v_5^*, P_6^*, v_2^*, v_4^*$  в системе MathCad представлен на рис. 3.9.

```

H1 := Dihot(0.2, 0.4, 10-9) = 0.391
P7 := PN · (H1G / (H1G - H1)) = 1.663 × 105
P5 := P7 + ρ · g · H1 = 1.701 × 105
v1 := k1 · sign(P1 - P5) · √|P1 - P5| = 1.569 × 10-4
v3 := k3 · sign(P5 - P3) · √|P5 - P3| = 2.282 × 10-4
v5 := v1 - v3 = -7.122 × 10-5
P6 := P5 - sign(v5) · ((v5) / k5)2 = 1.768 × 105
v2 := k2 · sign(P2 - P6) · √|P2 - P6| = 3.102 × 10-4
v4 := k4 · sign(P6 - P4) · √|P6 - P4| = 2.39 × 10-4

```

Рис. 3.9. Фрагмент документа MathCad нахождения  $H_1^*$  и вычисления значений переменных  $P_7^*, P_5^*, v_1^*, v_3^*, v_5^*, P_6^*, v_2^*, v_4^*$  системы (3.9)



Значения оставшихся переменных  $P_8$  и  $H_2$  найдем по шагам 10, 11 информационной матрицы 3.1 подстановкой выражения для  $P_8$  из уравнения (11) в уравнение (10). В результате получим квадратное уравнение относительно  $H_2$ , из которого найдем  $H_2$ , а затем и  $P_8$  – по уравнению (11). Реализация этих действий в системе MathCad представлена на рис. 3.10.

$$P_6 = P_N \cdot \frac{H_1 G}{H_1 G - H_2} + \rho \cdot g \cdot H_2$$

$$R := \left( \begin{array}{l} \frac{P_6 + \sqrt{H_1 G^2 \cdot \rho^2 \cdot g^2 - 2 \cdot H_1 G \cdot P_6 \cdot \rho \cdot g + 4 \cdot P_N \cdot H_1 G \cdot \rho \cdot g + P_6^2 + H_1 G \cdot \rho \cdot g}}{2 \cdot \rho \cdot g} \\ \frac{P_6 - \sqrt{H_1 G^2 \cdot \rho^2 \cdot g^2 - 2 \cdot H_1 G \cdot P_6 \cdot \rho \cdot g + 4 \cdot P_N \cdot H_1 G \cdot \rho \cdot g + P_6^2 + H_1 G \cdot \rho \cdot g}}{2 \cdot \rho \cdot g} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} 18.628 \\ 0.413 \end{array} \right)$$

$$H_2 := R_1 = 0.413$$

$$P_8 := P_N \cdot \frac{H_1 G}{H_1 G - H_2} = 1.728 \times 10^5$$

Рис. 3.10. Фрагмент документа MathCad нахождения  $H_2^*$  и  $P_8^*$

Представленное в верхней части рис. 3.10 квадратное уравнение решаем в системе MathCad следующим образом: выделяем мышкой определяемую переменную  $H_2$ , затем в меню выбираем «Символьные операции» → «Переменная» → «Решить» (рис. 3.11). В результате MathCad выдает решение уравнения относительно выделенной переменной в символьном виде.

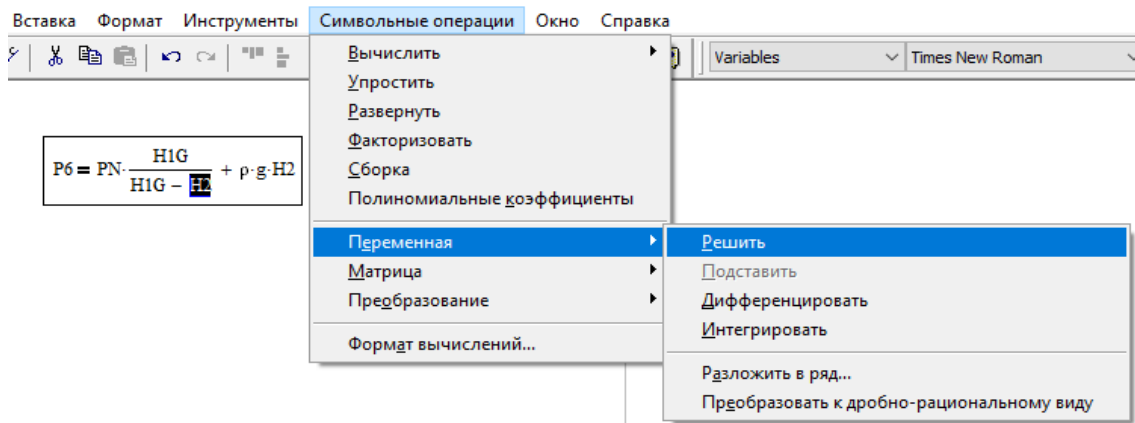


Рис. 3.11. Фрагмент документа MathCad, иллюстрирующий пункты меню для решения простого уравнения

В нашем случае (рис. 3.10) в результате решения получаем вектор, состоящий из двух символьных выражений для корней квадратного

уравнения. Этот вектор мы обозначили символом  $R$ . Если после выражений ввести команду = (вычислить), MathCad вычисляет выражение в численном виде. Из двух корней квадратного уравнения нам по физическому смыслу подходит только второе (рис. 3.10), поэтому для переменной  $H_2$  присваиваем второй элемент вектора  $R$  с индексом 1. Индекс 1 относится ко второму элементу, так как в системе MathCad нумерация элементов матриц начинается по умолчанию с нуля.

### **Задание**

1. Построить математическое описание стационарного режима движения жидкости в заданной простой гидравлической системе.
2. Составить информационную матрицу системы уравнений и блок-схему алгоритма декомпозиционного метода решения системы уравнений.
3. Реализовать алгоритм решения системы уравнений с использованием программ-функций в САПР MathCad.
4. Проанализировать и обсудить полученные результаты решения.

### **Требования к отчету**

В отчете представить: 1) название, цель и задачи работы; 2) схему гидравлической системы с исходными данными для расчета; 3) систему уравнений математического описания процесса и определяемые переменные; 4) информационную матрицу системы уравнений; 5) блок-схему алгоритма решения системы уравнений; 6) листинг реализованной в MathCad программы вычислений; 7) полученные результаты расчета на схеме гидравлической системы; 8) вывод с указанием усвоенных навыков и умений.

Полученное решение системы уравнений нужно представить на схеме гидравлической системы, т. е. вместо переменных на схеме вписать вычисленные значения.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Понятие простой гидравлической системы.
2. Основные допущения, принятые при построении математического описания простых гидравлических систем.
3. Основные элементы простой гидравлической системы.
4. Виды уравнений, входящих в математическое описание простых гидравлических систем.

5. Понятие информационной матрицы.
6. Выбор алгоритма решения системы уравнений математического описания процесса на основе анализа информационной матрицы.
7. Понятие стационарного режима движения жидкости в гидравлической системе.
8. Блок-схема алгоритма решения системы уравнений: условные обозначения и построение.
9. Основные понятия численного решения конечных уравнений.
10. Метод дихотомии в уточнении корней конечного уравнения.

## Лабораторная работа 3.1.2

---

### НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

**Цель работы:** приобретение навыков построения математических моделей нестационарных процессов.

#### Теоретическая часть

Понятие простых гидравлических систем описано в предыдущей лабораторной работе «Стационарный режим движения жидкости в гидравлической системе». Математическое описание нестационарного режима включает в себя те же уравнения, что и для стационарного режима, за исключением уравнений балансов. Уравнения балансов для нестационарного режима представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, учитывающие изменение уровня жидкости в аккумуляторах во времени. Остальные уравнения по виду точно такие же, как и для стационарного режима, только нужно учитывать, что все переменные, входящие в это уравнение, относятся к определенному периоду времени. Ниже рассмотрим примеры записи дифференциальных уравнений баланса потоков жидкости в простых гидравлических системах.

Балансовые уравнения записываются для узловых точек схемы, в которых соединяются два и более трубопровода и происходит разделение или объединение потоков жидкости. Объединение или разделение потоков определяется в соответствии со стрелками, показывающими направление движения жидкости на схеме. Если в результате расчетов

получится какой-то из потоков отрицательный, то это значит, что его направление будет противоположно направлению стрелок на схеме гидравлической системы. В целом уравнение баланса для нестационарного режима записывается так же, как и для стационарного (3.8), за исключением того, что правая часть уравнения (3.8) будет равна не нулю, а скорости накопления жидкости в аккумуляторе, связанном с данной узловой точкой:

$$\sum_{i \in \text{ВХ}} v_i - \sum_{j \in \text{ВЫХ}} v_j = \frac{dV}{dt}, \quad (3.17)$$

здесь  $V$  – объем жидкости в аккумуляторе,  $\text{м}^3$ ;  $t$  – время, с.

Чтобы не вводить в систему уравнений МО новую переменную, предположим, что аккумулятор представляет собой вертикально расположенную емкость с постоянной площадью поперечного сечения. Тогда объем жидкости в аккумуляторе можно связать с высотой поднятия жидкости:

$$V = S \cdot H, \quad (3.18)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения аккумулятора,  $\text{м}^2$ . Тогда дифференциальное уравнение баланса запишется так:

$$\sum_{i \in \text{ВХ}} v_i - \sum_{j \in \text{ВЫХ}} v_j = S \frac{dH}{dt} \quad (3.19)$$

или

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{S} \left( \sum_{i \in \text{ВХ}} v_i - \sum_{j \in \text{ВЫХ}} v_j \right). \quad (3.20)$$

Последнее уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Результатом его решения должна быть функция зависимости уровня жидкости в аккумуляторе от времени –  $H(t)$ . Для получения однозначного решения обыкновенного дифференциального уравнения нужно задать одно начальное или граничное условие. В нашем случае переменные зависят от времени, поэтому задается начальное условие, т. е. значение переменной в начальный момент времени, которое можно представить так:

$$H(0) = H_0. \quad (3.21)$$

При решении дифференциального уравнения в численном виде результат решения (функция) может быть представлен в виде табл. 3.2.

В системе MathCad результат решения может представлять собой матрицу. Например, для уравнения (3.20) результатом численного решения может быть матрица, состоящая из двух столбцов, в первом из которых будут, например, значения времени  $t$ , а во втором – соответствующие значения уровня жидкости  $H$ .

Таблица 3.2

**Пример таблицы результатов решения задачи**

Время	$t^{(0)}$	$t^{(1)}$	...	$t^{(k)}$	$t^{(k+1)}$	...	$t^{(n)}$
Уровень жидкости	$H^{(0)}$	$H^{(1)}$	...	$H^{(k)}$	$H^{(k+1)}$	...	$H^{(n)}$

Для численного решения уравнения (3.21) нужно представить производную в виде конечных разностей:

$$\frac{dH}{dt} \approx \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{H^{(k+1)} - H^{(k)}}{\Delta t}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (3.22)$$

где  $\Delta t$  – шаг сетки, интервал времени между узловыми точками;  $k$  – номер узловой точки, в которой проводится вычисление приближенного значения переменной;  $n$  – число интервалов времени между узловыми точками. Чем меньше  $\Delta t$ , тем точнее будет численное решение дифференциального уравнения, но это может потребовать большого количества вычислений для расчета поведения системы в течение длительного времени.

С учетом (3.22) дифференциальное уравнение баланса (3.20) можно представить совокупностью  $n$  конечно-разностных уравнений следующего вида:

$$\frac{H^{(k+1)} - H^{(k)}}{\Delta t} = \frac{1}{S} \left( \sum_{i \in \text{ВХ}} v_i - \sum_{j \in \text{ВЫХ}} v_j \right), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.23)$$

Начальное условие (3.21) будет означать, что значение  $H$  в самой первой узловой точке под номером 0 известно:

$$H^{(0)} = H_0. \quad (3.24)$$

Следует отметить также, что система уравнений МО нестационарного режима движения жидкости в гидравлической системе, содержащая дифференциальное уравнение вида (3.20), для численного решения будет представляться совокупностью  $n$  систем уравнений, записанных для каждого интервала между узловыми точками.

Все переменные, входящие в систему уравнений, будут относиться к данному интервалу времени.

Для упрощения процедуры решения системы уравнений используем явную схему Эйлера при составлении конечно-разностного вида дифференциального уравнения: все входящие в систему уравнений переменные представляют собой значения переменных в узловой точке  $k$  и только в дифференциальном уравнении приращение переменной, входящей в уравнение в виде производной, выражается как разность ее значения в точках  $k + 1$  и  $k$ . Это позволяет в явном виде выразить значение этой переменной в последующий момент времени. Так, конечно-разностное уравнение, записанное по явной схеме Эйлера для уравнения (3.20), в случае, если расходы жидкости  $v$  являются определяемыми переменными, будет иметь вид

$$\frac{H^{(k+1)} - H^{(k)}}{\Delta t} = \frac{1}{S} \left( \sum_{i \in \text{ВХ}} v_i^{(k)} - \sum_{j \in \text{ВЫХ}} v_j^{(k)} \right), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.25)$$

Значение переменной  $H$  в последующий момент времени может быть выражено через значения переменных в предыдущий момент времени:

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \Delta t \frac{1}{S} \left( \sum_{i \in \text{ВХ}} v_i^{(k)} - \sum_{j \in \text{ВЫХ}} v_j^{(k)} \right), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.26)$$

Система уравнений для  $k$ -го интервала времени МО нестационарного режима движения жидкости для гидравлической системы, представленной на рис. 3.1, будет включать те же уравнения, что и для стационарного режима (3.9). Только уравнения балансов 6 и 7 должны быть записаны в конечно-разностном виде (3.25) или (3.26) и обозначены номерами с символом \*. Также в систему нужно добавить два уравнения для начальных условий с номерами 6' и 7'. Таким образом, полученная система будет состоять из 13 конечных уравнений и, соответственно, из 13 определяемых переменных, включая две дополнительные переменные по сравнению с системой (3.9)  $H_1^{(k+1)}$  и  $H_2^{(k+1)}$ .

Эта система (3.27) записана ниже для  $k$ -го интервала времени. Уравнения п. 6' и п. 7' представляют собой по сути присваивание для переменных  $H_1^{(k)}$  и  $H_2^{(k)}$  текущего момента времени соответствующих значений  $H_1^{(k+1)}$  и  $H_2^{(k+1)}$ , вычисленных на предыдущем интервале времени. На самом первом интервале времени под номером 0 значения  $H_1^{(0)}$  и  $H_2^{(0)}$  известны по условию.

$$\left. \begin{aligned}
1. \quad v_1^{(k)} &= k_1 \cdot \text{sign}(P_1 - P_5^{(k)}) \sqrt{|P_1 - P_5^{(k)}|}. \\
2. \quad v_2^{(k)} &= k_2 \cdot \text{sign}(P_2 - P_6^{(k)}) \sqrt{|P_2 - P_6^{(k)}|}. \\
3. \quad v_3^{(k)} &= k_3 \cdot \text{sign}(P_5^{(k)} - P_3) \sqrt{|P_5^{(k)} - P_3|}. \\
4. \quad v_4^{(k)} &= k_4 \cdot \text{sign}(P_6^{(k)} - P_4) \sqrt{|P_6^{(k)} - P_4|}. \\
5. \quad v_5^{(k)} &= k_5 \cdot \text{sign}(P_5^{(k)} - P_6^{(k)}) \sqrt{|P_5^{(k)} - P_6^{(k)}|}. \\
6^*. \quad \frac{H_1^{(k+1)} - H_1^{(k)}}{\Delta t} &= \frac{v_1^{(k)} - v_3^{(k)} - v_5^{(k)}}{S_1} = f_6(H_1^{(k)}, H_2^{(k)}). \\
6'. \quad H_1^{(k)} &= H_1^{*(k)}. \\
7^*. \quad \frac{H_2^{(k+1)} - H_2^{(k)}}{\Delta t} &= \frac{v_2^{(k)} + v_5^{(k)} - v_4^{(k)}}{S_2} = f_7(H_1^{(k)}, H_2^{(k)}). \\
7'. \quad H_2^{(k)} &= H_2^{*(k)}. \\
8. \quad P_5^{(k)} &= P_7^{(k)} + \rho g H_1^{(k)}. \\
9. \quad P_7^{(k)} &= P_N \frac{H_1^G}{H_1^G - H_1^{(k)}}. \\
10. \quad P_6^{(k)} &= P_8^{(k)} + \rho g H_2^{(k)}. \\
11. \quad P_8^{(k)} &= P_N \frac{H_2^G}{H_2^G - H_2^{(k)}}.
\end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Информационная матрица системы уравнений (3.27) представлена в табл. 3.3. Из данной матрицы видно, что, зная значения  $H_1^{(k)}$  и  $H_2^{(k)}$ , мы можем последовательно по шагам вычислить значения переменных  $H_1^{(k+1)}$  и  $H_2^{(k+1)}$ . После чего нужно будет сохранить вычисленные на данном интервале времени значения переменных и перейти к расчетам на следующем интервале, и так до последнего заданного интервала под номером  $n - 1$ .

Блок-схема алгоритма решения системы уравнений МО для нестационарного режима представлена на рис. 3.12. В некотором смысле для нестационарного режима и блок-схема, и сам алгоритм решения выглядят проще, чем для стационарного режима (рис. 3.4).

Таблица 3.3

Информационная матрица системы уравнений (3.27) математического описания нестационарного режима движения жидкости в гидравлической системе (рис. 3.1)

№ ур-я	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$P_5^{(k)}$	$P_6^{(k)}$	$P_7^{(k)}$	$P_8^{(k)}$	$H_1^{(k)}$	$H_1^{(k+1)}$	$H_2^{(k)}$	$H_2^{(k+1)}$	№ шага
1	+					+								4
2		+					+							9
3			+			+								5
4				+			+							10
5					+	+	+							11
6* диф. ур	+		+		+					+	+			12
7* диф. ур		+		+	+							+	+	13
6'										+				1
7'												+		6
8						+		+		+				3
9								+		+				2
10							+		+			+		8
11									+			+		7

На данной блок-схеме блок функции  $f_{6,7}$  представляет собой вычисление правых частей уравнений п. (6\*) и п. (7\*), для чего последовательно находятся все переменные по шагам 1–11 (табл. 3.3). Эту операцию можно оформить в системе MathCad как одну функцию от  $H_1^{(k)}$  и  $H_2^{(k)}$  (рис. 3.13), возвращающую сразу два значения, либо как две отдельные функции (рис. 3.14). Но в последнем случае при использовании этих функций операции вычисления переменных по шагам 1–11 будут повторяться дважды. Поэтому предпочтительнее использовать одну функцию.



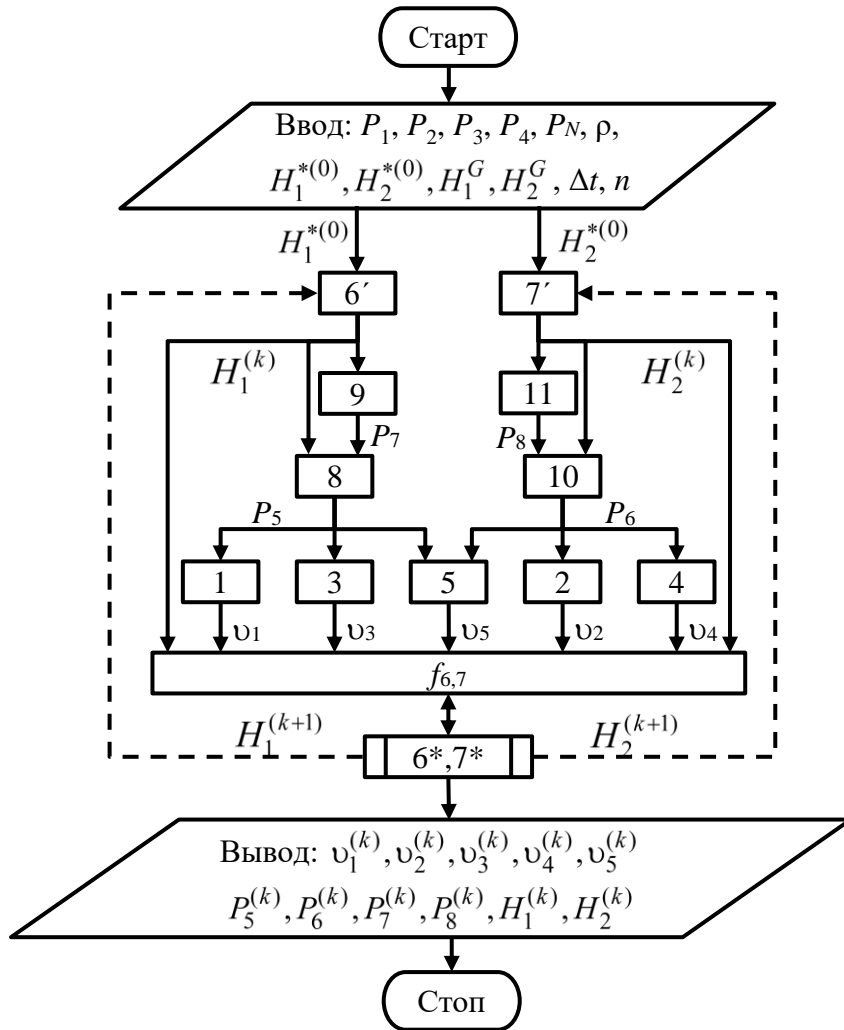


Рис. 3.12. Блок-схема алгоритма расчета нестационарного режима движения жидкости в простой гидравлической системе (рис. 3.1)

Одна функция f67 в системе MathCad (рис. 3.13) возвращает вектор-столбец, состоящий из двух элементов. Первый элемент – это значение функции  $f_6(H_1^{(k)}, H_2^{(k)})$ , а второй – значение функции  $f_7(H_1^{(k)}, H_2^{(k)})$  из системы уравнений (3.27).

Две функции f6 и f7 в системе MathCad (рис. 3.14) возвращают просто значения соответствующих функций.

Алгоритмический блок 6\*, 7\* на блок-схеме рис. 3.12 реализует операции сохранения вычисленных на данном интервале времени значений переменных и переход к расчетам на следующем интервале времени вплоть до последнего заданного интервала под номером  $n - 1$ . Эти операции в системе MathCad можно реализовать двумя функциями (рис. 3.15): SaveR и GidrNS.

$$\begin{array}{l}
 f67(H1, H2) := \left( \begin{array}{l}
 P7 \leftarrow PN \cdot \frac{H1G}{H1G - H1} \\
 P5 \leftarrow P7 + \rho \cdot g \cdot H1 \\
 v1 \leftarrow k1 \cdot \text{sign}(P1 - P5) \cdot \sqrt{|P1 - P5|} \\
 v3 \leftarrow k3 \cdot \text{sign}(P5 - P3) \cdot \sqrt{|P5 - P3|} \\
 P8 \leftarrow PN \cdot \frac{H1G}{H1G - H2} \\
 P6 \leftarrow P8 + \rho \cdot g \cdot H2 \\
 v2 \leftarrow k2 \cdot \text{sign}(P2 - P6) \cdot \sqrt{|P2 - P6|} \\
 v4 \leftarrow k4 \cdot \text{sign}(P6 - P4) \cdot \sqrt{|P6 - P4|} \\
 v5 \leftarrow k5 \cdot \text{sign}(P5 - P6) \cdot \sqrt{|P5 - P6|} \\
 \left( \begin{array}{l}
 \frac{v1 - v3 - v5}{S1} \\
 \frac{v2 + v5 - v4}{S2}
 \end{array} \right)
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Рис. 3.13. Фрагмент документа Mathcad, содержащий одну программу-функцию для расчета правых частей уравнений п. 6\* и п. 7\* системы (3.27)

$  \begin{array}{l}  f6(H1, H2) := \left( \begin{array}{l}  P7 \leftarrow PN \cdot \frac{H1G}{H1G - H1} \\  P5 \leftarrow P7 + \rho \cdot g \cdot H1 \\  v1 \leftarrow k1 \cdot \text{sign}(P1 - P5) \cdot \sqrt{ P1 - P5 } \\  v3 \leftarrow k3 \cdot \text{sign}(P5 - P3) \cdot \sqrt{ P5 - P3 } \\  P8 \leftarrow PN \cdot \frac{H1G}{H1G - H2} \\  P6 \leftarrow P8 + \rho \cdot g \cdot H2 \\  v2 \leftarrow k2 \cdot \text{sign}(P2 - P6) \cdot \sqrt{ P2 - P6 } \\  v4 \leftarrow k4 \cdot \text{sign}(P6 - P4) \cdot \sqrt{ P6 - P4 } \\  v5 \leftarrow k5 \cdot \text{sign}(P5 - P6) \cdot \sqrt{ P5 - P6 } \\  \frac{v1 - v3 - v5}{S1}  \end{array} \right)  \end{array}  $	$  \begin{array}{l}  f7(H1, H2) := \left( \begin{array}{l}  P7 \leftarrow PN \cdot \frac{H1G}{H1G - H1} \\  P5 \leftarrow P7 + \rho \cdot g \cdot H1 \\  v1 \leftarrow k1 \cdot \text{sign}(P1 - P5) \cdot \sqrt{ P1 - P5 } \\  v3 \leftarrow k3 \cdot \text{sign}(P5 - P3) \cdot \sqrt{ P5 - P3 } \\  P8 \leftarrow PN \cdot \frac{H1G}{H1G - H2} \\  P6 \leftarrow P8 + \rho \cdot g \cdot H2 \\  v2 \leftarrow k2 \cdot \text{sign}(P2 - P6) \cdot \sqrt{ P2 - P6 } \\  v4 \leftarrow k4 \cdot \text{sign}(P6 - P4) \cdot \sqrt{ P6 - P4 } \\  v5 \leftarrow k5 \cdot \text{sign}(P5 - P6) \cdot \sqrt{ P5 - P6 } \\  \frac{v2 + v5 - v4}{S2}  \end{array} \right)  \end{array}  $
---	---

Рис. 3.14. Фрагмент документа MathCad, содержащий две программы-функции для расчета правых частей уравнений п. 6\* и п. 7\* системы (3.27)

Функция SaveR в качестве аргументов берет текущие значения времени  $t$  и переменных  $H_1$  и  $H_2$ , проводит вычисления всех переменных по шагам 1–11 информационной матрицы (табл. 3.3) и возвращает вектор-столбец значений времени и всех переменных в порядке, показанном на рис. 3.12.

Функция GidrNS использует в качестве аргументов начальные значения переменных  $H_1$  и  $H_2$ , интервал времени  $\Delta t$  и число интервалов времени  $n$ , для которых требуется выполнить расчеты. Эта функция использует функцию SaveR для вычисления значений всех переменных в текущий момент времени  $tk$  и сохраняет их в столбец матрицы результатов R. Далее данная функция вычисляет значения переменных  $H_1$  и  $H_2$  в следующий момент времени с помощью функций f6 и f7 и переходит к расчетам в следующий момент времени.

<pre>SaveR(t, H1, H2) :=   P7 ← PN · <math>\frac{H1G}{H1G - H1}</math>   P5 ← P7 + <math>\rho \cdot g \cdot H1</math>   v1 ← <math>k1 \cdot \text{sign}(P1 - P5) \cdot \sqrt{ P1 - P5 }</math>   v3 ← <math>k3 \cdot \text{sign}(P5 - P3) \cdot \sqrt{ P5 - P3 }</math>   P8 ← PN · <math>\frac{H1G}{H1G - H2}</math>   P6 ← P8 + <math>\rho \cdot g \cdot H2</math>   v2 ← <math>k2 \cdot \text{sign}(P2 - P6) \cdot \sqrt{ P2 - P6 }</math>   v4 ← <math>k4 \cdot \text{sign}(P6 - P4) \cdot \sqrt{ P6 - P4 }</math>   v5 ← <math>k5 \cdot \text{sign}(P5 - P6) \cdot \sqrt{ P5 - P6 }</math>   (     t     v1     v2     v3     v4     v5     P5     P6     P7     P8     H1     H2   )</pre>	<pre>GidrNS(H1, H2, Δt, n) :=   H1k ← H1   H2k ← H2   tk ← 0   k ← 0   while k ≤ n     R<sup>(k)</sup> ← SaveR(tk, H1k, H2k)     H1k ← H1k + Δt · f6(H1k, H2k)     H2k ← H2k + Δt · f7(H1k, H2k)     tk ← tk + Δt     k ← k + 1   return R</pre>
--	--

Рис. 3.15. Фрагмент документа MathCad, содержащий две программы-функции для реализации алгоритмического блока 6\*, 7\* (рис. 3.12)

Недостатком представленного выше (рис. 3.14 и 3.15) способа реализации алгоритма решения системы уравнений является то, что на каждом шаге вычислений значения переменных по шагам 1–11 вычисляются трижды: в программах-функциях f6, f7 и SaveR. Можно сделать одну функцию f67 подобной на рис. 3.13, которая вычисляет значения всех переменных и возвращает их в виде вектор-столбца подобно функции SaveR (рис. 3.15). Расчет значений переменных

в следующий момент времени по уравнениям п. 6\* и п. 7\* из системы (3.27) можно реализовать в основной программе-функции GidrNS. Фрагмент документа MathCad, содержащий более эффективный способ реализации алгоритма расчета, представлен на рис. 3.16. В данном способе используются только две функции, а не три, как в предыдущем способе. Также операции вычисления переменных по шагам 1–11 выполняются только один раз.

<pre>f67(H1, H2) := P7 ← PN · <math>\frac{H1G}{H1G - H1}</math> P5 ← P7 + ρ · g · H1 v1 ← k1 · sign(P1 - P5) · <math>\sqrt{ P1 - P5 }</math> v3 ← k3 · sign(P5 - P3) · <math>\sqrt{ P5 - P3 }</math> P8 ← PN · <math>\frac{H1G}{H1G - H2}</math> P6 ← P8 + ρ · g · H2 v2 ← k2 · sign(P2 - P6) · <math>\sqrt{ P2 - P6 }</math> v4 ← k4 · sign(P6 - P4) · <math>\sqrt{ P6 - P4 }</math> v5 ← k5 · sign(P5 - P6) · <math>\sqrt{ P5 - P6 }</math> ( 0 v1 v2 v3 v4 v5 P5 P6 P7 P8 H1 H2 )</pre>	<pre>GidrNS(H1, H2, Δt, n) := H1k ← H1 H2k ← H2 tk ← 0 k ← 0 while k ≤ n R<sup>(k)</sup> ← f67(H1k, H2k) H1k ← H1k + Δt · <math>\frac{R_{1,k} - R_{3,k} - R_{5,k}}{S1}</math> H2k ← H2k + Δt · <math>\frac{R_{2,k} + R_{5,k} - R_{4,k}}{S2}</math> R<sub>0,k</sub> ← tk tk ← tk + Δt k ← k + 1 return R</pre>
--	---

Рис. 3.16. Фрагмент документа MathCad, содержащий программы-функции для эффективной реализации алгоритма расчета на рис. 3.12

Матрица результатов расчета R представляет собой матрицу, столбцы которой соответствуют моментам времени, а строки – определяемым переменным. Первая строка – время, а последние две – значения переменных  $H_1$  и  $H_2$  (рис. 3.15 и 3.16). В более эффективной реализации алгоритма расчета (рис. 3.16) время вносится в матрицу результатов в основной программе GidrNS выполнением команды  $R_{0,k} \leftarrow tk$ . Пример результатов расчета после вызова функции GidrNS представлен на рис. 3.17.

	0	1	2	3
0	0	100	200	300
1	$2.769 \cdot 10^{-4}$	$2.726 \cdot 10^{-4}$	$2.683 \cdot 10^{-4}$	$2.64 \cdot 10^{-4}$
2	$3.916 \cdot 10^{-4}$	$3.873 \cdot 10^{-4}$	$3.837 \cdot 10^{-4}$	$3.802 \cdot 10^{-4}$
3	0	$4.889 \cdot 10^{-5}$	$6.863 \cdot 10^{-5}$	$8.352 \cdot 10^{-5}$
4	0	$5.845 \cdot 10^{-5}$	$7.862 \cdot 10^{-5}$	$9.385 \cdot 10^{-5}$
5	0	$-3.204 \cdot 10^{-5}$	$-3.834 \cdot 10^{-5}$	$-4.279 \cdot 10^{-5}$
6	$1.013 \cdot 10^5$	$1.045 \cdot 10^5$	$1.075 \cdot 10^5$	$1.105 \cdot 10^5$
7	$1.013 \cdot 10^5$	$1.058 \cdot 10^5$	$1.095 \cdot 10^5$	$1.13 \cdot 10^5$
8	$1.013 \cdot 10^5$	$1.042 \cdot 10^5$	$1.07 \cdot 10^5$	$1.098 \cdot 10^5$
9	$1.013 \cdot 10^5$	$1.055 \cdot 10^5$	$1.088 \cdot 10^5$	$1.12 \cdot 10^5$
10	0	0.028	0.053	0.077
11	0	0.039	0.069	0.096

Рис. 3.17. Результаты решения системы уравнений (3.27), описывающих нестационарный режим движения жидкости в гидравлической системе (рис. 3.1)

Результаты расчетов можно представить в графическом виде. На рис. 3.18 представлены зависимости переменных  $H_1$  и  $v_1$  от времени.

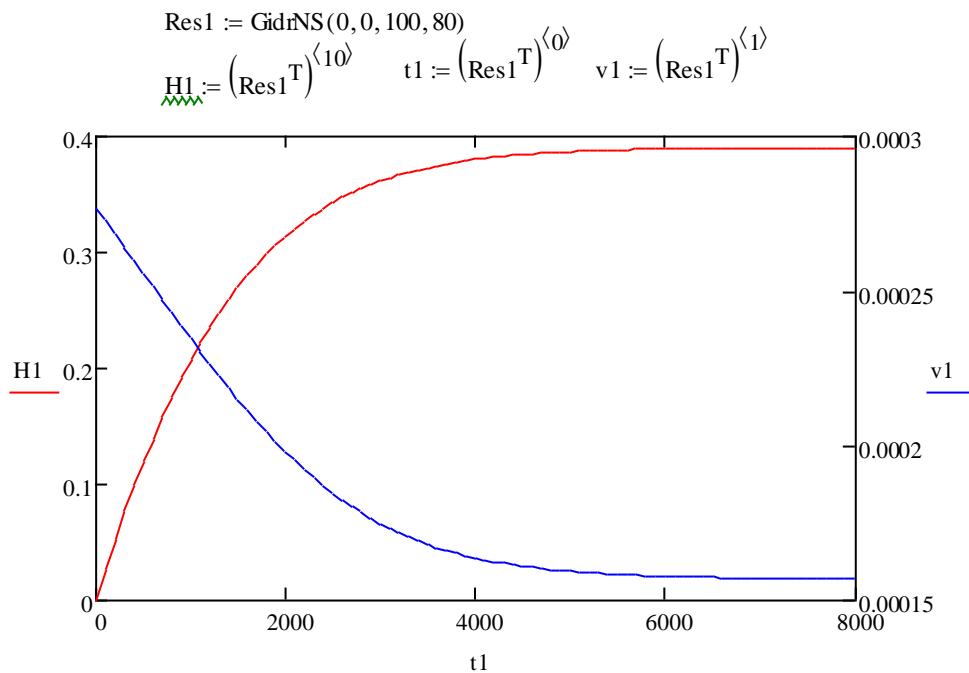


Рис. 3.18. Результаты решения системы уравнений (3.27) в графическом виде

Если в гидравлической системе присутствуют связанные аккумуляторы – аккумуляторы, не разделенные клапанами (рис. 3.19), то при

составлении балансовых уравнений и алгоритма расчетов необходимо внести некоторые изменения в сравнении с описанным выше.

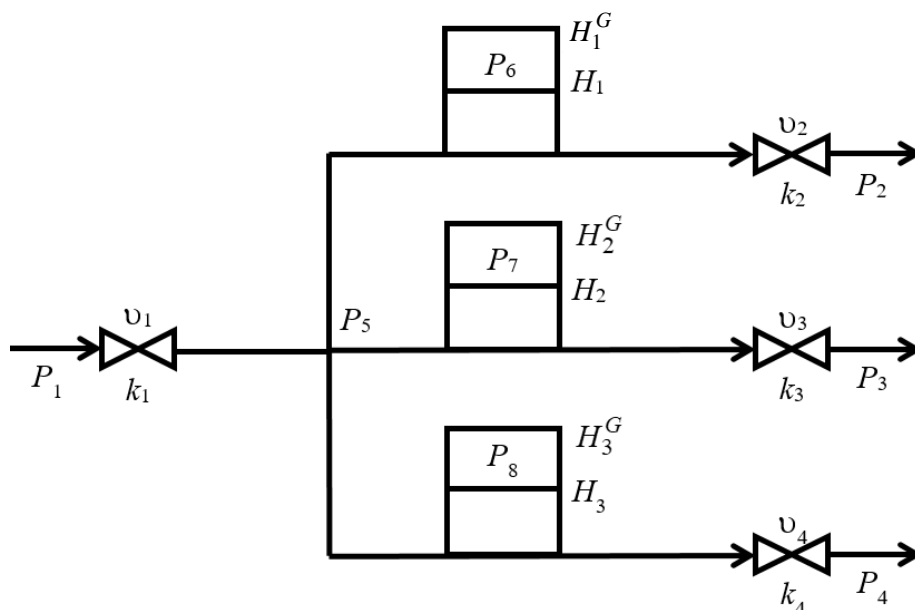


Рис. 3.19. Схема простой гидравлической системы со связанными аккумуляторами

Балансовое уравнение в общем виде можно представить как разность трех сумм входящих потоков в узловую точку, выходящих потоков из узловой точки и скоростей накопления объема жидкости в связанных аккумуляторах, равную нулю:

$$\sum_{i \in \text{ВХ}} v_i - \sum_{j \in \text{ВЫХ}} v_j - \sum_{k \in \text{АК}} \frac{dV_k}{dt} = 0, \quad (3.28)$$

где  $V_k$  – объем жидкости в  $k$ -м связанном аккумуляторе,  $\text{м}^3$ .

Сумму скоростей накопления жидкости можно представить в виде суммарной скорости накопления жидкости во всех связанных аккумуляторах:

$$\sum_{k \in \text{АК}} \frac{dV_k}{dt} = \frac{d \sum_{k \in \text{АК}} V_k}{dt} = \frac{dV}{dt}. \quad (3.29)$$

Для удобства анализа системы уравнений с помощью информационной матрицы можно ввести в систему вспомогательную переменную  $V$  – общий объем жидкости в связанных аккумуляторах. Уравнение, связывающее общий объем жидкости в связанных аккумуляторах с уровнем жидкости в них, будет иметь вид

$$V = \sum_{k \in \text{ак}} S_k \cdot H_k, \quad (3.30)$$

где  $S_k$  – площадь поперечного сечения  $k$ -го связанного аккумулятора,  $\text{м}^2$ ;  $H_k$  – уровень жидкости в  $k$ -м связанном аккумуляторе. Тогда балансовое уравнение для узловой точки с системой связанных аккумуляторов (3.28) запишется в следующем виде:

$$\sum_{i \in \text{вх}} v_i - \sum_{j \in \text{вых}} v_j - \frac{dV}{dt} = 0. \quad (3.31)$$

Это уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Для решения данного уравнения необходимо представить его в конечно-разностном виде по явной схеме Эйлера:

$$\frac{V^{(k+1)} - V^{(k)}}{\Delta t} = \sum_{i \in \text{вх}} v_i^{(k)} - \sum_{j \in \text{вых}} v_j^{(k)}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.32)$$

Рассмотрим ниже пример составления системы уравнений математического описания нестационарного режима движения жидкости в простой гидравлической системе со связанными аккумуляторами (рис. 3.19). Исходные данные для расчета представлены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

**Исходные данные для расчета нестационарного режима движения жидкости в гидравлической системе (рис. 3.19)**

Начальное давление газа в аккумуляторе	$P_N = 101325 \text{ Па}$
Давление жидкости на входе в систему	$P_1 = 4P_N$
Давление жидкости на выходе из системы	$P_2 = P_N; P_3 = 2P_N; P_4 = 3P_N$
Высота аккумуляторов	$H_1^G = H_2^G = H_3^G = 1 \text{ м}$
Начальный объем жидкости в аккумуляторах	$V_0 = 0$
Площадь поперечного сечения аккумуляторов	$S_1 = S_2 = S_3 = 1 \text{ м}^2$
Коэффициент пропускной способности клапанов	$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 =$ $= 8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Па}^{-1/2}$
Плотность жидкости	$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$
Ускорение свободного падения	$g = 9,8 \text{ м/с}^2$

Математическое описание нестационарного режима гидравлической системы (3.26) будет представлять собой систему (3.33), которая состоит из следующих уравнений:

- уравнения п. 1–4 для скоростей потоков через клапаны;
- уравнения п. 5–7 для давления газа в аккумуляторах;

– уравнения п. 8–10 для давления газа на дно аккумуляторов;  
 – уравнение баланса п. 11;  
 – уравнение п. 12, связывающее объем жидкости в связанных аккумуляторах с уровнями жидкости в них.

$$\left. \begin{aligned}
 1. \quad v_1 &= k_1 \cdot \text{sign}(P_1 - P_5) \sqrt{|P_1 - P_5|}. \\
 2. \quad v_2 &= k_2 \cdot \text{sign}(P_5 - P_2) \sqrt{|P_5 - P_2|}. \\
 3. \quad v_3 &= k_3 \cdot \text{sign}(P_5 - P_3) \sqrt{|P_5 - P_3|}. \\
 4. \quad v_4 &= k_4 \cdot \text{sign}(P_5 - P_4) \sqrt{|P_5 - P_4|}. \\
 5. \quad P_6 &= P_N \frac{H_1^G}{H_1^G - H_1}. \\
 6. \quad P_7 &= P_N \frac{H_2^G}{H_2^G - H_2}. \\
 7. \quad P_8 &= P_N \frac{H_3^G}{H_3^G - H_3}. \\
 8. \quad P_5 &= P_6 + \rho g H_1. \\
 9. \quad P_5 &= P_7 + \rho g H_2. \\
 10. \quad P_5 &= P_8 + \rho g H_3. \\
 11. \quad v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - \frac{dV}{dt} &= 0. \\
 12. \quad V &= S_1 H_1 + S_2 H_2 + S_3 H_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Таким образом, имеем 12 уравнений. В качестве определяемых переменных выбираем  $v_1, v_2, v_3, v_4, P_5, P_6, P_7, P_8, H_1, H_2, H_3, V$ .

Дифференциальное уравнение п. 11 представим в конечно-разностном виде:

$$11^*. \quad \frac{V^{k+1} - V^k}{\Delta t} = v_1 - v_2 - v_3 - v_4 = f_{11}(V^k). \quad (3.34)$$

Начальное условие, необходимое для получения определенного решения дифференциального уравнения, представим уравнением

$$11'. \quad V^k = V_0. \quad (3.35)$$

Таким образом, система уравнений (3.33) для интервала времени  $k$  может быть записана в соответствии с явной схемой Эйлера в следующем виде:



$$\begin{aligned}
1. \quad v_1^{(k)} &= k_1 \cdot \text{sign}(P_1 - P_5^{(k)}) \sqrt{|P_1 - P_5^{(k)}|}. \\
2. \quad v_2^{(k)} &= k_2 \cdot \text{sign}(P_5^{(k)} - P_2) \sqrt{|P_5^{(k)} - P_2|}. \\
3. \quad v_3^{(k)} &= k_3 \cdot \text{sign}(P_5^{(k)} - P_3) \sqrt{|P_5^{(k)} - P_3|}. \\
4. \quad v_4^{(k)} &= k_4 \cdot \text{sign}(P_5^{(k)} - P_4) \sqrt{|P_5^{(k)} - P_4|}. \\
5. \quad P_6^{(k)} &= P_N \frac{H_1^G}{H_1^G - H_1^{(k)}}. \\
6. \quad P_7^{(k)} &= P_N \frac{H_2^G}{H_2^G - H_2^{(k)}}. \\
7. \quad P_8^{(k)} &= P_N \frac{H_3^G}{H_3^G - H_3^{(k)}}. \\
8. \quad P_5^{(k)} &= P_6^{(k)} + \rho g H_1^{(k)}. \\
9. \quad P_5^{(k)} &= P_7^{(k)} + \rho g H_2^{(k)}. \\
10. \quad P_5^{(k)} &= P_8^{(k)} + \rho g H_3^{(k)}. \\
11^*. \quad \frac{V^{k+1} - V^k}{\Delta t} &= v_1^{(k)} - v_2^{(k)} - v_3^{(k)} - v_4^{(k)} = f_{11}(V^k). \\
11'. \quad V^{(k)} &= V_0. \\
12. \quad V^{(k)} &= S_1 H_1^{(k)} + S_2 H_2^{(k)} + S_3 H_3^{(k)}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

В этой системе все переменные относятся к моменту времени  $k$  и только переменная  $V^{(k+1)}$  относится к моменту времени  $k + 1$ . Таким образом, система (3.36) представляет собой систему из 13 конечных уравнений с 13 переменными. В качестве переменных этой системы будут выступать:  $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_3^{(k)}, v_4^{(k)}, P_5^{(k)}, P_6^{(k)}, P_7^{(k)}, P_8^{(k)}, H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, H_3^{(k)}, V^{(k)}$  и  $V^{(k+1)}$ . Информационную матрицу данной системы, состоящую из 13 строк и 13 столбцов, представим в табл. 3.5. Первым шагом алгоритма расчета будет присваивание переменной  $V^{(k)}$  значения, которое на момент времени  $k = 0$  будет являться начальным значением  $V_0$ , а на последующие моменты времени будет представлять собой значение  $V^{(k+1)}$ , рассчитанное из системы для предыдущего момента времени.

Блок-схема алгоритма решения системы уравнений, составленная в соответствии с последним столбцом информационной матрицы, представлена на рис. 3.20.

**Информационная матрица системы уравнений (3.36)  
математического описания схемы на рис. 3.19**

№ ур-я	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$P_5^{(k)}$	$P_6^{(k)}$	$P_7^{(k)}$	$P_8^{(k)}$	$H_1^{(k)}$	$H_2^{(k)}$	$H_3^{(k)}$	$V^{(k)}$	$V^{(k+1)}$	№ шага
1	+				+									9
2		+			+									10
3			+		+									11
4				+	+									12
5						+			+					2
6							+			+				4
7								+			+			6
8					+	+			+					3
9 кор. ур					+		+		+	+				7, 8
10 кор. ур					+			+	+	+	+			7, 8
11* диф. ур	+	+	+	+								+	+	13
11'												+		1
12									+	+	+	+		5

Как видно из данной матрицы, после начала вычислений по заданному значению объема  $V^{(k)}$ , чтобы вычислить значение объема в следующий момент времени  $V^{(k+1)}$ , необходимо решить систему из двух уравнений (два корректирующих уравнения п. 9 и п. 10) относительно двух неизвестных ( $H_1$  и  $H_2$ ):

$$\begin{cases} f_9(H_1, H_2) = 0, \\ f_{10}(H_1, H_2) = 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Таким образом, внутри основного цикла алгоритма 11\* (рис. 3.20) решения дифференциального уравнения п. 11\* используется внутренний цикл решения системы уравнений (3.36), изображенный алгоритмическим блоком 9, 10.

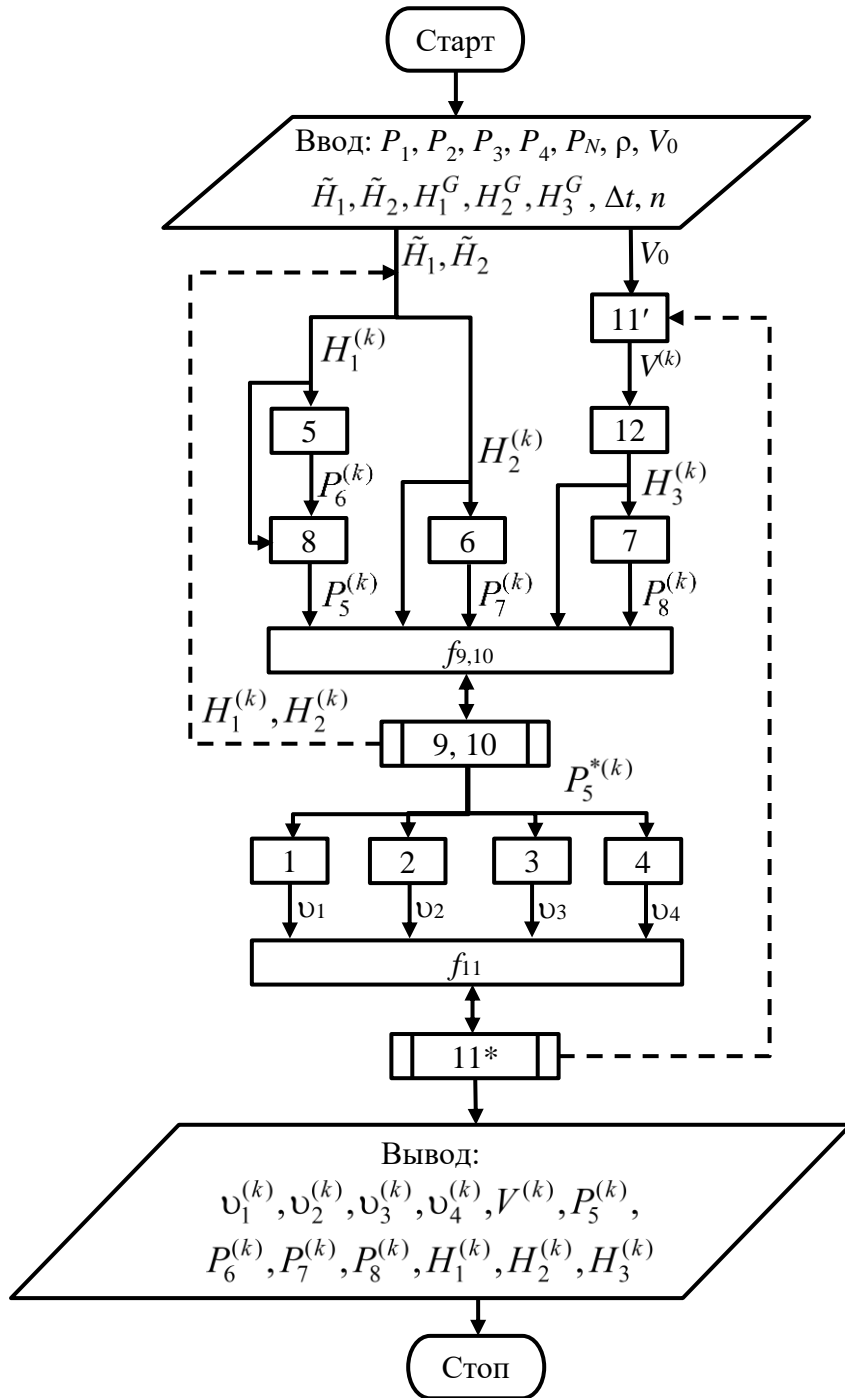


Рис. 3.20. Блок-схема алгоритма расчета нестационарного режима движения жидкости в гидравлической системе со связанными аккумуляторами (рис. 3.19)

Уравнения п. 9 и п. 10 можно представить так, чтобы правая часть равнялась нулю. Тогда функции  $f_9$  и  $f_{10}$  будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f_9(H_1, H_2) &= P_5 - P_7 - \rho g H_2; \\
 f_{10}(H_1, H_2) &= P_5 - P_8 - \rho g H_3.
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

В системе Mathcad программы-функции  $f_9$ ,  $f_{10}$  и программа решения системы уравнений в виде функции  $H_{12}$ , использующая блок Given Find, представлены на рис. 3.21. Причем функции  $f_{10}$  и  $H_{12}$  используют в качестве аргумента значение переменной  $V$ .

$f_9(H_1, H_2) := \begin{cases} P_6 \leftarrow PN \cdot \frac{H_{1G}}{H_{1G} - H_1} \\ P_5 \leftarrow P_6 + \rho \cdot g \cdot H_1 \\ P_7 \leftarrow PN \cdot \frac{H_{2G}}{H_{2G} - H_2} \\ P_5 - P_7 - \rho \cdot g \cdot H_2 \end{cases}$ $H_1 := \frac{H_{1G}}{2} \quad H_2 := \frac{H_{2G}}{2}$ <p>Given</p> $f_9(H_1, H_2) = 0$ $f_{10}(H_1, H_2, V) = 0$ $H_{12}(V) := \text{Find}(H_1, H_2)$	$f_{10}(H_1, H_2, V) := \begin{cases} P_6 \leftarrow PN \cdot \frac{H_{1G}}{H_{1G} - H_1} \\ P_5 \leftarrow P_6 + \rho \cdot g \cdot H_1 \\ H_3 \leftarrow \frac{V - S_1 \cdot H_1 - S_2 \cdot H_2}{S_3} \\ P_8 \leftarrow PN \cdot \frac{H_{3G}}{H_{3G} - H_3} \\ P_5 - P_8 - \rho \cdot g \cdot H_3 \end{cases}$
--	--

Рис. 3.21. Фрагмент документа Mathcad решения системы (3.37)

В данном примере начальные значения для искоемых переменных  $H_1$  и  $H_2$  приняты равными половине высоты аккумуляторов. Далее блок Given Find выполняет решение системы уравнений и результат представляется как функция  $H_{12}$ , зависящая от переменной  $V$ . Результатом вызова этой функции является вектор-столбец, содержащий значения переменных  $H_1$  и  $H_2$ . Первый элемент этого вектора будет переменная  $H_1$ , а вторым –  $H_2$ .

При вызовах функций  $f_9$  и  $f_{10}$  переменные  $P_5$  и  $P_6$  будут вычисляться дважды. Чтобы этого не происходило, можно функции  $f_9$  и  $f_{10}$  объединить в одну, которая будет возвращать вектор-столбец, состоящий из двух элементов, а в блоке Given Find уравнение записать в матричном виде. Пример такой более эффективной реализации алгоритма решения системы уравнений (3.37) приведен на рис. 3.22. Здесь функция  $f_{910}$  имеет два аргумента:  $H$  и  $V$ . Первый аргумент представляет собой вектор, состоящий из двух элементов. Первый элемент – это значение переменной  $H_1$ , а второй –  $H_2$ .

Для решения дифференциального уравнения в MathCad необходимо создать программу-функцию  $f_{11}(V)$ , вычисляющую значения всех переменных процесса в текущий момент времени  $k$  на основе значения переменной  $V$ . Эта программа-функция в MathCad представлена на рис. 3.23.

$f_{910}(H, V) :=$ $P6 \leftarrow PN \cdot \frac{H1G}{H1G - H_0}$ $P5 \leftarrow P6 + \rho \cdot g \cdot H_0$ $H3 \leftarrow \frac{V - S1 \cdot H_0 - S2 \cdot H_1}{S3}$ $P8 \leftarrow PN \cdot \frac{H3G}{H3G - H3}$ $P7 \leftarrow PN \cdot \frac{H2G}{H2G - H_1}$ $\begin{pmatrix} P5 - P7 - \rho \cdot g \cdot H_1 \\ P5 - P8 - \rho \cdot g \cdot H3 \end{pmatrix}$	$H := \begin{pmatrix} \frac{H1G}{2} \\ \frac{H2G}{2} \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">Given</p> $f_{910}(H, V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $H12(V) := \text{Find}(H)$
---	--

Рис. 3.22. Фрагмент документа MathCad эффективного решения системы (3.37)

Она использует ранее определенную функцию H12 для нахождения переменных  $H_1$  и  $H_2$  и возвращает вектор-столбец всех 12 переменных (в порядке  $v_1, v_2, v_3, v_4, P_5, P_6, P_7, P_8, H_1, H_2, H_3, V$ ). Последним элементом возвращаемого вектора является значение правой части дифференциального уравнения п. 11 ( $v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ ).

На рис. 3.23 также представлена основная функция Gidrav, реализующая решение системы уравнений (3.33), описывающих нестационарный режим движения жидкости в гидравлической системе, представленной на рис. 3.19. Эта программа-функция рассчитывает значения переменных во все заданные моменты времени с индексами от 0 до  $n$  в цикле for... Внутри цикла рассчитанные функцией f11 значения переменных сохраняются в матрицу R, каждый столбец которой содержит значения переменных в заданные моменты времени. Значение переменной  $V$  в следующий момент времени ( $k + 1$ ) вычисляется по уравнению п. 11\* на основе значения в текущий момент времени ( $k$ ):

$$V^{(k+1)} = V^{(k)} + \Delta t \cdot f_{11}(V^{(k)}). \quad (3.39)$$

Значение функции  $f_{11}$  предварительно было рассчитано и сохранено в 13-й строке вектора, возвращаемого функцией f11 в Mathcad (рис. 3.23). Поэтому в функции Gidrav для расчета переменной  $V$  в следующий момент времени используется величина  $R_{12, k}$ . Индекс 12 указывает на 13-й элемент строки, поскольку в MathCad нумерация элементов матриц начинается с нуля. Далее после использования этого 13-го элемента строки его значение заменяется значением текущего момента времени.

$f11(V) :=$	$H \leftarrow H12(V)$ $P6 \leftarrow PN \cdot \frac{H1G}{H1G - H_0}$ $P5 \leftarrow P6 + \rho \cdot g \cdot H_0$ $H3 \leftarrow \frac{V - S1 \cdot H_0 - S2 \cdot H_1}{S3}$ $P7 \leftarrow PN \cdot \frac{H2G}{H2G - H_1}$ $P8 \leftarrow PN \cdot \frac{H3G}{H3G - H3}$ $v1 \leftarrow \text{sign}(P1 - P5) \cdot k1 \cdot \sqrt{ P1 - P5 }$ $v2 \leftarrow \text{sign}(P5 - P2) \cdot k2 \cdot \sqrt{ P5 - P2 }$ $v3 \leftarrow \text{sign}(P5 - P3) \cdot k3 \cdot \sqrt{ P5 - P3 }$ $v4 \leftarrow \text{sign}(P5 - P4) \cdot k4 \cdot \sqrt{ P5 - P4 }$ $\left( \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ P5 \\ P6 \\ P7 \\ P8 \\ H_0 \\ H_1 \\ H3 \\ V \\ v1 - v2 - v3 - v4 \end{array} \right)$
-------------	---

$Gidrav(V0, \Delta t, n) :=$	$Vk \leftarrow V0$ for $k \in 0..n$ $R^{(k)} \leftarrow f11(Vk)$ $Vk \leftarrow Vk + \Delta t \cdot R_{12,k}$ $R_{12,k} \leftarrow \Delta t \cdot k$ $R$
------------------------------	---

Рис. 3.23. Фрагмент документа MathCad с функцией f11 и функцией решения системы уравнений (3.33)

Результат вызова этой функции представляет собой матрицу (рис. 3.24). Каждый столбец этой матрицы соответствует определенному моменту времени  $k$ , и число столбцов равно  $n$ . Каждая строка матрицы соответствует определенной переменной в порядке  $v_1, v_2, v_3, v_4, P_5, P_6, P_7, P_8, H_1, H_2, H_3, V$ , а последняя строка содержит значения времени в секундах. В данном примере интервал времени  $\Delta t$  подбирался таким образом, чтобы значения рассчитанных переменных соответствовали их физическому смыслу и изменялись плавно во времени

(рис. 3.26–3.28),  $\Delta t$  составил 30 с. Число рассчитываемых интервалов времени  $n$ , подбиралось так, чтобы значения переменных вышли на некоторое постоянное значение (рис. 3.26–3.28), соответствующее стационарному режиму движения жидкости в гидравлической системе. Выбрано число интервалов  $n = 300$ .

$G := \text{Gidrav}(0, 30, 300) =$		0	1	2	3	
	0	$4.797 \cdot 10^{-4}$	$4.786 \cdot 10^{-4}$	$4.776 \cdot 10^{-4}$	$4.766 \cdot 10^{-4}$	
	1	0	$3.124 \cdot 10^{-5}$	$4.407 \cdot 10^{-5}$	$5.398 \cdot 10^{-5}$	
	2	$-2.769 \cdot 10^{-4}$	$-2.752 \cdot 10^{-4}$	$-2.734 \cdot 10^{-4}$	$-2.716 \cdot 10^{-4}$	-
	3	$-3.916 \cdot 10^{-4}$	$-3.904 \cdot 10^{-4}$	$-3.892 \cdot 10^{-4}$	$-3.879 \cdot 10^{-4}$	-
	4	$1.013 \cdot 10^5$	$1.026 \cdot 10^5$	$1.039 \cdot 10^5$	$1.052 \cdot 10^5$	
	5	$1.013 \cdot 10^5$	$1.025 \cdot 10^5$	$1.037 \cdot 10^5$	$1.048 \cdot 10^5$	
	6	$1.013 \cdot 10^5$	$1.025 \cdot 10^5$	$1.037 \cdot 10^5$	$1.048 \cdot 10^5$	
	7	$1.013 \cdot 10^5$	$1.025 \cdot 10^5$	$1.037 \cdot 10^5$	$1.048 \cdot 10^5$	
	8	0	0.011	0.023	0.034	
	9	0	0.011	0.023	0.034	
	10	0	0.011	0.023	0.034	
	11	0	0.034	0.068	0.101	
12	0	30	60	90		

Рис. 3.24. Результат решения системы уравнений, описывающих нестационарный режим движения жидкости в гидравлической системе (рис. 3.19)

Результаты расчетов удобнее представить в виде графиков зависимостей определяемых переменных от времени. Для удобства построения графиков присвоим определяемым переменным вектор их значения из результирующей матрицы. Для чего необходимо матрицу результатов, обозначенную  $G$ , транспонировать (рис. 3.25).

$$\begin{array}{l}
 v1 := (G^T)^{\langle 0 \rangle} \quad v2 := (G^T)^{\langle 1 \rangle} \quad v3 := (G^T)^{\langle 2 \rangle} \quad v4 := (G^T)^{\langle 3 \rangle} \quad p5 := (G^T)^{\langle 4 \rangle} \quad p6 := (G^T)^{\langle 5 \rangle} \quad t := (G^T)^{\langle 12 \rangle} \\
 p7 := (G^T)^{\langle 6 \rangle} \quad p8 := (G^T)^{\langle 7 \rangle} \quad n1 := (G^T)^{\langle 8 \rangle} \quad n2 := (G^T)^{\langle 9 \rangle} \quad n3 := (G^T)^{\langle 10 \rangle} \quad v := (G^T)^{\langle 11 \rangle}
 \end{array}$$

Рис. 3.25. Присваивание идентификаторов для рассчитанных переменных из матрицы результатов решения системы (3.33)

На рис. 3.26 представлены графики зависимостей скоростей движения жидкости через клапаны 1–4 от времени. Можно видеть, что примерно через 4000 с характер движения жидкости устанавливается и практически превращается в стационарный (не зависит от времени). При этом скорость движения жидкости через клапан 4 – отрицательная.

Это означает, что направление движения жидкости противоположно стрелке на схеме (рис. 3.19), для остальных клапанов движение жидкости совпадает с направлением стрелок на схеме (рис. 3.19) в установившемся режиме. Из графика для скорости движения жидкости через 3-й клапан видно, что в начальный период времени (до ~3000 с) направление движения жидкости через этот клапан – обратное, а затем становится прямым, соответствующим стрелкам на схеме (рис. 3.19).

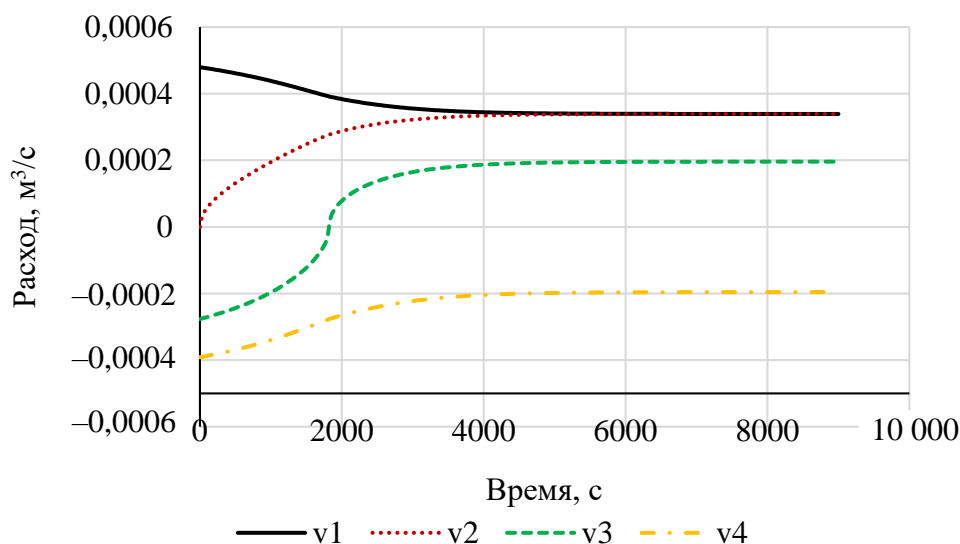


Рис. 3.26. Зависимости скорости движения жидкости  $v_1$ – $v_4$  через клапаны 1–4 от времени в гидравлической системе (рис. 3.19)

На рис. 3.27 представлена зависимость давления жидкости ( $P_5$ ) внутри системы и давления газа ( $P_6$ ) в первом аккумуляторе от времени.

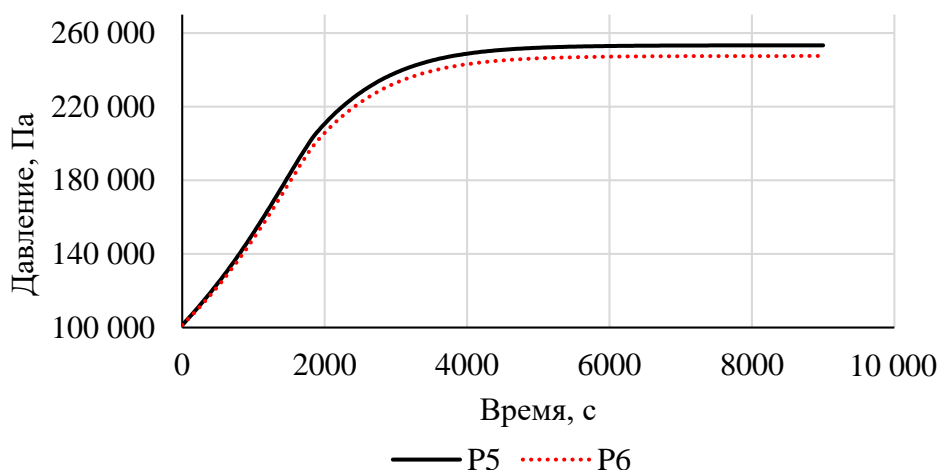


Рис. 3.27. Зависимости давления жидкости ( $P_5$ ) и газа в первом аккумуляторе ( $P_6$ ) гидравлической системы (рис. 3.19) от времени



Давления газа в двух других аккумуляторах точно такие же, как в первом. Здесь также видно, что стационарный режим устанавливается примерно через 4000 с после подачи давления на входы и выходы системы. Можно отметить, что давления жидкости и газа внутри системы увеличиваются после подачи давления на входы примерно в 2 раза: от 1 до 2 атм.

На рис. 3.28 представлены графики зависимости уровней жидкости в аккумуляторах 1 и 2 от времени. Поскольку аккумуляторы абсолютно одинаковы и соединены друг с другом (сопряженные), то и уровни жидкости в них должны быть одинаковы, что и показано на рис. 3.28, где оба графика сливаются.

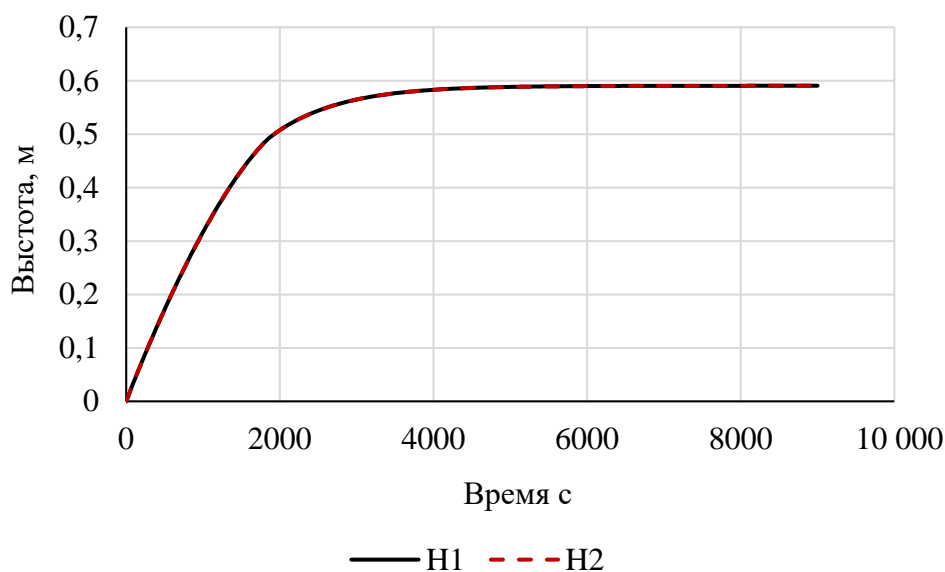


Рис. 3.28. Зависимость уровней жидкости в первом (Н1) и во втором (Н2) аккумуляторах гидравлической системы (рис. 3.19) от времени

Таким образом, математическая модель нестационарного режима движения жидкости в простой гидравлической системе предусматривает наличие в системе уравнений математического описания дифференциального уравнения. Решением дифференциального уравнения получают зависимости определяемых переменных процесса от времени. Эти зависимости имеют вид таблицы (матрицы), в которой для каждого момента времени приводятся значения определяемых переменных. Для наглядного представления результатов моделирования необходимо использовать графическое изображение данных.

Выполнение работы обычно заканчивается представлением результатов расчетов в графическом виде. После выполнения работы необходимо оформить и предоставить к защите отчет.

Отчет должен содержать: 1) название, цель и задачи работы; 2) схему гидравлической системы с исходными данными для расчета; 3) систему уравнений математического описания процесса и определяемые переменные; 4) информационную матрицу системы уравнений; 5) блок-схему алгоритма решения системы уравнений; 6) листинг реализованных в MathCad программ вычислений; 7) полученные результаты расчета в виде таблиц и в графическом виде; 8) вывод с указанием усвоенных навыков и умений.

### **Задание**

1. Построить математическое описание нестационарного режима движения жидкости в заданной простой гидравлической системе.
2. Составить информационную матрицу системы уравнений и блок-схему алгоритма решения системы уравнений с дифференциальным уравнением.
3. Реализовать алгоритм решения системы уравнений с использованием программ-функций в САПР MathCad.
4. Проанализировать и обсудить полученные результаты решения.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Понятие простой гидравлической системы.
2. Основные допущения, принятые при построении математического описания простых гидравлических систем.
3. Основные элементы простой гидравлической системы.
4. Виды уравнений, входящих в математическое описание простых гидравлических систем.
5. Понятие информационной матрицы.
6. Выбор алгоритма решения системы уравнений математического описания процесса на основе анализа информационной матрицы.
7. Понятие нестационарного режима движения жидкости в гидравлической системе.
8. Блок-схема алгоритма решения системы уравнений: условные обозначения и построение.
9. Основные понятия численного решения дифференциальных уравнений.
10. Явные и неявные методы Эйлера решения дифференциальных уравнений.

## 3.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЛЬВАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

### Лабораторная работа

## МАССООБМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМЕ ПРОМЫВКИ В ГАЛЬВАНОТЕХНИКЕ

**Цель работы:** построение математической модели массообмена в системе противоточной промывки в гальванотехнике.

### Теоретическая часть

Система противоточной промывки в гальванотехнике после основной операции представляет собой каскад из  $N$  ванн, расположенных последовательно, в которых промывная вода противотоком перетекает из последующей ванны в предыдущую (рис. 3.29).

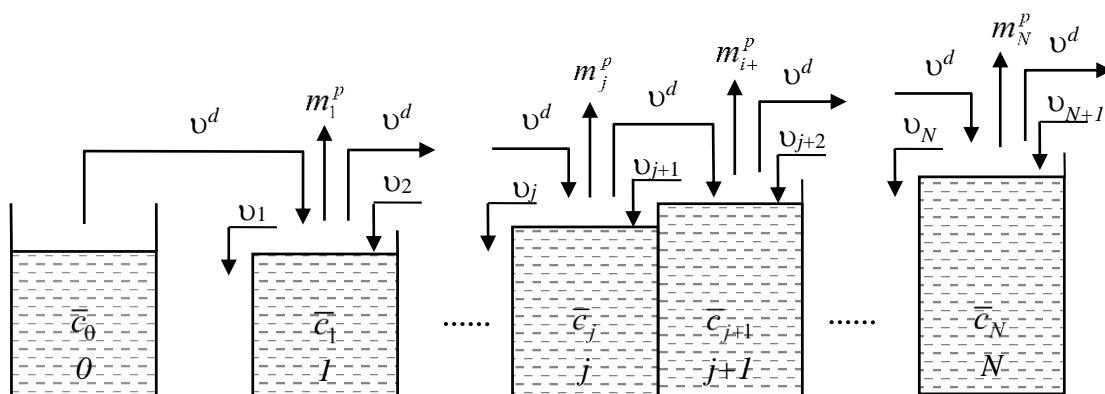


Рис. 3.29. Схема системы каскадной противоточной промывки с указанием учитываемых потоков

В каскадной системе промывки содержится  $N$  ванн. Каскадные ванны промывки пронумерованы цифрами от 1 до  $N$ . Ванна, обозначенная цифрой 0 на схеме, — основная. На схеме изображены основные потоки, которые будем учитывать в математическом описании процесса каскадной промывки деталей. Все потоки можно разделить на три вида:

а) основной поток промывки, выходящий из  $j$ -й ванны, обозначается  $v_j$ , где индекс  $j$  изменяется от 1 до  $N + 1$ ; поток  $v_{N+1}$  — поток чистой промывной воды, поступающий в первую по ходу промывной воды каскадную ванну промывки (на схеме ванна обозначена номером  $N$ ); поток  $v_j$  выходит из  $j$ -й ванны и поступает в  $j - 1$ -ю ванну каскада;

б) поток, выносимый из ванны (вносимый в ванну) вместе с деталями, обозначается  $v^d$ ; согласно схеме, поток  $v^d$  выносится из  $j$ -й ванны и вносится в следующую по ходу промывки  $j + 1$ -ю ванну каскада; поток  $v^d$  в каждой ванне одинаков по объему, но отличается массой, поскольку состав и плотность растворов в ваннах разные; этот поток выражается следующей формулой:

$$v^d = S_e \cdot q_{\text{ун}} \cdot k_3, \quad (3.40)$$

где  $v^d$  – поток, уносимый с деталями,  $\text{дм}^3/\text{ч}$ ;  $S_e$  – площадь единовременной загрузки деталей с подвеской,  $\text{м}^2$ ;  $q_{\text{ун}}$  – удельный унос раствора,  $\text{дм}^3/\text{м}^2$ ;  $k_3$  – число загрузок основной ванны в час,  $\text{ч}^{-1}$ ;

в) поток испарения с поверхности ванны  $m_j^p$ ; испаряется из ванн обычно только вода; скорость испарения воды из поверхности ванн (поток испарения) можно рассчитать по формуле

$$m_j^p = \frac{46,5 \cdot K_v \cdot S_j \cdot (pv_j - \varphi \cdot p_{\text{возд}})}{p_{\text{атм}}}, \quad (3.41)$$

где  $m_j^p$  – поток испарения из  $j$ -й ванны,  $\text{кг}/\text{ч}$ ;  $K_v$  – коэффициент движения воздуха;  $S_j$  – площадь зеркала раствора  $j$ -й ванны,  $\text{м}^2$ ;  $pv_j$  – давление насыщенного водяного пара при температуре раствора в  $j$ -й ванне, Па;  $\varphi$  – относительная влажность воздуха в цехе;  $p_{\text{возд}}$  – давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха в цехе, Па;  $p_{\text{атм}}$  – атмосферное давление, Па.

Кроме уравнений для потока с деталями и испарения в систему уравнений математического описания включаются уравнения баланса массы, которые для  $j$ -й ванны каскадной промывки будут выглядеть так:

$$v_{j+1} \cdot \rho_{j+1} - v_j \cdot \rho_j + v^d \cdot \rho_{j-1} - v^d \cdot \rho_j - m_j^p = 0; \quad j \in 1 \dots N, \quad (3.42)$$

где  $v_j$  – объемный поток, выходящий из  $j$ -й ванны,  $\text{дм}^3/\text{ч}$ ;  $\rho_j$  – плотность раствора в  $j$ -й ванне каскада,  $\text{кг}/\text{дм}^3$ . Для упрощения дальнейших выкладок и расчетов в системе MathCad будем обозначать величины, входящие в уравнения, в виде векторов и матриц. Так, в уравнениях материального баланса (3.42) будут фигурировать:

– вектор потока промывки из ванн каскада

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N+1} \end{pmatrix}; \quad (3.43)$$

– вектор плотности растворов

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{N+1} \end{pmatrix}; \quad (3.44)$$

– вектор потока испарения из ванн каскада

$$\bar{m}^p = \begin{pmatrix} m_1^p \\ m_2^p \\ \vdots \\ m_N^p \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Размерности векторов выбраны разными для сохранения общей формы записи уравнений материального баланса системы. Так, индекс 0 относится к раствору в основной ванне ( $\rho_0$  – плотность раствора в основной ванне). Индекс  $N + 1$  относится в промывной воде, поступающей в первую по ходу течения промывной воды или последнюю по ходу промывки деталей ванну (рис. 3.29). Также необходимо отметить, что значения элементов векторов с индексами 0 и  $N + 1$  будут считаться заданными и не будут выступать в качестве определяемых переменных процесса.

Также в систему уравнений математического описания необходимо включить уравнения балансов по компонентам, которые для  $j$ -й ванны и  $i$ -го компонента будут иметь вид

$$v_{j+1} \cdot c_{i,j+1} - v_j \cdot c_{i,j} + v^d \cdot c_{i,j-1} - v^d \cdot c_{i,j} = 0, \quad i \in 1 \dots l, \quad j \in 1 \dots N, \quad (3.46)$$

где  $l$  – число компонентов раствора;  $c_{ij}$  – массовая концентрация  $i$ -го компонента раствора в  $j$ -й ванне, г/дм<sup>3</sup>. Массовые концентрации компонентов в растворе можно представить в виде матрицы концентраций:

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,N+1} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & \cdots & c_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{l,0} & c_{l,1} & \cdots & c_{l,N+1} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

В данной матрице строки соответствуют компонентам раствора, а столбцы – ваннам промывки. Строки нумеруются от 1 до  $l$ , столбцы – от 0 до  $N + 1$ . В первом столбце матрицы концентраций будет состав

раствора в основной ванне под номером 0, а в последней строке – содержание компонентов в промывной воде, поступающей в  $N + 1$ -ю ванну промывки. В последнем столбце концентрации компонентов можно приравнять нулю. Также необходимо отметить, что значения концентраций в столбцах под номерами 0 и  $N + 1$  в процессе расчетов будут заданы заранее и не будут являться определяемыми переменными.

При составлении уравнения баланса массы будем учитывать зависимость плотности раствора от его состава. Для расчета плотности многокомпонентного раствора используем формулу

$$\rho(I) = \frac{\sum_{i=1}^l I_i \cdot \rho_i^0(I)}{I}, \quad (3.48)$$

где  $I$  – ионная сила многокомпонентного раствора, моль/л;  $I_i$  – ионная сила  $i$ -го компонента, моль/л;  $\rho_i^0(I)$  – плотность однокомпонентного раствора  $i$ -го компонента с ионной силой  $I$ , кг/дм<sup>3</sup>.

Ионную силу  $i$ -го компонента раствора, который является электролитом, можно рассчитать по формуле

$$I_i^{\text{эл}} = \frac{1}{2} C_i (v_{i+} \cdot z_{i+}^2 + v_{i-} \cdot z_{i-}^2), \quad (3.49)$$

где  $C_i$  – молярная концентрация  $i$ -го компонента, моль/л;  $z_{i+}$ ,  $z_{i-}$  – зарядовое число катиона и аниона  $i$ -го компонента;  $v_{i+}$ ,  $v_{i-}$  – число катионов и анионов, соответственно, в формуле  $i$ -го компонента. Для неэлектролитов ионную силу раствора будем принимать равной молярной концентрации:

$$I_i^{\text{неэл}} = C_i. \quad (3.50)$$

Молярная концентрация  $i$ -го компонента раствора связана с массовой концентрацией следующим выражением:

$$C_i = \frac{c_i}{M_i}, \quad (3.51)$$

где  $M_i$  – молярная масса  $i$ -го компонента раствора, г/моль. Для упрощения выражений с расчетами ионной силы растворов введем для каждого  $i$ -го компонента величину, зависящую от числа, зарядов ионов и молярных масс компонентов:

$$vzM_i = \begin{cases} \frac{v_{i+}z_{i+}^2 + v_{i-}z_{i-}^2}{2M_i}, & i - \text{электролит,} \\ \frac{1}{M_i}, & i - \text{неэлектролит.} \end{cases} \quad (3.52)$$

Тогда в соответствии с выражениями (3.49)–(3.52) ионную силу компонента можно вычислить по простой формуле

$$I_i = c_i \cdot vzM_i. \quad (3.53)$$

Ионная сила многокомпонентного раствора будет равна сумме ионных сил компонентов:

$$I = \sum_{i=1}^l I_i = \sum_{i=1}^l c_i \cdot vzM_i. \quad (3.54)$$

Если ввести вектор величин (3.52) в виде

$$\overline{vzM} = \begin{pmatrix} vzM_1 \\ vzM_2 \\ \vdots \\ vzM_l \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

то ионные силы растворов в основной ванне, в ваннах каскадной промывки и промывной воды, поступающей в  $N + 1$ -ю ванну, можно вычислить по выражениям:

$$I_j = \sum_{i=1}^l c_{i,j} \cdot vzM_i; \quad j \in 0 \dots N + 1. \quad (3.56)$$

Последнее выражение можно записать в компактной матричной форме:

$$\bar{I} = \bar{c}^T \cdot \overline{vzM}, \quad (3.57)$$

где  $\bar{I}$  – вектор ионных сил растворов, аналогичный вектору (3.44) плотностей растворов;  $\bar{c}^T$  – транспонированная матрица концентраций (3.47). Вектор  $\bar{I}$  имеет вид:

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Плотности однокомпонентных растворов, входящие в выражение (3.48), приводятся в справочных таблицах. Уравнения, связывающие плотность раствора с концентрацией, существуют только приближенные. В данной работе плотность раствора свяжем с концентрацией или ионной силой раствора уравнением регрессии, которое получим на основе табличных значений плотности. В качестве уравнения регрессии используем полином оптимальной степени  $m$  следующего вида:

$$\rho^0(I) = \sum_{k=0}^m a_{i,k} \cdot I^k. \quad (3.59)$$

Оптимальную степень полинома определим исходя из данных по погрешности определения табличных значений плотности. Зная дисперсию воспроизводимости и ее число степеней свободы, можно найти полином оптимальной степени, описывающий табличные данные зависимости плотности от ионной силы раствора, с учетом критерия Стьюдента для оценки значимости коэффициентов регрессии и критерия Фишера для оценки адекватности уравнения регрессии (см. лабораторные работы по теме «Основы регрессионного анализа»).

Для расчета плотности раствора, содержащего  $l$  компонентов, необходимо иметь  $l$  уравнений регрессии вида (3.60), которые образуют вектор-функцию  $\rho^0(I)$  с элементами следующего вида:

$$\rho_i^0(I) = \sum_{k=0}^{m_i} a_{i,k} \cdot I^k, \quad i \in 1 \dots l. \quad (3.60)$$

Для расчета плотностей всех растворов, входящих в уравнения баланса, необходимо  $N + 2$  уравнений, которые получаются из уравнения (3.48) с учетом выражений (3.53), (3.54) и (3.56):

$$\rho_j = \frac{\sum_{i=1}^l c_{i,j} \cdot v_z M_i \cdot \rho_i^0(I_j)}{I_j}, \quad j \in 0 \dots N + 1. \quad (3.61)$$

Следует отметить, что плотности растворов в основной ванне ( $\rho_0$ ) и в проточной воде, поступающей в  $N + 1$ -ю ванну ( $\rho_{N+1}$ ) будут постоянными величинами и не будут входить в число определяемых переменных системы.

Таким образом, система уравнений для описания массообменных процессов в схеме противоточной каскадной промывки будет включать следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{1}_N. \quad & v_{j+1} \rho_{j+1} - v_j \rho_j + v^d \rho_{j-1} - v^d \rho_j - m_j^p = 0, \quad j \in 1 \dots N, \\ \bar{2}_{l \times N}. \quad & v_{j+1} c_{i,j+1} - v_j c_{i,j} + v^d c_{i,j-1} - v^d c_{i,j} = 0, \quad i \in 1 \dots l, j \in 1 \dots N, \\ \bar{3}_N. \quad & I_j = \sum_{i=1}^l c_{i,j} \cdot v_z M_i, \quad j \in 1 \dots N, \\ \bar{4}_N. \quad & \rho_j = \frac{\sum_{i=1}^l c_{i,j} \cdot v_z M_i \cdot \rho_i^0(I_j)}{I_j}, \quad j \in 1 \dots N. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$



Система уравнений состоит из  $3N + l \cdot N$  конечных уравнений. Столько же должно быть определяемых переменных. В качестве определяемых переменных выберем:

– выходящие из ванн промывки потоки промывной воды  $v_j$  ( $j \in 1 \dots N$ ), вектор  $\bar{v}$  (3.43) без последнего элемента;

– плотности  $\rho_j$  ( $j \in 1 \dots N$ ) растворов в ваннах промывки, вектор  $\bar{\rho}$  (3.44) без первого и последнего элементов;

– ионные силы  $I_j$  ( $j \in 1 \dots N$ ) растворов в ваннах промывки, вектор  $\bar{I}$  (3.58) без первого и последнего элементов;

– массовые концентрации компонентов в ваннах промывки  $c_{i,j}$  ( $i \in 1 \dots l, j \in 1 \dots N$ ), матрица  $\bar{c}$  (3.47) без первого и последнего столбцов.

Отметим, что важной практической задачей является расчет расхода промывной воды ( $v_{N+1}$ ) по заданным значениям ПДК межоперационной промывки для какого-либо компонента. В данной же модели расход воды должен быть задан, а концентрации – не известны. Это позволяет построить модель в общем виде с любым числом ванн в каскаде. Если же выбрать в качестве определяемой переменной  $v_{N+1}$ , а концентрацию какого-то компонента в последней ванне заданной, то уравнения  $\bar{2}_{l \times N}$  пришлось бы расписывать по отдельности для каждого компонента и для каждой ванны. В результате построение информационной матрицы и разработка алгоритма решения системы уравнений были бы сильно затруднены.

Что касается решения практической задачи нахождения расхода промывной воды  $v_{N+1}$ , то при построении расчетного модуля для решения системы уравнений в общем виде (3.62) можно будет задать расход  $v_{N+1}$  как аргумент конечной программы-функции в Mathcad, рассчитывающей концентрации компонентов. Затем на основе этой программы-функции составить программу-функцию, рассчитывающую концентрацию компонента, для которого требуется определенное значение ПДК, в последней ванне промывки. И наконец, последнюю программу-функцию использовать для решения уравнения относительно  $v_{N+1}$  с требуемым значением ПДК в блоке Given Find системы MathCad.

Информационную матрицу системы уравнений (3.62) представим в виде табл. 3.6.

Согласно последнему столбцу информационной матрицы, в качестве начального приближения при решении системы уравнений выбраны концентрации компонентов в ваннах промывки. Несмотря на то, что начальных приближений придется задавать довольно много ( $N \cdot l$  значений), эти значения можно довольно легко задать. Например,

уменьшая концентрации компонентов исходного раствора в каждой последующей ванне промывки в несколько раз. Таким образом, на основе известных значений элементов матрицы  $\bar{c}$  можно легко вычислить ионные силы растворов в ваннах промывки по уравнениям  $\bar{3}_N$  (1-й шаг), а затем и плотности растворов по уравнениям  $\bar{4}_N$  (2-й шаг). При вычислении ионных сил растворов значительно удобнее провести расчет в матричной форме согласно уравнению (3.57).

Таблица 3.6

Информационная матрица системы уравнений (3.62)

№ уравнения	$\bar{v}$	$\bar{\rho}$	$\bar{I}$	$\bar{c}$	№ шага
$\bar{1}_N$	$\diamond +$	$\circ +$			3
$\bar{2}_{1 \times N}$ кор ур	$\circ +$			$\diamond +$	4
$\bar{3}_N$			$\diamond +$	$\square +$	1
$\bar{4}_N$		$\diamond +$	$\circ +$	$\circ +$	2

На 3-м шаге (табл. 3.6), когда плотности растворов найдены, следует вычислить вектор  $\bar{v}$  выходящих из ванн промывки потоков промывной воды по уравнениям балансов  $\bar{1}_N$  или (3.42). Фактически необходимо решить систему  $N$  уравнений с  $N$  неизвестными  $v_j$ . Но если внимательнее рассмотреть эти уравнения, то можно видеть, что в каждое уравнение (3.42) входит по две определяемые переменные –  $v_{j+1}$  и  $v_j$ , а в последнее уравнение – только одна переменная  $v_N$ , поскольку  $v_{N+1}$  задано. Таким образом, для вычисления вектора  $\bar{v}$  можно последовательно вычислить значения  $v_N$  из последнего уравнения баланса (3.42), затем, зная  $v_N$ , из предпоследнего уравнения вычислить  $v_{N-1}$  и так далее до  $v_1$ . Схематично этот процесс вычислений нагляднее представим в виде информационной матрицы системы (3.62), в которой вектор уравнений  $\bar{1}_N$  и вектор потоков  $\bar{v}$  расписаны поэлементно (табл. 3.7). Формула для вычисления  $v_j$  при известном  $v_{j+1}$  может быть выражена из уравнений (3.42):

$$v_j = \frac{v_{j+1} \cdot \rho_{j+1} + v^d \cdot \rho_{j-1} - v^d \cdot \rho_j - m_j^p}{\rho_j}, \quad j \in 1 \dots N. \quad (3.63)$$

При расчете по этой формуле важен порядок вычислений: индекс  $j$  должен изменяться от  $N$  до 1.

Корректирующие уравнения  $\overline{\overline{2}}_{l \times N}$  или (3.46) представляют собой

систему  $N \cdot l$  уравнений относительно  $N \cdot l$  концентраций компонентов. Если левые части уравнений (3.46) представить матрицей-функцией  $\overline{\overline{f}}_{2_{l \times N}}$  размерности  $l \times N$ , то систему уравнений (3.46) можно записать в следующем матричном виде:

$$\overline{\overline{f}}_{2_{l \times N}}(\overline{c}) = O_{l, N}, \quad (3.64)$$

где  $O_{l, N}$  – нулевая матрица размерности  $l \times N$ .

Таблица 3.7

**Информационная матрица системы уравнений (3.62) с расчетом  $v_i$**

№ ур-я	$v_1$	...	$v_j$	$v_{j+1}$	...	$v_{N-1}$	$v_N$	$\overline{p}$	$\overline{I}$	$\overline{c}$	№ шага
1 <sub>1</sub>	◇+	...						⊕			$N + 2$
...		...	...					...			...
1 <sub>j</sub>			◇+	⊕				⊕			...
1 <sub>j+1</sub>				◇+				⊕			...
...					...	...		...			...
1 <sub>N-1</sub>						◇+	⊕	⊕			4
1 <sub>N</sub>							◇+	⊕			3
$\overline{\overline{2}}_{l \times N}$ кор ур	⊕									◇+	$N + 3$
$\overline{3}_N$									◇+	⊕	1
$\overline{4}_N$								◇+	⊕	⊕	2

Блок-схема алгоритма решения системы уравнений (3.62) в соответствии с информационной матрицей (табл. 3.6) представлена на рис. 3.30.

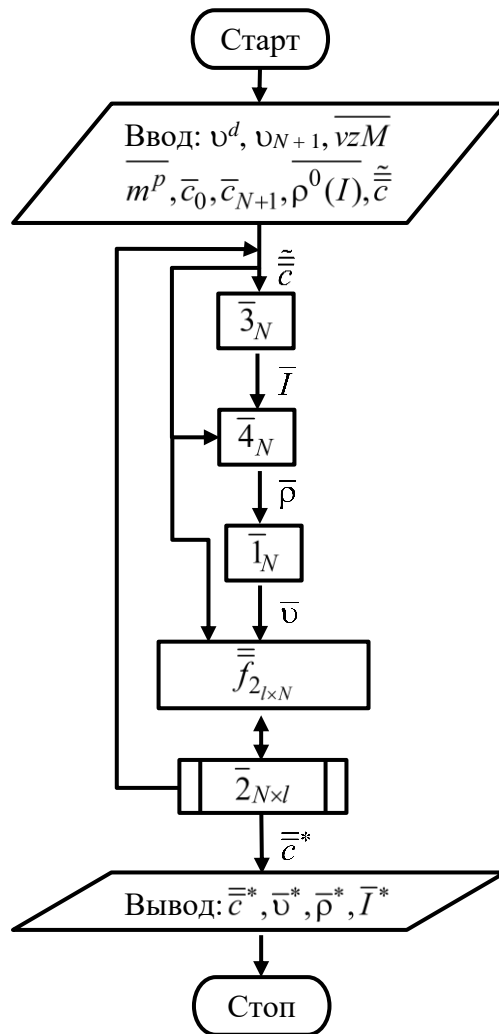


Рис. 3.30. Блок-схема алгоритма решения системы уравнений (3.62)

Алгоритмический блок решения системы уравнений  $\bar{2}_{I \times N}$  может быть реализован в MathCad блоком Given Find, который будет решать уравнения в матричном виде (3.64). Уравнение будет задаваться с помощью программы-функции, аргументом которой является матрица концентраций, а результатом – матрица левых частей уравнений (3.46), где строки будут соответствовать индексу  $i$ , а столбцы – индексу  $j$ .

Система корректирующих уравнений  $\bar{2}_{I \times N}$  может быть довольно большой. Так, в типичном случае трехкаскадной промывки и раствора, содержащего в основной ванне 3 компонента, получим систему из 9 корректирующих уравнений. Чтобы получить адекватные решения системы в Mathcad с использованием блока Given Find, необходимо задавать начальные приближения концентраций в ваннах промывки достаточно близко к точным значениям. Эта задача вполне решается, так

как существуют приближенные формулы для расчета расхода воды на промывку в зависимости от числа каскадов промывки, по которым можно определить приближенные концентрации веществ в ваннах промывки.

Ниже рассмотрим пример построения математической модели массообменных процессов трехкаскадной промывки. Исходные данные для расчета представлены в табл. 3.8.

Таблица 3.8

**Исходные данные для построения математической модели массообменных процессов в системе трехкаскадной промывки (рис. 3.29)**

Данные	Значение
Состав основной ванны:	
NaCl	$c_{1,0} = 50 \text{ г/дм}^3$
H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	$c_{2,0} = 100 \text{ г/дм}^3$
C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> OH (изопропиловый спирт)	$c_{3,0} = 10 \text{ г/дм}^3$
Данные для расчета потока уноса с деталями (3.40)	
площадь единовременной загрузки	$S_e = 1 \text{ м}^2$
удельный унос	$q_{\text{ун}} = 0,2 \text{ дм}^3/\text{м}^2$
число загрузок в час	$k_3 = 6 \text{ ч}^{-1}$
Данные для расчета потока испарения (3.41)	
коэффициент движения воздуха	$K_b = 0,71$
площадь зеркала раствора над ваннами	$S_1 = S_2 = S_3 = 0,6 \text{ м}^2$
давление насыщенного водяного пара при температуре раствора в ванне ( $t_1 = 50^\circ\text{C}$ ; $t_2 = t_3 = 20^\circ\text{C}$ )	$p_{v1} = 12\,344 \text{ Па};$ $p_{v2} = p_{v3} = 2\,339 \text{ Па}$
относительная влажность воздуха в цехе	$\varphi = 0,7 \text{ (70 \%)}$
давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха в цехе ( $20^\circ\text{C}$ )	$p_{\text{возд}} = 2\,339 \text{ Па}$
атмосферное давление	$p_{\text{атм}} = 101\,325 \text{ Па}$
Плотность воды при $20^\circ\text{C}$	$\rho_{\text{вода}} = 0,9982 \text{ кг/дм}^3$

Поток чистой промывной воды, поступающей в 3-ю ванну промывки  $v_{N+1}$ , будет задаваться как аргумент программ-функций, получаемых при построении модели.

Для расчета плотности растворов в ваннах промывки необходимы табличные данные о зависимости плотности от концентрации растворов индивидуальных веществ. Для растворов NaCl значения плотности приведены в табл. 3.9.

Для растворов серной кислоты плотность раствора в зависимости от концентрации представлена в табл. 3.10.

Таблица 3.9

## Плотности водных растворов NaCl при 20°C

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,0053	1	1,1009	14
1,0125	2	1,1162	16
1,0268	4	1,1319	18
1,0413	6	1,1478	20
1,0559	8	1,1640	22
1,0707	10	1,1804	24
1,0857	12	1,1972	26

Таблица 3.10

Плотности водных растворов H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> при 20°C

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,000	0,261	1,070	10,56
1,005	0,986	1,075	11,26
1,010	1,731	1,080	11,96
1,015	2,485	1,085	12,66
1,020	3,242	1,090	13,36
1,025	4,000	1,095	14,04
1,030	4,746	1,100	14,73
1,035	5,493	1,105	15,41
1,040	6,237	1,110	16,08
1,045	6,956	1,115	16,76
1,050	7,704	1,120	17,43
1,055	8,415	1,125	18,09
1,060	9,129	1,130	18,76
1,065	9,843	1,135	19,42

Для оценки дисперсии воспроизводимости плотности растворов примите случайную погрешность плотности  $\Delta\rho = 0,00005$  кг/дм<sup>3</sup> при числе параллельных опытов  $k = 5$  и уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

Ниже представлен порядок выполнения работы с пояснениями и фрагментами документа MathCad для каждой стадии работы.

Первой стадией работы является ввод исходных данных. Исходные данные вводятся в соответствии с табл. 3.8 (рис. 3.31).

Вектор  $vzM$  вводится вручную в соответствии с формулами (3.52) и (3.55) для каждого компонента раствора. Так, для первого компонента, NaCl, который является электролитом, число катионов и анионов в формуле, а также их заряды равны по 1, а молярная масса – 58,5 г/моль. Для второго компонента, H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, являющегося также электролитом, число катионов с зарядом 1 равно 2, число анионов с зарядом 2 равно 1, а молярная масса равна 98 г/моль. Третий компонент является неэлектролитом с молярной массой 60 г/моль. Вектор  $c0$  содержит

массовые концентрации компонентов в основной ванне в порядке NaCl, H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, C<sub>3</sub>H<sub>7</sub>OH. Идентификатор p<sub>0</sub> соответствует давлению насыщенного водяного пара при температуре воздуха в цехе. Обозначения остальных величин на рис. 3.31 соответствуют обозначениям величин, приведенных выше. Так, v<sup>d</sup> представляет собой поток уноса v<sup>d</sup>, рассчитываемый по формуле (3.40). Вектор m<sub>p</sub> – потоки испарения из ванн промывки, которые рассчитываются в соответствии с формулой (3.41) на основе данных из табл. 3.8. При вычислении вектора m<sub>p</sub> в MathCad использована операция «векторизация» для всего выражения, чтобы арифметические операции умножения и деления выполнялись над соответствующими элементами векторов S (площади зеркала раствора в ваннах) и p<sub>v</sub> (давления насыщенного водяного пара при температуре раствора в ваннах).

$$\begin{array}{l}
 v_{zM} := \begin{pmatrix} \frac{1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2}{2 \cdot 58.5} \\ \frac{2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2}{2 \cdot 98} \\ \frac{1}{60} \end{pmatrix} \quad c_0 := \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} Se := 1 \quad q := 0.2 \\ kz := 6 \\ \rho_{H_2O} := 0.9982 \quad v^d := q \cdot Se \cdot kz = 1.2 \end{array} \\
 K_v := 0.71 \quad p_0 := 2339 \\
 f_i := 0.7 \quad p_{atm} := 101325 \quad \underline{S} := \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad \underline{p_v} := \begin{pmatrix} 12344 \\ 2339 \\ 2339 \end{pmatrix} \\
 m_p := \left[ \overrightarrow{46.5 \cdot K_v \cdot S \cdot \frac{(p_v - f_i \cdot p_0)}{p_{atm}}} \right] = \begin{pmatrix} 2.093 \\ 0.137 \\ 0.137 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 3.31. Ввод исходных данных

Следующей стадией работы является описание зависимости плотности растворов индивидуальных веществ от ионной силы раствора в виде полиномов оптимальной степени (3.59) на основе табличных значений плотности. Это одна из самых трудоемких стадий работы. Выполняется она методом регрессионного анализа (см. подраздел 2.2). Для выбора полинома оптимальной степени проверяется адекватность выбираемого полинома по критерию Фишера и значимость коэффициентов полинома по критерию Стьюдента. При этом степень полинома последовательно повышается, начиная с первой, до тех пор, пока полином не станет адекватным и при этом все коэффициенты будут значимы. Для выполнения этих операций существенным является знание дисперсии воспроизводимости для данных о плотностях растворов,

приведенных в табл. 3.9 и 3.10. Оценку дисперсии воспроизводимости проведем на основе формулы для расчета случайной погрешности измерения плотности:

$$\Delta\rho = t_{1-\frac{\alpha}{2}, k-1} \sqrt{\frac{S_p^2}{k}}, \quad (3.65)$$

где  $\Delta\rho$  – случайная погрешность измерения плотности;  $t_{1-\frac{\alpha}{2}, k-1}$  – квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы  $k - 1$  уровня  $1 - \frac{\alpha}{2}$ ;  $\alpha$  – уровень значимости;  $k$  – число параллельных опытов, использованных при измерении плотности;  $S_p^2$  – выборочная оценка дисперсии воспроизводимости. Из последней формулы выражаем дисперсию воспроизводимости:

$$S_p^2 = k \left( \frac{\Delta\rho}{t_{1-\frac{\alpha}{2}, k-1}} \right)^2. \quad (3.66)$$

Все данные для расчета дисперсии воспроизводимости приведены выше по условию задания. Расчет представлен на рис. 3.32. Здесь квантиль распределения Стьюдента находится встроенной в Mathcad функцией qt.

$\Delta\rho := 0.00005$	$k := 5$	$\alpha := 0.05$
$S2p := k \cdot \left( \frac{\Delta\rho}{\text{qt}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k - 1\right)} \right)^2 = 1.622 \times 10^{-9}$		

Рис. 3.32. Расчет дисперсии воспроизводимости

Рассмотрим далее определение полинома оптимальной степени для зависимости плотности раствора NaCl от ионной силы по данным табл. 3.9. Данные о плотности растворов и массовой доле NaCl (в процентах) вводятся в матрицу D1 (рис. 3.33) из табл. 3.9.

Затем задается вектор  $Y$  зависимой переменной – плотности раствора и вектор  $X$  независимой переменной – ионной силы раствора. Для расчета ионной силы раствора используется формула (3.52), в которой массовая концентрация определяется по плотности и массовой доле вещества в соответствии со следующей формулой:

$$c = 10 \cdot \rho \cdot w, \quad (3.67)$$



где  $c$  – массовая концентрация вещества, г/дм<sup>3</sup>;  $\rho$  – плотность раствора, кг/дм<sup>3</sup>;  $w$  – массовая доля вещества, %. Для поэлементного перемножения вектора плотностей ( $D^{(0)}$ ) и вектора массовых долей ( $D^{(1)}$ ) в MathCad используется операция «векторизации» (рис. 3.33).

$$D1 := \begin{pmatrix} 1.0053 & 1 \\ 1.0125 & 2 \\ 1.0268 & 4 \\ 1.0413 & 6 \\ 1.0559 & 8 \\ 1.0707 & 10 \\ 1.0857 & 12 \\ 1.1009 & 14 \\ 1.1162 & 16 \\ 1.1319 & 18 \\ 1.1478 & 20 \\ 1.164 & 22 \\ 1.1804 & 24 \\ 1.1972 & 26 \end{pmatrix} \quad Y := D1^{(0)} \quad X := 10 \overrightarrow{(D1^{(0)} \cdot D1^{(1)})} \cdot \text{vz}M_0$$

Рис. 3.33. Ввод исходных данных для определения зависимости плотности раствора NaCl от ионной силы

Затем строится полином первой степени для зависимости плотности от ионной силы раствора (рис. 3.34): рассчитываются коэффициенты полинома (вектор  $a1$ ), критерий Фишера ( $F$ ) и вектор критериев Стьюдента ( $tr$ ) для коэффициентов полинома.

$$\begin{aligned} n &:= \text{rows}(D1) = 14 & i &:= 0..n-1 \\ \Phi &:= 1 & \Phi^{(1)} &:= X \\ a1 &:= (\Phi^T \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 0.037 \end{pmatrix} & C &:= (\Phi^T \Phi)^{-1} \\ \rho_{01}(x) &:= a1_0 + a1_1 \cdot x & \text{vad} &:= n - 2 \\ S2ad &:= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \rho_{01}(X_i))^2}{\text{vad}} = 2.06 \times 10^{-6} \\ tr &:= \frac{a1}{\sqrt{\text{diag}(C) \cdot S2p}} = \begin{pmatrix} 5.041 \times 10^4 \\ 5.646 \times 10^3 \end{pmatrix} & F &:= \frac{S2ad}{S2p} = 1.271 \times 10^3 \\ & & qt &\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k - 1\right) = 2.776 \\ & & qF &(1 - \alpha, \text{vad}, k - 1) = 5.912 \end{aligned}$$

Рис. 3.34. Построение полинома первой степени для плотности раствора NaCl

Все расчетные формулы и порядок построения регрессионных моделей представлены выше в подразделе 2.2. Для расчета критериев Фишера и Стьюдента используется рассчитанная выше (рис. 3.32) дисперсия воспроизводимости. Показано (рис. 3.34), что критерий Фишера много больше табличного значения, определяемого функцией qF. Значит, полином первой степени недостаточно точно описывает данные о плотности (модель неадекватна). Переходим к полиному 2-й степени.

Построение полинома 2-й степени приведено на рис. 3.35. Как видно, регрессионная модель на основе полинома 2-й степени также неадекватна. Переходим к полиному 3-й степени.

$$\begin{aligned}
 n &:= \text{rows}(D1) = 14 & i &:= 0..n-1 \\
 \Phi_{\text{ww}} &:= 1 & \Phi^{(1)} &:= X & \Phi^{(2)} &:= X^2 \\
 a1 &:= (\Phi^T \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0.04 \\ -5.69 \times 10^{-4} \end{pmatrix} & C_{\text{ww}} &:= (\Phi^T \Phi)^{-1} \\
 \rho01(x) &:= a1_0 + a1_1 \cdot x + a1_2 \cdot x^2 & \text{vad} &:= n - 3 \\
 S2ad &:= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \rho01(X_i))^2}{\text{vad}} = 4.145 \times 10^{-8} \\
 tr_{\text{ww}} &:= \frac{a1}{\sqrt{\text{diag}(C) \cdot S2\rho}} = \begin{pmatrix} 3.503 \times 10^4 \\ 1.573 \times 10^3 \\ -122.339 \end{pmatrix} & F_{\text{ww}} &:= \frac{S2ad}{S2\rho} = 25.559 & qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k-1\right) &= 2.776 \\
 & & & & qF(1 - \alpha, \text{vad}, k-1) &= 5.936
 \end{aligned}$$

Рис. 3.35. Построение полинома 2-й степени для плотности раствора NaCl

Построение полинома 3-й степени представлено на рис. 3.36. В данном случае критерий Фишера меньше табличного. Значит, модель адекватна, другими словами, полином 3-й степени описывает зависимость плотности раствора от ионной силы с точностью, не уступающей точности экспериментальных данных. При этом все коэффициенты полинома значимы, так как критерии Стьюдента (tr) для всех коэффициентов по модулю больше табличного значения, выражаемого встроенной в MathCad функцией qt. Рассчитанные коэффициенты полинома 3-й степени в виде вектора a1 используются для задания функции ρ01 зависимости плотности раствора первого компонента (NaCl) от ионной силы.

$$\begin{aligned}
n &:= \text{rows}(D1) = 14 & i &:= 0..n-1 \\
\Phi &:= 1 & \Phi^{(1)} &:= X & \Phi^{(2)} &:= X^2 & \Phi^{(3)} &:= X^3 \\
a1 &:= (\Phi^T \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 0.998 \\ 0.041 \\ -1.027 \times 10^{-3} \\ 5.644 \times 10^{-5} \end{pmatrix} & C &:= (\Phi^T \Phi)^{-1} \\
\rho_{01}(x) &:= a1_0 + a1_1 \cdot x + a1_2 \cdot x^2 + a1_3 \cdot x^3 & \text{vad} &:= n - 4 \\
S2ad &:= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \rho_{01}(X_i))^2}{\text{vad}} = 1.853 \times 10^{-9} \\
tr &:= \frac{a1}{\sqrt{\text{diag}(C) \cdot S2p}} = \begin{pmatrix} 2.64 \times 10^4 \\ 637.6 \\ -36.307 \\ 16.423 \end{pmatrix} & F &:= \frac{S2ad}{S2p} = 1.143 & qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k-1\right) &= 2.776 \\
& & & & qF(1 - \alpha, \text{vad}, k-1) &= 5.964
\end{aligned}$$

Рис. 3.36. Построение полинома 3-й степени для плотности раствора NaCl

Аналогично строится полином оптимальной степени для описания зависимости плотности раствора второго компонента ( $H_2SO_4$ ) от ионной силы по экспериментальным данным, приведенным в табл. 3.10. Для раствора  $H_2SO_4$  оптимальная степень полинома оказалась равной 2 (рис. 3.37). По рассчитанным коэффициентам полинома  $a2$  задается функция зависимости плотности раствора второго компонента  $\rho_{02}$  ( $H_2SO_4$ ) от ионной силы.

Третий компонент раствора является неэлектролитом, органическим веществом. Следует отметить, что в гальванотехнике растворы часто содержат добавки органических веществ. Плотность растворов этих веществ зачастую трудно или даже невозможно найти. Но обычно эти добавки вводятся в небольших количествах, и плотность водных растворов многих неорганических веществ мало отличается от плотности воды. Поэтому плотность чистых растворов органических веществ при расчете плотности многокомпонентного раствора обычно принимают равной плотности воды. Поэтому функцию  $\rho_{03}$  зависимости плотности раствора третьего компонента (органического вещества) от ионной силы раствора просто приравняем плотности воды (рис. 3.38).

$$\begin{aligned}
Y &:= D2^{(0)} & X &:= 10 \overline{(D2^{(0)} \cdot D2^{(1)})} \cdot vzM_1 \\
n &:= \text{rows}(D2) = 28 & i &:= 0..n-1 \\
\Phi &:= 1 & \Phi^{(1)} &:= X & \Phi^{(2)} &:= X^2 \\
a2 &:= (\Phi^T \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0.021 \\ -1.337 \times 10^{-4} \end{pmatrix} & C &:= (\Phi^T \Phi)^{-1} \\
\rho 02(x) &:= a2_0 + a2_1 \cdot x + a2_2 \cdot x^2 & vad &:= n - 3 \\
S2ad &:= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \rho 02(X_i))^2}{vad} = 7.826 \times 10^{-9} \\
tr &:= \frac{a2}{\sqrt{\text{diag}(C) \cdot S2\rho}} = \begin{pmatrix} 4.568 \times 10^4 \\ 1.409 \times 10^3 \\ -62.582 \end{pmatrix} & F &:= \frac{S2ad}{S2\rho} = 4.826 \\
& & qt &\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k - 1\right) = 2.776 \\
& & qF &(1 - \alpha, vad, k - 1) = 5.769
\end{aligned}$$

Рис. 3.37. Построение полинома 2-й степени для плотности раствора  $H_2SO_4$

На рис. 3.38 представлена также вектор-функция  $\rho 0$ , объединяющая все зависимости плотности растворов индивидуальных компонентов от ионной силы в соответствии с (3.60). Эта вектор-функция будет использоваться для расчета плотности многокомпонентного раствора в соответствии с формулой (3.61).

$$\rho 03(x) := \rho H_2O \qquad \rho 0(x) := \begin{pmatrix} \rho 01(x) \\ \rho 02(x) \\ \rho 03(x) \end{pmatrix}$$

Рис. 3.38. Вектор-функция плотностей растворов

Следующим этапом выполнения работы будет создание матрицы-функции  $\overline{f}_{2 \times N}$  (рис. 3.30) для решения системы корректирующих уравнений (3.64). В Mathcad это будет обычная функция (рис. 3.39), которая возвращает матрицу размерности  $l \times N$ , содержащую левые части уравнений (3.46), рассчитанные по шагам 1–3 информационной матрицы (табл. 3.6). Причем шаг 3 на самом деле состоит из  $N$  последовательных шагов вычисления  $v_i$  в порядке изменения  $j$  от  $N$  до 1.

Аргументами функции являются матрица концентраций  $\overline{c}$  и начальный расход промывной воды, поступающей в первую по течению ванну, что нужно для практических расчетов расхода промывной воды

по ПДК межоперационной промывки. Матрица концентраций, выступающая в качестве аргумента функции, должна иметь размерность  $l \times N$ , а при вычислениях по уравнениям материального баланса (3.42) и (3.46) удобно, чтобы в эту матрицу входили концентрации компонентов в основной ванне и в начальном потоке промывной воды, как показано в выражении (3.47). Поэтому вначале функции (рис. 3.39) данные из матрицы  $\bar{c}$  копируются в матрицу  $ck$ , в которую также вносятся концентрации компонентов в основной ванне  $c_0$  и в исходной промывной воде (равные нулю).

```

f2Nm(c, vN1) :=
N ← cols(c)
l ← rows(c)
ck<sup>0</sup> ← c0
for j ∈ 1..N
  ck<sup>j</sup> ← c<sup>j-1</sup>
  for i ∈ 0..l-1
    ck<sub>i,N+1</sub> ← 0
  I ← ck<sup>T</sup> · vzM
  for j ∈ 0..N
    
$$p_j \leftarrow \frac{\sum_{i=0}^{l-1} (ck_{i,j} \cdot vzM_i \cdot \rho_0(I)_i)}{I_j}$$

  p<sub>N+1</sub> ← ρH2O
  v<sub>N+1</sub> ← vN1
  for j ∈ 0..N-1
    
$$v_{N-j} \leftarrow \frac{v_{N-j+1} \cdot p_{N-j+1} - mp_{N-j+1} + vd \cdot (p_{N-j+1} - p_{N-j})}{p_{N-j}}$$

  for j ∈ 1..N
    for i ∈ 0..l-1
      
$$R_{i,j-1} \leftarrow v_{j+1} \cdot ck_{i,j+1} + vd \cdot (ck_{i,j-1} - ck_{i,j}) - v_j \cdot ck_{i,j}$$

  R

```

Рис. 3.39. Реализация в MathCad матрицы-функции  $\bar{f}_{2_{l \times N}}$  (рис. 3.30)

Далее по матричной формуле (3.57) рассчитываются ионные силы растворов. Причем определяются ионные силы всех растворов: в ваннах промывки, в основной ванне и в исходной промывной воде. Затем

рассчитываются плотности растворов на основе их ионных сил по формуле (3.61). К сожалению, данная формула не позволяет правильно рассчитать плотность раствора с нулевыми концентрациями компонентов и, соответственно, с нулевой ионной силой. В этом случае плотность должна равняться плотности воды, а расчет по формуле (3.61) приводит к ошибке вычисления, так как приходится делить на ноль. Поэтому плотность исходной промывной воды, которая входит в вектор плотностей (3.44) в качестве последнего элемента с индексом  $N + 1$ , задается отдельно.

Далее на 3-м шаге вычислений (табл. 3.6) находятся значения потоков промывной воды  $v_j$ , выходящих из ванн промывки. Значения  $v_j$  образуют вектор формата (3.43), где последний элемент задается как аргумент функции. Как сказано выше, шаг 3 на самом деле состоит из  $N$  последовательных шагов вычисления  $v_j$  в последовательности изменения  $j$  от  $N$  до 1 (табл. 3.7). Расчет проводится по формуле (3.63).

В конце функции (рис. 3.39) вычисляются левые части уравнений (3.46) и заносятся в матрицу размерности  $l \times N$ , где строки соответствуют компонентам раствора, а столбцы – ваннам промывки.

Следующим этапом расчета является решение системы корректирующих уравнений (3.64) и определение концентраций компонентов в ваннах промывки. Решение реализуется в MathCad с помощью блока Given Find в котором используется матричная форма записи уравнения (рис. 3.40).

Перед блоком Given Find задаются начальные значения для концентраций в ваннах промывки (матрица  $c$ ). Столбцы матрицы  $c$  соответствуют ваннам промывки, а строки – компонентам раствора. В данном примере концентрации компонентов в первой ванне промывки задаются в 5 раз меньше, чем в основной. Далее в каждой последующей ванне промывки концентрации задаются в 5 раз меньше, чем в предыдущей ванне. Внутри блока Given Find находится уравнение, в котором левая часть – заданная ранее функция (рис. 3.39), а правая часть – нулевая матрица размерности  $3 \times 3$ . Вызов Find возвращает матрицу концентраций компонентов в ваннах промывки размерности  $3 \times 3$ .

$c^{(0)} := \frac{c0}{5} \quad c^{(1)} := \frac{c^{(0)}}{5} \quad c^{(2)} := \frac{c^{(1)}}{5} \quad c = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0.4 \\ 20 & 4 & 0.8 \\ 2 & 0.4 & 0.08 \end{pmatrix}$	<p>Given</p> $f2Nm(c, vN1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Get_c(vN1) := Find(c)</p>
--	--

Рис. 3.40. Нахождение концентраций компонентов в ваннах промывки

MathCad позволяет использовать Find в выражениях функций с аргументами, входящими в уравнения, находящиеся между Given и Find. В нашем случае (рис. 3.40) таким аргументом является  $vN1$  – начальный расход промывной воды. Поэтому мы задаем функцию Get\_c с аргументом  $vN1$ , выражением которой выступает Find. Эта функция фактически производит все вычисления, представленные на рис. 3.30, при заданном значении  $vN1$ , а именно задает начальные значения для матрицы концентраций и решает систему корректирующих уравнений (3.46) с нахождением концентраций во всех ваннах промывки в виде матрицы  $3 \times 3$ .

Пример вызовов функции Get\_c с различными начальными расходами промывной воды приведен на рис. 3.41. Увеличение потока промывной воды с 10 до 20  $\text{дм}^3/\text{ч}$  приводит к снижению концентраций компонентов в ваннах промывки.

$$\text{Get\_c}(10) = \begin{pmatrix} 7.856 & 0.957 & 0.104 \\ 15.713 & 1.914 & 0.208 \\ 1.571 & 0.191 & 0.021 \end{pmatrix} \quad \text{Get\_c}(20) = \begin{pmatrix} 3.405 & 0.207 & 0.012 \\ 6.81 & 0.413 & 0.024 \\ 0.681 & 0.041 & 2.354 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Рис. 3.41. Примеры расчета концентраций компонентов при разных начальных расходах промывной воды: 10 и 20  $\text{дм}^3/\text{ч}$

Последним этапом данной работы будет решение практической задачи расчета расхода промывной воды при требуемом ПДК межоперационной промывки для некоторого компонента. Допустим, ПДК по концентрации NaCl в последней ванне промывки должна быть 0,01  $\text{г}/\text{дм}^3$ . Требуется определить минимальный расход промывной воды, обеспечивающий такое содержание NaCl в последней ванне каскада. Для решения этой задачи можно использовать блок Given Find, в котором будет задано уравнение, использующее функцию Get\_c (рис. 3.40) и заданную ПДК для NaCl (первого компонента раствора). Расчет представлен на рис. 3.42.

$$\begin{array}{l} vN := 10 \qquad \qquad \qquad \text{Given} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{Get\_c}(vN)_{0,2} = 0.01 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{Find}(vN) = 21.083 \end{array}$$

Рис. 3.42. Расчет расхода промывной воды для ПДК межоперационной промывки по NaCl, равной 0,01  $\text{г}/\text{дм}^3$

Индексы 0 и 2 возле функции Get\_c относятся к концентрации первого компонента (индекс 0 соответствует первому компоненту,

а индекс 2 – третьей ванне каскадной промывки, так как нумерация элементов матриц в MathCad начинается с 0 по умолчанию). Расчет показал, что требуемый расход промывной воды для ПДК межоперационной промывки по NaCl, равной  $0,01 \text{ г/дм}^3$ , составляет  $21,08 \text{ дм}^3/\text{ч}$ .

Таким образом, построенная математическая модель массообменных процессов в системе каскадной проточной промывки может использоваться для решения практической задачи определения расхода промывной воды для требуемого ПДК межоперационной промывки по любому компоненту раствора.

### **Ход работы**

1. Введите исходные данные в соответствии с заданием.
2. Рассчитайте дисперсии воспроизводимости для плотностей растворов.
2. Постройте полиномы оптимальной степени для зависимости плотности растворов индивидуальных компонентов основного раствора от ионной силы на основе заданных табличных значений плотностей растворов.
3. Создайте функцию для расчета левых частей корректирующих уравнений системы (табл. 3.6).
4. Создайте функцию решения системы корректирующих уравнений с использованием блока Given Find для определения концентраций компонентов раствора в ваннах промывки.
4. Проведите расчетные исследования для определения зависимости концентраций компонентов от расхода промывной воды.
5. Рассчитайте расход промывной воды по заданному значению ПДК межоперационной промывки.
6. Составьте отчет о лабораторной работе, который должен включать: титульный лист; схему каскадной промывки с указанием потоков; систему уравнений математического описания массообменных процессов; информационную матрицу системы уравнений; фрагменты документов MathCad с пояснениями расчетов; результаты расчетов и расчетных исследований; выводы.

### **Варианты заданий**

#### ***Вариант 1***

Составьте модель массообменных процессов в трехкаскадной системе промывки после операции цинкования и рассчитайте расход промывной воды для ПДК по  $\text{ZnCl}_2$ , равной  $0,02 \text{ г/дм}^3$ . Состав раствора цинкования и другие данные для построения модели приведены в табл. 3.11.



Таблица 3.11

**Исходные данные для построения математической модели массообменных процессов в системе трехкаскадной промывки после цинкования**

Данные	Значение
Состав основной ванны:	
ZnCl <sub>2</sub>	$c_{1,0} = 50 \text{ г/дм}^3$
NH <sub>4</sub> Cl	$c_{2,0} = 150 \text{ г/дм}^3$
H <sub>3</sub> BO <sub>3</sub>	$c_{3,0} = 30 \text{ г/дм}^3$
C <sub>8</sub> H <sub>9</sub> SO <sub>3</sub> Na (ксилосульфонат натрия)	$c_{4,0} = 12 \text{ г/дм}^3$
C <sub>10</sub> H <sub>21</sub> SC <sub>2</sub> H <sub>4</sub> OH (блескообразователь)	$c_{5,0} = 6 \text{ г/дм}^3$
Данные для расчета потока уноса с деталями (3.40):	
площадь единовременной загрузки	$S_e = 1 \text{ м}^2$
удельный унос	$q_{ун} = 0,2 \text{ дм}^3/\text{м}^2$
число загрузок в час	$k_3 = 4 \text{ ч}^{-1}$
Данные для расчета потока испарения (3.40):	
коэффициент движения воздуха	$K_v = 0,71$
площадь зеркала раствора над ваннами	$S_1 = S_2 = S_3 = 0,6 \text{ м}^2$
давление насыщенного водяного пара при температуре раствора в ванне ( $t_1 = t_2 = t_3 = 20^\circ\text{C}$ )	$p_{v1} = p_{v2} = p_{v3} = 2\,339 \text{ Па}$
относительная влажность воздуха в цехе	$\varphi = 0,8 \text{ (80 \%)}$
давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха в цехе ( $20^\circ\text{C}$ )	$p_{\text{возд}} = 2\,339 \text{ Па}$
атмосферное давление	$p_{\text{атм}} = 101\,325 \text{ Па}$
Плотность воды при $20^\circ\text{C}$	$\rho_{\text{вода}} = 0,9982 \text{ кг/дм}^3$

Для расчета плотности растворов в ваннах промывки необходимы табличные данные о зависимости плотности от концентрации растворов индивидуальных веществ. Для растворов ZnCl<sub>2</sub> значения плотности приведены в табл. 3.12.

Таблица 3.12

**Плотности водных растворов ZnCl<sub>2</sub> при 20°C**

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,0167	2	1,1085	12
1,0350	4	1,1275	14
1,0532	6	1,1468	16
1,0715	8	1,1665	18
1,0899	10	1,1866	20

Для растворов NH<sub>4</sub>Cl плотность раствора в зависимости от концентрации представлена в табл. 3.13.

Таблица 3.13

Плотности водных растворов  $\text{NH}_4\text{Cl}$  при  $20^\circ\text{C}$ 

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,0013	1	1,0401	14
1,0045	2	1,0457	16
1,0107	4	1,0512	18
1,0168	6	1,0567	20
1,0227	8	1,0621	22
1,0286	10	1,0726	26
1,0344	12		

Растворимость борной кислоты в воде невелика. В табл. 3.14 приведены значения плотности растворов  $\text{H}_3\text{BO}_3$  при  $20^\circ\text{C}$ .

Таблица 3.14

Плотности водных растворов  $\text{H}_3\text{BO}_3$  при  $20^\circ\text{C}$ 

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,0022	1	1,0091	3
1,0056	2	1,0136	4

При расчете ионных сил считайте борную кислоту и блескообразователь неэлектролитами, а ксилолсульфонат натрия – электролитом. Плотность растворов органических веществ примите равными плотности воды.

Для оценки дисперсии воспроизводимости плотности растворов примите случайную погрешность определения плотности, равную  $\Delta\rho = 0,00005$  кг/дм<sup>3</sup> при числе параллельных опытов  $k = 5$  и уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

**Вариант 2**

Составьте модель массообменных процессов в трехкаскадной системе промывки после операции химического обезжиривания и рассчитайте расход промывной воды для ПДК по NaOH, равной  $0,1$  г/дм<sup>3</sup>. Состав раствора обезжиривания и другие данные для построения модели приведены в табл. 3.15.

Для расчета плотности растворов в ваннах промывки необходимы табличные данные о зависимости плотности от концентрации растворов индивидуальных веществ. Для растворов NaOH значения плотности приведены в табл. 3.16.

Таблица 3.15

**Исходные данные для построения математической модели массообменных процессов в системе трехкаскадной промывки после обезжиривания**

Данные	Значение
Состав основной ванны:	
NaOH	$c_{1,0} = 30 \text{ г/дм}^3$
Na <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	$c_{2,0} = 5 \text{ г/дм}^3$
Na <sub>2</sub> SiO <sub>3</sub>	$c_{3,0} = 20 \text{ г/дм}^3$
C <sub>10</sub> H <sub>21</sub> O(C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O) <sub>10</sub> N (синтанол ДС-10)	$c_{4,0} = 4 \text{ г/дм}^3$
Данные для расчета потока уноса с деталями (3.40):	
площадь единовременной загрузки	$S_e = 1 \text{ м}^2$
удельный унос	$q_{ун} = 0,2 \text{ дм}^3/\text{м}^2$
число загрузок в час	$k_3 = 4 \text{ ч}^{-1}$
Данные для расчета потока испарения (3.41):	
коэффициент движения воздуха	$K_b = 0,71$
площадь зеркала раствора над ваннами	$S_1 = S_2 = S_3 = 0,6 \text{ м}^2$
давление насыщенного водяного пара при температуре раствора в ванне ( $t_1 = 50^\circ\text{C}$ ; $t_2 = t_3 = 20^\circ\text{C}$ )	$p_{v1} = 12\,344 \text{ Па};$ $p_{v2} = p_{v3} = 2\,339 \text{ Па}$
относительная влажность воздуха в цехе	$\varphi = 0,8 \text{ (80\%)}$
давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха в цехе ( $20^\circ\text{C}$ )	$p_{\text{возд}} = 2\,339 \text{ Па}$
атмосферное давление	$p_{\text{атм}} = 101\,325 \text{ Па}$
Плотность воды при $20^\circ\text{C}$	$\rho_{\text{вода}} = 0,9982 \text{ кг/дм}^3$

Таблица 3.16

**Плотности водных растворов NaOH при  $20^\circ\text{C}$**

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,000	0,159	1,065	6,02
1,005	0,602	1,070	6,47
1,010	1,04	1,075	6,93
1,015	1,49	1,080	7,38
1,020	1,94	1,085	7,83
1,025	2,39	1,090	8,28
1,030	2,84	1,095	8,74
1,035	3,29	1,100	9,19
1,040	3,74	1,105	9,64
1,045	4,20	1,110	10,10
1,050	4,65	1,115	10,55
1,055	5,11	1,120	11,01
1,060	5,56	1,125	11,46

Для растворов Na<sub>3</sub>PO<sub>4</sub> плотность раствора в зависимости от концентрации представлена в табл. 3.17.

Таблица 3.17

**Плотности водных растворов  $\text{Na}_3\text{PO}_4$  при 20°C**

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,0042	0,5	1,0517	4,5
1,0100	1,0	1,0579	5,0
1,0158	1,5	1,0642	5,5
1,0216	2,0	1,0705	6,0
1,0275	2,5	1,0768	6,5
1,0335	3,0	1,0832	7,0
1,0395	3,5	1,0896	7,5
1,0456	4,0	1,0961	8,0

Плотность водных растворов  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$  при 20°C приведена в табл. 3.18.

Таблица 3.18

**Плотности водных растворов  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$  при 20°C**

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,0094	1	1,1122	10
1,0203	2	1,1365	12
1,0425	4	1,1613	14
1,0652	6	1,1866	16
1,0884	8	1,2123	18

При расчете ионных сил считайте синтанол ДС-10 – неэлектролитом, а плотность его растворов примите равной плотности воды.

Для оценки дисперсии воспроизводимости плотности растворов примите случайную погрешность определения плотности, равную  $\Delta\rho = 0,00005$  кг/дм<sup>3</sup> при числе параллельных опытов  $k = 5$  и уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

**Вариант 3**

Составьте модель массообменных процессов в системе каскадной промывки после операции химического травления стали и рассчитайте расход промывной воды для ПДК по  $\text{HCl}$ , равной 0,05 г/дм<sup>3</sup>. Проведите расчеты расхода промывной воды для двухкаскадной и трехкаскадной систем промывки. Определите, на сколько снижается расход промывной воды при переходе от двухкаскадной промывки к трехкаскадной. Состав раствора травления и другие данные для построения модели приведены в табл. 3.19.

Таблица 3.19

**Исходные данные для построения математической модели массообменных процессов в системе каскадной промывки после травления**

Данные	Значение
Состав основной ванны:	
HCl	$c_{1,0} = 200 \text{ г/дм}^3$
C <sub>6</sub> H <sub>12</sub> N <sub>4</sub> (уротропин)	$c_{2,0} = 50 \text{ г/дм}^3$
Данные для расчета потока уноса с деталями (3.40):	
площадь единовременной загрузки	$S_e = 1 \text{ м}^2$
удельный унос	$q_{\text{ун}} = 0,2 \text{ дм}^3/\text{м}^2$
число загрузок в час	$k_3 = 4 \text{ ч}^{-1}$
Данные для расчета потока испарения (3.41):	
коэффициент движения воздуха	$K_v = 0,71$
площадь зеркала раствора над ваннами	$S_i = 0,8 \text{ м}^2$
давление насыщенного водяного пара при температуре раствора в ванне ( $t_i = 20^\circ\text{C}$ )	$p_{vi} = 2\,339 \text{ Па}$
относительная влажность воздуха в цехе	$\varphi = 0,8 \text{ (80\%)}$
давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха в цехе ( $20^\circ\text{C}$ )	$p_{\text{возд}} = 2\,339 \text{ Па}$
атмосферное давление	$p_{\text{атм}} = 101\,325 \text{ Па}$
Плотность воды при $20^\circ\text{C}$	$\rho_{\text{вода}} = 0,9982 \text{ кг/дм}^3$

Для расчета плотности растворов в ваннах промывки необходимы табличные данные о зависимости плотности от концентрации растворов индивидуальных веществ. Для растворов HCl значения плотности приведены в табл. 3.20.

Таблица 3.20

**Плотности водных растворов HCl при  $20^\circ\text{C}$**

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,000	0,360	1,075	15,48
1,005	1,360	1,080	16,47
1,010	2,364	1,085	17,45
1,015	3,374	1,090	18,43
1,020	4,388	1,095	19,41
1,025	5,408	1,100	20,39
1,030	6,433	1,105	21,36
1,035	7,464	1,110	22,33
1,040	8,490	1,115	23,29
1,045	9,510	1,120	24,25
1,050	10,52	1,125	25,22
1,055	11,52	1,130	26,20
1,060	12,51	1,135	27,18
1,065	13,50	1,140	28,18
1,070	14,49	1,145	29,17

Для растворов уротропина плотность раствора в зависимости от концентрации представлена в табл. 3.21.

Таблица 3.21

**Плотности водных растворов уротропина при 20°C**

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Моляльность, моль/кг	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Моляльность, моль/кг
0,99820	0	1,07060	3,2768
1,01101	0,4945	1,07079	3,2861
1,02434	1,0059	1,08203	3,9966
1,03060	1,5016	1,08328	4,0785
1,04727	2,0226	1,08782	4,4001
1,05656	2,4930	1,10264	5,5516
1,06473	2,9403		

При расчете ионных сил уротропин считайте неэлектролитом.

Для оценки дисперсии воспроизводимости плотности растворов примите случайную погрешность определения плотности, равную  $\Delta\rho = 0,00005$  кг/дм<sup>3</sup> при числе параллельных опытов  $k = 5$  и уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

### Вариант 4

Составьте модель массообменных процессов в трехкаскадной системе промывки после операции никелирования и рассчитайте расход промывной воды для ПДК по Ni, равной 0,01 г/дм<sup>3</sup>. Состав раствора никелирования и другие данные для построения модели приведены в табл. 3.22.

Таблица 3.22

**Исходные данные для построения математической модели массообменных процессов в системе трехкаскадной промывки после никелирования**

Данные	Значение
Состав основной ванны:	
NiSO <sub>4</sub>	$c_{1,0} = 150$ г/дм <sup>3</sup>
NiCl <sub>2</sub>	$c_{2,0} = 30$ г/дм <sup>3</sup>
H <sub>3</sub> BO <sub>3</sub>	$c_{3,0} = 35$ г/дм <sup>3</sup>
C <sub>7</sub> H <sub>5</sub> NO <sub>3</sub> S (сахарин)	$c_{4,0} = 1$ г/дм <sup>3</sup>
C <sub>4</sub> H <sub>6</sub> O <sub>2</sub> (1,4 бутиндиол)	$c_{5,0} = 1$ г/дм <sup>3</sup>
Данные для расчета потока уноса с деталями (3.40):	
площадь единовременной загрузки	$S_e = 1$ м <sup>2</sup>
удельный унос	$q_{ун} = 0,2$ дм <sup>3</sup> /м <sup>2</sup>
число загрузок в час	$k_3 = 4$ ч <sup>-1</sup>

Данные	Значение
Данные для расчета потока испарения (3.41):	
коэффициент движения воздуха	$K_v = 0,71$
площадь зеркала раствора над ваннами	$S_1 = S_2 = S_3 = 0,8 \text{ м}^2$
давление насыщенного водяного пара при температуре раствора в ванне ( $t_1 = 60^\circ\text{C}$ ; $t_2 = t_3 = 20^\circ\text{C}$ )	$p_{v1} = 19\,932 \text{ Па};$ $p_{v2} = p_{v3} = 2\,339 \text{ Па}$
относительная влажность воздуха в цехе	$\varphi = 0,7 (70\%)$
давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха в цехе ( $20^\circ\text{C}$ )	$p_{\text{возд}} = 2\,339 \text{ Па}$
атмосферное давление	$p_{\text{атм}} = 101\,325 \text{ Па}$
Плотность воды при $20^\circ\text{C}$	$\rho_{\text{вода}} = 0,9982 \text{ кг/дм}^3$

Для расчета плотности растворов в ваннах промывки необходимы табличные данные о зависимости плотности от концентрации растворов индивидуальных веществ. Для растворов  $\text{NiSO}_4$  значения плотности приведены в табл. 3.23. Для растворов  $\text{NiCl}_2$  плотность раствора в зависимости от концентрации представлена в табл. 3.24.

Таблица 3.23

#### Плотности водных растворов $\text{NiSO}_4$ при $20^\circ\text{C}$

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,009	1	1,109	10
1,020	2	1,133	12
1,042	4	1,158	14
1,063	6	1,183	16
1,085	8	1,209	18

Таблица 3.24

#### Плотности водных растворов $\text{NiCl}_2$ при $20^\circ\text{C}$

Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %	Плотность, кг/дм <sup>3</sup>	Массовая доля, %
1,008	1	1,122	12
1,018	2	1,144	14
1,038	4	1,167	16
1,058	6	1,191	18
1,079	8	1,216	20
1,100	10		

Плотность водных растворов борной кислоты приведена выше в табл. 3.14. При расчете ионных сил считайте борную кислоту незлектролитом. При построении полинома оптимальной степени для зависимости плотности раствора борной кислоты от ионной силы лучше

выбирать полином 1-й степени, поскольку полином 2-й степени при экстраполяции за пределы концентраций, приведенных в табл. 3.14, может давать очень большие погрешности. Регрессионные модели на основе полиномов степени больше первой, построенные по экспериментальным данным, обычно применимы только в диапазоне варьирования экспериментальных данных.

Плотность растворов органических веществ примите равной плотности воды, а сами эти вещества считайте неэлектролитами.

Для оценки дисперсии воспроизводимости плотности растворов примите случайную погрешность определения плотности, равную  $\Delta\rho = 0,00005 \text{ кг/дм}^3$  при числе параллельных опытов  $k = 5$  и уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Понятие противоточной системы промывки.
2. Основные допущения, принятые при построении математического описания процессов массопереноса в системе противоточной промывки.
3. Основные элементы системы противоточной промывки.
4. Виды уравнений, входящих в математическое описание процессов массообмена, в системе противоточной промывки.
5. Понятие информационной матрицы.
6. Выбор алгоритма решения системы уравнений математического описания процесса на основе анализа информационной матрицы.
7. Расчет плотности многокомпонентного раствора с использованием ионной силы раствора.
8. Блок-схема алгоритма решения системы уравнений: условные обозначения и построение.
9. Основные понятия численного решения системы уравнений.
10. Использование системы MathCad для численного решения системы конечных уравнений.



**ИНТЕРФЕЙС ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ САПР MATHCAD**

Под интерфейсом пользователя подразумевается совокупность средств графической оболочки MathCad, обеспечивающих легкое управление системой как с клавишного пульта, так и с помощью мыши. Под управлением понимается и просто набор необходимых символов, формул, текстовых комментариев и т. д., и возможность полной подготовки в среде MathCad документов (Work Sheets) и электронных книг с последующим их запуском в реальном времени. Пользовательский интерфейс системы создан так, что пользователь, имеющий элементарные навыки работы с Windows-приложениями, может сразу начать работу с MathCad. Ниже представлено описание интерфейса версии 15 системы, которое в основном применимо и к 14-й версии.

Вторая строка окна системы – **главное меню**. Оно включает в себя следующие блоки команд:

*File (Файл)* – работа с файлами, сетью интернет и электронной почтой (ниспадающее меню содержит команды, стандартные для Windows-приложений);

*Edit (Правка)* – редактирование документов (ниспадающее меню также содержит команды, стандартные для Windows-приложений; большинство из них доступны только в случае, если в документе выделены одна или несколько областей (текст, формула, график и т. д.));

*View (Вид)* – изменение средств обзора;

*Insert (Вставка)* – команды этого меню позволяют помещать в MathCad-документ графики, функции, гиперссылки, компоненты и встраивать объекты;

*Format (Формат)* – изменение формата объектов;

*Tools (Инструменты)* – команды этого меню позволяют настраивать систему и управлять процессом вычислений;

*Symbolics (Символьные операции)* – выбор операций символьного процессора;

*Window (Окно)* – управление окнами системы;

*Help (Справка)* – работа со справочной базой данных о системе.

Описание некоторых команд приведено ниже.

Меню **View (Вид)** включает в себя следующие команды:

*Toolbars (Панели инструментов)* – позволяет отображать или скрывать панели инструментов *Standart (Стандартная)*, *Formatting (Форматирование)*, *Math (Математика)* и др.;

*Status bar (Строка состояния)* – включение или отключение отображения строки состояния системы;

*Ruler (Линейка)* – включение-отключение линейки;

*Regions (Регионы)* – делает видимыми границы областей (текстовых, графических, формул);

*Zoom (Масштаб)* – изменение масштаба отображения;

*Refresh (Обновить Ctrl + R)* – обновление содержимого экрана;

*Headers/Footers (Колонтитулы)* – создание и редактирование колонтитулов.

В состав команд меню **Insert (Вставка)** входят:

*Grafs (График)* – содержит команды вставки в документ различных типов двумерных и трехмерных графиков;

*Matrix (Матрица)* – открывает диалог для создания вектора или матрицы, если курсор находится на каком-то элементе в уже существующей матрице, то добавляются после текущего элемента строки и столбцы в существующую матрицу;

*Function (Функция)* – открывает диалог для вставки встроенных в MatCad функций с подробным описанием этих функций;

*Data (Данные)* – содержит команды для загрузки *File Input (Ввод из файла)* в MathCad данных из файла либо для сохранения *File Output (Вывод в файл)* каких-то (обычно численных) данных из системы MathCad в файл на диске.

Меню **Format (Формат)** включает следующие команды:

*Equation (Уравнение)* – форматирование формул и создание собственных стилей для представления данных;

*Result (Результат)* – позволяет задать формат представления результатов вычислений;

*Text (Текст)* – форматирование текстового фрагмента;

*Paragraf (Абзац)* – изменение формата текущего абзаца;

*Tabs (Табуляция)* – задание позиций маркеров табуляции;

*Style (Стиль)* – оформление текстовых абзацев;

*Separate regions (Разделить регионы)* – позволяет раздвигать перекрывающиеся области;

*Align regions (Выровнять области)* – выравнивает выделенные области по горизонтали или по вертикали;

*Reperanite Now (Перенумерация страниц)* – производит разбивку текущего документа на страницы;

*Properties (Свойства)* – вкладка *Display (Отображение)* позволяет задать цвет фона для наиболее важных текстовых и графических областей; вставленный в документ рисунок позволяет заключить в рамку, вернуть ему первоначальный размер; вкладка *Calculation (Вычисление)* дает возможность для выделенной формулы включить и отключить вычисление; в последнем случае в правом верхнем углу области формулы появляется маленький черный прямоугольник и формула превращается в комментарий.

Команды меню *Tools (Инструменты)*:

*Calculate (Вычислить)* – управление процессом вычислений; в MathCAD существует два режима вычислений: автоматический и ручной; в автоматическом режиме результаты вычислений полностью обновляются при каком-либо изменении в формуле; переключение режимов осуществляется в пункте меню *Automatic Calculation (Автоматический расчет)*; *Calculate Now (Вычислить сейчас)* – позволяет пересчитать видимую часть экрана; *Calculate Worksheet (Пересчитать документ)* – пересчет всего документа целиком;

*Optimization (Оптимизировать)* – при помощи этой команды можно заставить MathCAD перед численной оценкой выражения произвести символьные вычисления и при нахождении более компактной формы выражения использовать именно ее; если выражение удалось оптимизировать, то справа от него появляется маленькая красная звездочка; двойной щелчок по ней открывает окно, в котором находится оптимизированный результат;

*Worksheet Options (Параметры документа)* – позволяет задавать параметры вычислений;

*Animate (Анимация)* – команды, позволяющие создать *Record (Запись)* анимацию или воспроизвести *Playback (Воспроизведение)* из файла с расширением AVI;

*Preferences (Параметры)* – дает возможность задать некоторые не влияющие на вычисления параметры интерфейса и работы программы.

Каждая позиция главного меню может быть сделана активной. Для этого достаточно указать на нее курсором – стрелкой мыши и нажать ее левую клавишу. Можно также нажать клавишу F10 и использовать клавиши перемещения вправо и влево. Затем выбор фиксируется нажатием клавиши ввода Enter. Если какая-либо позиция главного меню делается активной, она выводит ниспадающее подменю со списком доступных и недоступных (но возможных в дальнейшем) операций. Перемещение по списку подменю и выбор нужной операции производится аналогично тому, как это описано для главного меню.

Для удобства работы с системой предусмотрены различные панели инструментов, на которых имеются кнопки для выполнения каких-либо действий и для вставки в документ различных математических операций или данных. Включить или скрыть панели инструментов можно через меню *View (Вид)* → *Toolbars (Панели инструментов)*.

---

## СТАНДАРТНАЯ ПАНЕЛЬ ИНСТРУМЕНТОВ

---

Третью строку окна системы занимает панель инструментов (Toolbox). Она содержит несколько групп кнопок управления с пиктограммами, каждая из которых дублирует одну из важнейших операций главного меню. Стоит только остановить курсор мыши на любой из этих пиктограмм, как в желтом окошечке появится текст, объясняющий функции пиктограмм. Рассмотрим действие кнопок быстрого управления системой.

### **Кнопки операций с файлами**

Документы системы MathCad являются файлами, т. е. имеющими имена блоками хранения информации на магнитных дисках. Файлы можно создавать, загружать (открывать), записывать и распечатывать на принтере. Возможные операции с файлами представлены в панели инструментов первой группой из трех кнопок:

*New Worksheet (Создавать)* – создание нового документа с очисткой окна редактирования;

*Open Worksheet (Открыть)* – загрузка ранее созданного документа из диалогового окна;

*Save Worksheet (Сохранить)* – запись текущего документа с его именем.

### **Печать и контроль документов**

*Print Worksheet (Печать)* – распечатка документа на принтере;

*Print Preview (Просмотр)* – предварительный просмотр документа;

*Check Speling (Проверка)* – проверка орфографии документа.

### **Кнопки операций редактирования**

Документы во время их подготовки приходится редактировать, т. е. видоизменять и дополнять.

*Cut (Вырезать)* – перенос выделенной части документа в буфер обмена с очисткой этой части документа;

*Copy (Копировать)* – копирование выделенной части документа в буфер обмена с сохранением выделенной части документа;

*Paste (Вставить)* – перенос содержимого буфера обмена в окно редактирования на место, указанное курсором мыши;

*Undo (Отменить)* – отмена предшествующей операции редактирования.

Три последние операции связаны с применением буфера обмена. Он предназначен для временного хранения данных и их переноса из одной части документа в другую либо для организации обмена данными между различными приложениями.

#### **Кнопки размещения блоков**

Документы состоят из различных блоков: текстовых, формульных, графических и т. д. Блоки просматриваются системой, интерпретируются и исполняются. Просмотр идет справа налево и снизу вверх.

*Align Across (Выровнять по горизонтали)* – блоки выравниваются по горизонтали.

*Align Down (Выровнять вниз)* – блоки выравниваются по вертикали сверху вниз.

Пиктограммы этих кнопок изображают блоки и указанные варианты их размещения.

#### **Кнопки операций с выражениями**

Формульные блоки часто являются вычисляемыми выражениями или выражениями, входящими в состав заданных пользователем новых функций. Для работы с выражениями служат пиктограммы.

Следующие группы кнопок являются специфичными именно для системы MathCad:

*Insert Function (Вставить функции)* – вставка функции из списка, появляющегося в диалоговом окне;

*Insert Unit (Вставить единицы)* – вставка единиц измерения;

*Calculate (Пересчитать)* – вычисление выделенного выражения.

#### **Доступ к новым возможностям MathCad**

Начиная с версии MathCad 7.0 появились новые кнопки, дающие доступ к новым возможностям системы:

*Insert Giperlink (Включение гиперссылки)* – обеспечивает создание гиперссылки;

*Component Wizard (Мастер компонентов)* – открывает окно Мастера, дающего удобный доступ ко всем компонентам системы;

*Ran Math Connex (Запуск системы Math Connex)* – запуск системы для стимулирования блочно-заданных устройств.

#### **Кнопки управления ресурсами**

*Resource Center (Центр ресурсов)* – дает доступ к центру ресурсов;

*Help (Справка)* – дает доступ к ресурсам справочной базы данных системы.

## **Панель форматирования**

Четвертая строка верхней части экрана содержит типовые средства управления шрифтами:

*Style* – Переключатель выбора стилей;

*Font* – Переключатель выбора набора символов;

*Point Size* – Переключатель выбора размеров символов;

*Bold* – Установка жирных символов;

*Italik* – Установка наклонных символов;

*Underline* – Установка подчеркнутых символов;

*Left Align* – Установка левостороннего выравнивания;

*Center Align* – Установка выравнивания по центру;

*Right Align* – Установка правостороннего выравнивания.

До тех пор, пока не начат набор элементов документа, часть описанных кнопок и иных объектов пользовательского интерфейса находится в пассивном состоянии. В частности, в окнах переключателей панели форматирования нет надписей. Пиктограммы и переключатели становятся активными, как только появляется необходимость в их использовании.

Внизу экрана кроме полосы горизонтальной прокрутки расположена еще одна строка – строка состояния. В ней выводится служебная информация, краткие комментарии, номер страницы и др. Эта информация полезна для оперативной оценки состояния системы в ходе работы с ней.

## **Наборные математические панели инструментов**


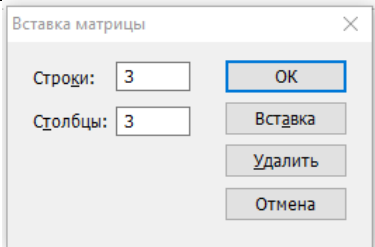
Для ввода математических знаков в MathCAD используются удобные перемещаемые наборные панели со знаками. Они служат для вывода заготовок – шаблонов математических знаков (цифр, знаков арифметических операций, матриц, знаков интегралов, производных и т. д.). Для вывода панели Math необходимо выполнить команду View -> Toolbar -> Math. Наборные панели появляются в окне редактирования документов при активизации соответствующих пиктограмм – первая линия пиктограмм управления системой. Используя общую наборную панель, можно вывести или все панели сразу или только те, которые нужны для работы. Для установки с их помощью необходимого шаблона достаточно поместить курсор в желаемое место окна редактирования (красный крестик на цветном дисплее) и затем активизировать пиктограмму нужного шаблона, установив на него курсор мыши и нажав ее левую клавишу.

Многие функции и операции, которые вставляются в документ с помощью наборных математических панелей, могут быть помещены

в документ при использовании «быстрых клавиш». При этом работа в системе MathCAD становится более продуктивной. Рекомендуем запомнить сочетания клавиш хотя бы для некоторых наиболее часто употребляемых команд (табл. П1).

Таблица П1

**«Быстрые клавиши» в системе MathCAD**

Команда	«Быстрые клавиши»	Пример в MathCAD
Присвоение значения	[Shift] + [:] (рядом с правой Shift)	$A :=$
Булево равенство	[Ctrl] + [=]	$=$
Нижний индекс	[[]]	$\substack{\cdot \\ \cdot}$
Возведение в степень	[Shift] + [6]	$\cdot^{\cdot}$
Корень квадратный	[[]]	$\sqrt{\cdot}$
Задать диапазон дискретной величины	[;]	$\cdot \dots \cdot$
Вставка региона текста	[Shift] + [“]	
Вставка матрицы	[Ctrl] + [M]	
Транспонирование матрицы	[Ctrl] + [1]	$T$
Вычисление результата	[=]	$=$
Векторное произведение	[Ctrl] + [8]	$\cdot \times \cdot$
Скалярное произведение	[Shift] + [*]	$\cdot \cdot$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Матыс, В. Г. Моделирование и оптимизация химико-технологических процессов в отрасли: тексты лекций для студентов специальности 1-48 01 04 «Технология электрохимических производств» / В. Г. Матыс, А. А. Черник. – Минск: БГТУ, 2019. – 156 с.
2. Жарский, И. М. Планирование и организация эксперимента: учеб. пособие для студентов хим.-технол. специальностей вузов / И. М. Жарский, Б. А. Коледин, И. Ф. Кузьмицкий. – Минск: БГТУ, 2003. – 179 с.
3. Гартман, Т. Н. Основы компьютерного моделирования химико-технологических процессов: учеб. пособие для вузов / Т. Н. Гартман, Д. В. Клушин. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2006. – 416 с.
4. Кафаров, В. В. Анализ и синтез химико-технологических систем / В. В. Кафаров, В. П. Мешалкин. – М.: Химия, 1991. – 432 с.
5. Юсевич, А. И. Расчет химико-технологических систем средствами Mathcad / А. И. Юсевич. – Минск: БГТУ, 2005. – 100 с.
6. Дьяконов, В. П. Mathcad 2001: учеб. курс / В. П. Дьяконов. – СПб.: ПИТЕР, 2001. – 621 с.
7. Практическое руководство по решению некоторых вычислительных задач с использованием MICROSOFT EXCEL: учеб. пособие / под ред. Т. Н. Гартмана. – М.: РХТУ, 2006. – 68 с.
8. Методы и средства автоматизированного расчета химико-технологических систем / Н. В. Кузичкин [и др.]. – Л.: Химия, 1987. – 152 с.
9. Боровиков, В. П. Statistica. Статистический анализ и обработка данных в среде Windows / В. П. Боровиков, И. П. Боровиков. – М.: Финлинь, 1998. – 600 с.
10. Грачев, Ю. П. Математические методы планирования экспериментов / Ю. П. Грачев, Ю. М. Плаксин. – М.: «ДеЛи принт», 2005. – 295 с.
11. Ахназарова, С. Л. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии / С. Л. Ахназарова, В. В. Кафаров: учеб. пособие для хим.-технол. специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1985. – 327 с.
12. Слинько, М. Г. Моделирование и оптимизация каталитических процессов / М. Г. Слинько. – М.: Наука, 1965. – 354 с.
13. Пижурин, А. А. Основы научных исследований в деревообработке / А. А. Пижурин, А. А. Пижурин. – М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2005. – 305 с.



Учебное издание

**Матыс** Владимир Генрихович  
**Черник** Александр Александрович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ  
ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Лабораторный практикум

Редактор *Р. М. Рябая*  
Компьютерная верстка *Е. В. Ильченко*  
Корректор *Р. М. Рябая*

Издатель:

УО «Белорусский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/227 от 20.03.2014.

Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.