

УДК 625+624.131+539.376

И. И. ЛЕОНОВИЧ, С. С. МАКАРЕВИЧ

## НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ДОРОЖНЫХ ОДЕЖД С УЧЕТОМ ИХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

В настоящее время большое внимание уделяется теоретическим и экспериментальным исследованиям работы дорожных одежд под влиянием действующих на них нагрузок и других факторов.

Более 30 лет назад коллективом ученых под руководством проф. Н. Н. Иванова был разработан метод расчета жестких дорожных одежд (метод СоюзДорНИИ), который получил широкое применение в нашей стране и за рубежом.

Дальнейшие исследования в этой области привели к существенному усовершенствованию методики расчета [1], в основу которой положены три критерия: упругий прогиб (модуль упругости) одежды, сопротивление сдвигу, сопротивление растяжению при изгибе [2, 3].

Все методы расчета исходят из того, что дорожные конструкции работают в упругой стадии. В этом случае для определения напряжений и деформаций, входящих в критерии прочности дорожных одежд, могут быть использованы законы теории упругости, в частности, решения задачи о напряжениях и деформациях упругих слоистых систем под действием ассиметричной нагрузки [1].

Однако часто дорожные одежды в результате реологических свойств грунта [5] работают фактически в упруго-вязкой или в упруго-вязко-пластической стадии. И хотя деформации при работе в упруго-вязкой стадии очень малы и практически полностью обратимы, они развиваются и исчезают не мгновенно с приложением и снятием нагрузки, а за какой-то промежуток времени, поэтому в данном случае при определении напряжений и деформаций должны быть использованы законы вязкоупругости. При работе дорожных конструкций в упруго-вязко-пластической стадии под действием нагрузок наряду с обратимыми возникают и остаточные деформации, обусловленные пластическими смещениями. Для описания напряженно-деформационного состояния при этом необходимо привлекать уже законы деформирования упруго-вязко-пластических сред.

Следует отметить, что если теория упругих слоистых систем разработана в такой мере, что ею можно с успехом пользоваться для решения практических задач [1], то теория упруго-вязких и упруго-вязко-пластических слоистых систем только начинает развиваться.

Нами проводятся исследования напряжений и деформаций слоистых систем, работающих в упруго-вязкой стадии. Статическая сторона рассматриваемой при этом модели, как и в случае упругого полупространства, будет выражаться уравнениями Навье, которые справедливы для любого сплошного тела. Геометрически она согласуется с теорией упругости, и поэтому ее сущность может характеризоваться уравнениями Коши, которые тоже справедливы для любого непрерывного тела независимо от его физической природы [4].

Что же касается физической стороны задачи, то она зависит от закона деформирования рассматриваемого тела. При работе дорожных кон-

струкций в упруго-вязкой стадии основные физические уравнения, связывающие напряжения и деформации, должны содержать фактор времени. Наиболее общей теорией, описывающей упруго-вязкие свойства материалов, является теория наследственности Больцмана — Вольтерра. Опытами С. Р. Месчяна и других [5] подтверждено положение В. А. Флорина о том, что деформируемость грунтов вполне можно описать линейной теорией наследственной ползучести. Согласно этой теории, деформация при заданных напряжениях записывается следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — напряжение;  $\varepsilon$  — деформация;  $E$  — модуль упругости;  $K(t-\tau)$  — функция влияния напряжений (ядро ползучести).

Как показано в работе [5], ядро ползучести для грунтов может быть принято в виде экспоненты

$$K(t-\tau) = Le^{-\beta(t-\tau)}, \quad (2)$$

где  $L$  и  $\beta$  — параметры, определяемые опытным путем.

С учетом (2) уравнение (1) переписывается так:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t Le^{-\beta(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Если положить

$$L = \frac{E-H}{En}; \quad \beta = \frac{H}{En}, \quad (4)$$

то от уравнения (3) можно перейти к дифференциальному уравнению модели стандартного вязко-упругого тела:

$$\sigma + n \dot{\sigma} = H\varepsilon + En \dot{\varepsilon}, \quad (5)$$

где  $E$ ,  $H$  — мгновенный и длительный модули упругости;  $n$  — время релаксации; точкой обозначено дифференцирование по времени.

Если принять коэффициент Пуассона  $\mu$  не зависящим от времени и учесть, что для упруго-вязких тел соблюдается принцип суперпозиции Больцмана, то деформации по трем направлениям, согласно (3), можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \frac{1}{E} \int_0^t [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] Le^{-\beta(t-\tau)} d\tau, \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \frac{1}{E} \int_0^t [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] Le^{-\beta(t-\tau)} d\tau, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)] + \frac{1}{E} \int_0^t [\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)] Le^{-\beta(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Рассмотрим теперь слоистое упруго-вязкое полупространство (рис. 1). На верхний слой действует равномерно распределенная по площади круга вертикальная нагрузка, которую удобно представить через интеграл Фурье — Бесселя.

$$q(r, t) = q(t) R \int_0^\infty I_1(R\alpha) I_0(\rho\alpha) d\alpha, \quad (7)$$

где  $q$  — интенсивность сплошной нагрузки;  $I_1(R\alpha)$ ;  $I_0(\rho\alpha)$  — функции Бесселя первого рода первого и нулевого порядка;  $\alpha$  — параметр интегрирования;  $R$  — радиус площадки загрузки;  $\rho = \frac{r}{h}$ .

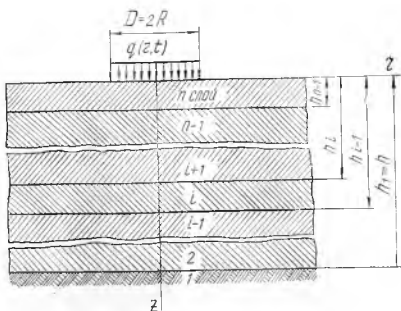


Рис. 1. Расчетная схема слоистого полупространства

Данная задача является осесимметричной. Ее решение можно искать через функцию  $\varphi$ , с которой напряжения и перемещения связаны зависимостями:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$u = -\frac{1 + \mu}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{1 + \mu}{E} \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} L e^{-\beta(t-\tau)} d\tau,$$

$$w = \frac{1 + \mu}{E} \left[ 2(1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] + \frac{1 + \mu}{E} \int_0^t \left[ 2(1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] L e^{-\beta(t-\tau)} d\tau,$$

где  $u$  — горизонтальное перемещение (по оси  $r$ );  $w$  — вертикальное перемещение (по оси  $z$ ).

Функция  $\varphi$  должна удовлетворять бигармоническому уравнению в цилиндрических координатах  $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$  и граничным условиям ( $\nabla^2$  — символ, аналогичный оператору Лапласа).

Примем систему функций, аналогичную упругому решению [6, 7]. Для первого слоя:

$$\varphi_1 = \int_0^\infty \{A + B[\alpha(\gamma_1 - 1) + 2\mu_1]\} e^{-\alpha z} I_0(\rho x) dx. \quad (9)$$

Для второго и любого последующего  $i$ -го слоя:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \int_0^\infty \{A + B[\alpha(\gamma_i - 1) + 2\mu_i]\} e^{-\alpha z} I_0(\rho x) dx + \\ &+ \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \{C_k[(1 - 2\mu_k)(1 - e^{-2\lambda}) + \lambda(1 + e^{-2\lambda})] + \\ &+ D_k[2\mu_k(1 + e^{-2\lambda}) - \lambda(1 - e^{-2\lambda})]\} e^{-\alpha z} I_0(\rho x) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\gamma_i = \frac{z}{h}; \quad \gamma_i = \frac{h_i}{h}; \quad \lambda = \alpha (\gamma_{i-1} - \gamma_i).$$

Коэффициенты  $A, B, \dots, C_i, D_i$ , входящие в (9) и (10), представляют собой неопределенные функции, зависящие не только от нагрузки, характеристик слоев и параметра  $\alpha$ , как в упругом решении, но и от времени.

Для определения  $A, B, \dots, C_i, D_i$  могут быть использованы следующие условия:

а) на поверхности при  $\eta = 0$

$$\sigma_z = \begin{cases} -q(r, t) & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R; \end{cases} \quad (11)$$

$$\tau_{rz} = 0$$

б) на границе между любыми двумя  $i_n$  и  $i-1$  слоями при  $\eta = \gamma_{i-1}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z, i-1} &= \sigma_{z, i}, \quad u_{i-1} = u_i, \\ \tau_{rz, i-1} &= \tau_{rz, i}, \quad w_{i-1} = w_i. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставив функции (9) и (10) в зависимости (8), получим выражения для напряжений, которые запишутся так, как и для упругого решения [7, 8]. Только коэффициенты  $A, B, \dots, C_i, D_i$  будут отличаться от соответствующих коэффициентов, получаемых при упругом решении.

Для перемещений  $u$  и  $w$  получим следующие зависимости:

а) для первого слоя

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1+\mu_1}{E_1 h^2} \int_0^\infty [A - B[(1-2\mu_1) - \alpha(\gamma_1 - 1)]] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 I_1(\rho z) dz - \\ &- \frac{1+\mu_1}{E_1 h^2} \int_0^t \int_0^\infty [A - B[(1-2\mu_1) - \alpha(\gamma_1 - 1)]] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 L_1 e^{-\beta_1(t-\tau)} I_1(\rho z) dx d\tau, \\ w_1 &= -\frac{1+\mu_1}{E_1 h^2} \int_0^\infty [A + B[2(1-\mu_1) + \alpha(\gamma_1 - 1)]] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 I_0(\rho z) dz - \\ &- \frac{1+\mu_1}{E_1 h^2} \int_0^t \int_0^\infty [A + B[2(1-\mu_1) + \alpha(\gamma_1 - 1)]] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 L_1 e^{-\beta_1(t-\tau)} I_0(\rho z) dx d\tau; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

б) для второго и любого последующего  $i$ -го слоя:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= -\frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \int_0^\infty [A - B[(1-2\mu_i) - \alpha(\gamma_i - 1)]] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 I_1(\rho z) dz - \\ &- \frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty [C_k [2(1-\mu_i)(1+e^{-2\lambda}) + \lambda(1-e^{-2\lambda})] + D_k [(2\mu_i - 1)(1-e^{-2\lambda}) - \\ &- \lambda(1+e^{-2\lambda})]] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 I_1(\rho z) dz - \frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \int_0^t \int_0^\infty [A - B[(1-2\mu_i) - \\ &- \alpha(\gamma_i - 1)]] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 L_i e^{-\beta_i(t-\tau)} I_1(\rho z) dx d\tau + \frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \sum_{k=2}^i \int_0^t \int_0^\infty [C_k [2(1- \\ &- \mu_i)(1+e^{-2\lambda}) + \lambda(1-e^{-2\lambda})] + D_k [(2\mu_i - 1)(1-e^{-2\lambda}) - \\ &- \lambda(1+e^{-2\lambda})]] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 L_i e^{-\beta_i(t-\tau)} I_1(\rho z) dx d\tau; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} w_i &= -\frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \int_0^\infty [A + B[2(1+\mu_i) + \alpha(\gamma_i - 1)]] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 I_0(\rho z) dz + \\ &+ \frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty [C_k [(1-2\mu_i)(1-e^{-2\lambda}) - \lambda(1+e^{-2\lambda})] - D_k [2(1-\mu_i)(1+ \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-2\lambda} - \lambda(1 - e^{-2\lambda})] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 I_0(\rho x) dx - \frac{1 + \mu_1}{E_1 h^3} \int_0^t \int_0^\infty [A + B \{2(1 + \\
& + \mu_1) + \alpha(\gamma_1 - 1)\}] e^{-\alpha\eta} \alpha^2 L_i e^{-\beta_i(t-\tau)} I_0(\rho x) dx d\tau + \\
& + \frac{1 + \mu_1}{E_1 h^3} \sum_{k=2}^i \int_0^t \int_0^\infty \{C_k [(1 - 2\mu_1)(1 - e^{-2\lambda}) - \lambda(1 + e^{-2\lambda})] - D_k [2(1 - \mu_1)(1 + \\
& + e^{-2\lambda}) - \lambda(1 - e^{-2\lambda})]\} e^{-\alpha\eta} \alpha^2 L_i e^{-\beta_i(t-\tau)} I_0(\rho x) dx d\tau. \quad (15)
\end{aligned}$$

Из условий (12)  $u_{i-1} = u_i$ ,  $\omega_{i-1} = \omega_i$ , можно все коэффициенты  $C_i$ ,  $D_i$  выразить через коэффициенты  $A$ ,  $B$ . Действительно, рассматривая границу первого и второго слоев, для которой  $u_1 = u_2$ ;  $\omega_1 = \omega_2$ , получаем:

$$\begin{aligned}
C_2 + \int_0^t C_2 L_2 e^{-\beta_2(t-\tau)} d\tau &= \frac{1}{4(1 - \mu_2)} [(m_2 - 1)A - \nu B + \\
& + m_2 \int_0^t A L_1 e^{-\beta_1(t-\tau)} d\tau - \int_0^t A L_2 e^{-\beta_2(t-\tau)} d\tau - \\
& - m_2(1 - 2\mu_1) \int_0^t B L_1 e^{-\beta_1(t-\tau)} d\tau + (1 - 2\mu_2) \int_0^t B L_2 e^{-\beta_2(t-\tau)} d\tau]; \\
D_2 + \int_0^t D_2 L_2 e^{-\beta_2(t-\tau)} d\tau &= \frac{1}{4(1 - \mu_2)} [(m_2 - 1)A + \psi B + \\
& + m_2 \int_0^t A L_1 e^{-\beta_1(t-\tau)} d\tau - \int_0^t A L_2 e^{-\beta_2(t-\tau)} d\tau + \\
& + 2m_2(1 - \mu_1) \int_0^t B L_1 e^{-\beta_1(t-\tau)} d\tau - 2(1 - \mu_2) \int_0^t B L_2 e^{-\beta_2(t-\tau)} d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
m_2 &= \frac{E_2(1 + \mu_1)}{E_1(1 + \mu_2)}; \quad \psi = 2[m_2(1 - \mu_1) - (1 - \mu_2)]; \\
\nu &= m_2(1 - 2\mu_1) - (1 - 2\mu_2).
\end{aligned}$$

Аналогично из условия совместности деформаций на границе любых  $i-1$ -го и  $i$ -го слоев можно любые коэффициенты  $C_i$  и  $D_i$  выразить последовательно через  $A$  и  $B$ .

Таким образом, в результате придем к системе двух уравнений с неизвестными коэффициентами  $B$  и  $A$ .

Для определения  $A$  и  $B$  следует рассмотреть условия (11) на поверхности ( $\gamma_1 = 0$ ), т. е.

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \frac{1}{h^3} \int_0^\infty [A + B(1 - \alpha)x^3 I_0(\rho x) dx + \frac{1}{h^3} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \{C_k \alpha \gamma_{k-1} (1 - e^{-2\alpha\gamma_{k-1}}) + \\
& + D_k [(1 - e^{-2\alpha\gamma_{k-1}}) - \alpha \gamma_{k-1} (1 + e^{-2\alpha\gamma_{k-1}})]\} \alpha^3 I_0(\rho x) dx] = -q(r, t); \\
\tau_{rz} &= \int_0^\infty (A - B\alpha)x^3 I_1(\rho x) dx + \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \{C_k [(1 - e^{-2\alpha\gamma_{k-1}}) + \alpha \gamma_{k-1} (1 + \\
& + e^{-2\alpha\gamma_{k-1}})] - D_k \alpha \gamma_{k-1} (1 - e^{-2\alpha\gamma_{k-1}})] \alpha^3 I_1(\rho x) dx = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотренная схема расчета упруго-вязкого слоистого полупространства может оказаться особенно удобной для массового счета с применением современных быстродействующих вычислительных машин, так как неизвестные функции связаны цепной зависимостью.

В случае однородного упруго-вязкого полупространства, полагая  $h = 0$  и заменяя в формулах (9), (10) и (13)  $\eta$  на  $z$ ,  $\rho$  на  $r$ , получаем с учетом граничных условий

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{1+\mu}{E} Rq(t) \int_0^{\frac{r}{a}} \left( \frac{1-2\mu}{a} - z \right) e^{-az} I_1(rz) I_1(Rz) dz - \\
 & -\frac{1+\mu}{E} R \int_0^t \int_0^{\infty} q(\tau) \left( \frac{1-2\mu}{a} - z \right) e^{-az} L e^{-\beta(t-\tau)} I_1(rz) I_1(Rz) d\alpha d\tau, \\
 w = & \frac{1+\mu}{E} Rq(t) \int_0^{\infty} \left[ \frac{2(1-\mu)}{a} + z \right] e^{-az} I_0(rz) I_1(Rz) dz + \\
 & + \frac{1+\mu}{E} R \int_0^t \int_0^{\infty} q(\tau) \left[ \frac{2(1-\mu)}{a} + z \right] e^{-az} L e^{-\beta(t-\tau)} I_0(rz) I_1(Rz) d\alpha d\tau.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Наибольшая просадка на поверхности по центру нагрузки ( $z=0$ ;  $r=0$ )

$$w_{\max} = \frac{2(1-\mu^2)}{E} Rq(t) + \frac{2(1-\mu^2)}{E} RL \int_0^t q(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau. \tag{17}$$

а) При постоянной нагрузке ( $q = \text{const}$ )

$$w_{\max} = 2(1-\mu^2) Rq \left( \frac{1}{E} + \frac{L}{\beta E} - \frac{L}{\beta E} e^{-\beta t} \right).$$

С учетом (4) последнее выражение переписывается так:

$$w_{\max} = 2(1-\mu^2) Rq \left[ \frac{1}{H} - \left( \frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right) e^{-\frac{Ht}{E\eta}} \right], \tag{18}$$

что совпадает с решением работы [9] для упруго-вязкого однородного полупространства, в которой использована функция  $\varphi$ , аналогичная функции Буссинеска.

Анализ уравнения (18) показывает, что при  $t=0$  возникает только упругая деформация

$$w_{\max(0)} = \frac{2(1-\mu^2)}{E} Rq.$$

При достаточно большом времени действия нагрузки ( $t \rightarrow \infty$ ) упруго-вязкая деформация

$$w_{\max(\infty)} = \frac{2(1-\mu^2)}{H} Rq.$$

б) Если нагрузка повторяется периодически по схеме, представленной на рис. 2, что соответствует движению автомобилей по дороге, то при  $t=0$ , согласно формуле (17),

$$w_{\max(0)}^* = \frac{2(1-\mu^2)}{E} Rq,$$

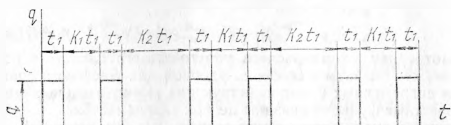


Рис. 2. Повторяющаяся нагрузка

а при достаточно длительном действии нагрузки ( $t \rightarrow \infty$ )

$$\omega_{\max(\infty)}^* = 2(1 - \mu^2) Rq \left[ \frac{1}{E} + \left( \frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right) \frac{\left( 1 - e^{-\frac{Ht_1}{2a}} \right) \left( 1 + e^{-\frac{(k_1+1)Ht_1}{Ea}} \right)}{1 - e^{-\frac{(k_1-k_2+2)Ht_1}{Ea}}} \right]$$

Так как для любых материалов  $H < E$ , то

$$\omega_{\max(0)}^* < \omega_{\max(\infty)}^* < \omega_{\max(\infty)}$$

Разница в накоплении просадок при нагрузке, действующей постоянно, и при многократно повторяющейся нагрузке будет зависеть от реологических характеристик материала, продолжительности действия нагрузки  $t_1$  и от частоты повторения нагрузки (величины  $k_1$  и  $k_2$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Конструирование и расчет нежестких дорожных одежд. Под ред. Н. Н. Иванова. М., 1973.
2. Иванов Н. Н. Международный дорожный конгресс в Токио.—«Автомобильные дороги», 1968, № 9.
3. Корсунский М. Б. Оценка прочности дорог с нежесткими одеждами. М., 1966.
4. Безухов П. П. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., 1968.
5. Цытович Н. А. Механика грунтов. М., 1973.
6. Ралпорт Р. М. Задача Буссинеска для слоистого упругого полупространства. Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, вып. 5, 1948.
7. Туроверов К. К. К вопросу исследования напряженного и деформированного состояния упругого слоистого полупространства. Труды Ленинградской лесотехнической академии им. С. М. Кирова, вып. 94, 1962.
8. Корсунский М. Б. Практические методы определения напряженно-деформированного состояния конструкций дорожных одежд. Труды СоюзДорНИИ, вып. 6, М., 1966.
9. Леонович П. И., Макаревич С. С. Задача Буссинеска для однородного упруго-вязкого полупространства. «Изв. АН БССР», сер. физико-технических наук, 1972, № 1.

Получено в редакцию  
11/IV 1974 г.

БТИ им. С. М. Кирова,  
кафедры сухопутного транспорта,  
лесов и дорожных машин, строи-  
тельной механики