6. Ростовцев Н. А. // Прикл. мат. и мех. 1961. Т. 25, № 1. С. 164—168.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
8. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1974.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 1 октября 1984 г.

УДК 519.642.2

М. В. ЧАЙКОВСКИЙ, Л. А. ЯНОВИЧ

О ЧИСЛЕННОМ НАХОЖДЕНИИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$x''(\tau)+2p(\tau)x'(\tau)+q(\tau)x(\tau)-Q(\tau)x(\tau)-P(\tau)x'(\tau)-$$
$$-\sum_{\nu=0}^{2}\int_0^{\tau} K_\nu(\tau,\ s)x^{(\nu)}(s)ds=F(\tau)+\xi(\tau)\quad (0\leqslant\tau\leqslant T<\infty) \tag{1}$$

с заданными детерминированными начальными условиями $x(0)=x_0$ и $x'(0)=x'_0$, диагональными $p(\tau)$, $q(\tau)$ и квадратными $Q(\tau)$, $P(\tau)$, $K_\nu(\tau,\ s)$ $(\nu=0,\ 1,\ 2)$ матрицами размерности n, а также вектором-столбцом $F(\tau)$. Вектор-столбец $\xi(\tau)$ является вектором случайных функций с известным математическим ожиданием и корреляционной функцией.

Такого рода задача возникает во многих прикладных исследованиях, например, в нестационарной аэроупругости для тонкостенных систем типа пластинок и оболочек с линейными и нелинейными упругими характеристиками и линейными аэродинамическими параметрами с полным учетом предыстории обтекания и деформирования [1, 2].

Предполагается, что входящие в (1) функции удовлетворяют требованиям, при которых справедливы проводимые в дальнейшем преобразования.

Обозначим через $y(\tau)$ решение системы (1) с начальными условиями $y(0)=x_0$, $y'(0)=x'_0$ и правой частью $F(\tau)$.

Пусть, далее, для каждой реализации процесса $\xi(\tau)$, принимаемой за правую часть, и для нулевых начальных условий существует решение этой системы, которое будем обозначать $z(\tau)$. Тогда решение исходной задачи $x(\tau)$ представимо в виде $x(\tau)=y(\tau)+z(\tau)$ и $Mx(\tau)=y(\tau)+$ $+Mz(\tau)$, где M — символ математического ожидания, а для корреляционных функций (ковариационных матриц) случайных процессов $x(\tau)$ и $z(\tau)$ имеем $K_x(\tau,\ s)=K_z(\tau,\ s)$ (индексами x и z указаны корреляционные функции соответственно процессов $x(\tau)$ и $z(\tau)$), т. е.

$$K_x(\tau,\ s)=M\ \{[z(\tau)-Mz(\tau)]\,[z(s)-Mz(s)]^{\mathrm{T}}\}.$$

Для процесса $z(\tau)$ справедливо [3] представление

$$z(\tau)=\int_0^{\tau} G(\tau,\ s)\eta(s)ds, \tag{2}$$

где $\eta(s)$ есть решение интегрального уравнения

$$\eta(s)=\int_0^{s} D(s,\ u)\eta(u)du+\xi(s), \tag{3}$$

а $G(\tau, s)$ и $D(s, u)$ — известные детерминированные матрицы, при этом первая из них диагональная.

Из соотношения (2) получим

$$K_z(\tau, s) = \int_0^{\tau}\int_0^{s} G(\tau, v)\varphi(v, u) G(s, u) du dv, \tag{4}$$

где функция $\varphi(v, u)$ — корреляционная функция процесса $\eta(s)$ — является решением интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(v, u) = -\int_0^{v}\int_0^{u} D(v, t)\varphi(t, s) D^{\tau}(u, s) ds dt + \int_0^{v} D(v, t)\varphi(t, u) dt + \\ + \int_0^{u} \varphi(v, s) D^{\tau}(u, s) ds + B(v, u), \tag{5}$$

$B(v, u)$ — корреляционная функция исходного процесса $\xi(\tau)$. Нетрудно показать, что интегральный оператор Вольтерра уравнения (5) с непрерывными матрицами $D(t, s)$ и $B(v, u)$ является оператором сжатия в пространстве непрерывных на квадрате $[0, T; 0, T]$ функциональных матриц. Поэтому существует и притом единственное решение уравнения (5).

Из построенного уравнения (5) функция $\varphi(v, u)$ может быть найдена в любой точке (v, u) квадрата $[0, T; 0, T]$. Это позволяет при построении численных методов нахождения корреляционной функции решения исходной системы воспользоваться для замены интеграла в (4) кубатурными формулами, вообще говоря, с произвольными узлами, но при этом необходимо согласовывать погрешность кубатурных формул и погрешность приближенных значений функции $\varphi(v, u)$.

Пусть решение уравнения (5) ищется в точках (τ_i, τ_j) квадрата $[0, T; 0, T]$ $(0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_j<\tau_{j+1}<\ldots<\tau_N=T;\ h_j=\tau_{j+1}-\tau_j,\ h=\max\limits_j h_j)$.

Введем следующие обозначения:

$$y_{1\nu}(v, u) = \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} D(v, t)\varphi(t, u) dt, \quad y_{2k}(v, u) = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \varphi(v, s) D^{\tau}(u, s) ds,$$

$$d_{1\nu}^{j}(v, u) = \int_{\tau_j}^{u} y_{1\nu}(v, s) D^{\tau}(u, s) ds, \quad d_{2k}^{i}(v, u) = \int_{\tau_i}^{v} D(v, t) y_{2k}(t, u) dt,$$

$$z_{\nu k}(v, u) = \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} D(v, t) y_{2k}(t, u) dt$$

и представим уравнение (5) в виде

$$\varphi(v, u) = -\int_{\tau_i}^{v}\int_{\tau_j}^{u} D(v, t)\varphi(t, s) D^{\tau}(u, s) ds dt + \int_{\tau_i}^{v} D(v, t)\varphi(t, u) dt + \\ + \int_{\tau_j}^{u} \varphi(v, t) D^{\tau}(u, t) dt + B(v, u) - \sum_{\nu=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1} z_{\nu k}(v, u) + \\ + \sum_{\nu=0}^{i-1} [y_{1\nu}(v, u) - d_{1\nu}^{j}(v, u)] + \sum_{k=0}^{j-1} [y_{2k}(v, u) - d_{2k}^{i}(v, u)] \tag{6}$$

$$(\tau_i<v\leqslant\tau_{i+1},\quad \tau_j<u\leqslant\tau_{j+1}).$$

Для численного решения интегрального уравнения (5) используем метод, основанный на последовательном повышении порядка точности [4, 5]. Приближенные значения функции $\varphi(v, u)$ (обозначим их через $\varphi^l_{ij}(v, u)$, где смысл индексов пояснен далее) будут находиться по рекуррентным формулам, использующим известное значение $\varphi(0, 0)=B(0, 0)$ и приближенные значения искомой функции на начальных слоях $\varphi(v, 0)$ и $\varphi(0, u)$, которые являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$\varphi(v, 0)=\int\limits_{\tau_i}^{v} D(v, t)\varphi(t, 0)dt+B(v, 0)+\sum_{\nu=0}^{i-1} y_{1\nu}(v, 0), \tag{7}$$

$$\varphi(0, u)=\int\limits_{\tau_j}^{u}\varphi(0, t)D^{\tau}(u, t)dt+B(0, u)+\sum_{k=0}^{j-1} y_{2k}(0, u). \tag{8}$$

Приближенные решения уравнений (7), (8), обозначенные $\varphi^l_{i,-1}(v, 0)$ и $\varphi^l_{-1,j}(0, u)$ соответственно, находим по алгоритму из [4]. Введем обозначения $\sigma_{1j}(t)=\tau_j+1/2(1-1/\sqrt{3})(t-\tau_j)$, $\tau_{1j}=\sigma_{1j}(\tau_{j+1})$, $\sigma_{2j}(t)=\tau_j+1/2(1+1/\sqrt{3})(t-\tau_j)$, $\tau_{2j}=\sigma_{2j}(\tau_{j+1})$.

I. Алгоритм нахождения $\varphi^l_{i,-1}(v, 0)$ ($l=0, 1, 2, 3$; $i=0, 1, \ldots, N-1$; $\tau_i<v\leqslant\tau_{i+1}$):

$$\begin{aligned}
\varphi^0_{i,-1}(v, 0)&=(v-\tau_i)D(v, \tau_i)\varphi^3_{i-1,-1}(\tau_i, 0)+\sum_{\nu=0}^{i-1}\tilde{y}^1_{\nu,-1}(v, 0)+B(v, 0),\\
\varphi^1_{i,-1}(v, 0)&=\frac{v-\tau_i}{2}B^0_{i,-1}(\tau_i, v;\ v, 0)+\sum_{\nu=0}^{i-1}\tilde{y}^1_{\nu,-1}(v, 0)+B(v, 0),
\end{aligned}\tag{9}$$

$$\varphi^m_{i,-1}(v, 0)=\frac{v-\tau_i}{2}B^{m-1}_{i,-1}(\sigma_{1i}(v), \sigma_{2i}(v);\ v, 0)+\sum_{\nu=0}^{i-1}\tilde{y}^1_{\nu,-1}(v, 0)+B(v, 0),$$

где

$$B^{l}_{i,j}(t_1, t_2;\ v, u)=D(v, t_1)\varphi^{l}_{i,j}(t_1, u)+D(v, t_2)\varphi^{l}_{i,j}(t_2, u),$$

$$\tilde{y}^1_{i,j}(v, u)=\frac{h_i}{2}B^3_{i,j}(\tau_{1i}, \tau_{2i};\ v, u)\quad (m=2, 3;\ j=-1, 0, 1, 2, \ldots, N).$$

Слагаемые со знаком суммы при $i=0$ в равенствах (9) отсутствуют, а $\varphi^3_{-1,-1}(0, 0)=B(0, 0)$.

II. Алгоритм нахождения $\varphi^l_{-1,j}(0, u)$ ($l=0, 1, 2, 3$; $j=0, 1, 2, \ldots, N-1$; $\tau_j<u\leqslant\tau_{j+1}$):

$$\varphi^0_{-1,j}(0, u)=(u-\tau_j)\varphi^3_{-1,j-1}(0, \tau_j)+\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{y}^2_{-1,k}(0, u)+B(0, u),$$

$$\varphi^1_{-1,j}(0, u)=\frac{u-\tau_j}{2}C^0_{-1,j}(\tau_j, u;\ 0, u)+\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{y}^2_{-1,k}(0, u)+B(0, u), \tag{10}$$

$$\varphi^{m}_{-1,\,j}(0,\,u)=\frac{u-\tau_j}{2}\,C^{m-1}_{-1,\,j}\,(\sigma_{1j}(u),\,\sigma_{2j}(u);\,0,\,u)+$$

$$+\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{y}^{2^*}_{-1,\,k}(0,\,u)+B(0,\,u),$$

где

$$C^{l}_{i,\,j}(t_1,\,t_2;\,v,\,u)=\varphi^{l}_{i,\,j}(v,\,t_1)D^{\mathrm{T}}(u,\,t_1)+\varphi^{l}_{i,\,j}(v,\,t_2)D^{\mathrm{T}}(u,\,t_2),$$

$$\tilde{y}^{2}_{i,\,j}(v,\,u)=\frac{h_j}{2}\,C^{3^*}_{i,\,j}(\tau_{1j},\,\tau_{2j};\,v,\,u)\quad(m=2,\,3;\;i=-1,\,0,\,1,\,\ldots,\,N).$$

Выражения $\tilde{y}^{1^*}_{\nu,\,-1}(v,\,0)$ и $\tilde{y}^{2}_{-1,\,k}(0,\,u)$ являются приближенными значениями функций $y_{1\nu}(v,\,0)$ и $y_{2k}(0,\,u)$ соответственно и вычисляются с использованием гауссовой квадратурной формулы

$$\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f(s)\,ds=\frac{h_j}{2}\,[f(\tau_{1j})+f(\tau_{2j})]+\frac{1}{4320}\,f^{(4)}(\zeta)h_j^5\quad(\tau_j\leqslant\zeta\leqslant\tau_{j+1}).\quad(11)$$

III. Алгоритм нахождения $\varphi^{l}_{i,\,j}(v,\,u)$ $(i,\,j=0,\,1,\,2,\,\ldots$ $\ldots,\,N-1;\;l=0,\,1,\,2,\,3;\;\tau_i<v\leqslant\tau_{i+1},\;\tau_j<u\leqslant\tau_{j+1})$:

$$\varphi^{0}_{i,\,j}(v,\,u)=-(v-\tau_i)\,(u-\tau_j)D(v,\,\tau_i)\varphi^{3}_{i-1,\,j-1}(\tau_i,\,\tau_j)D^{\mathrm{T}}(u,\,\tau_j)+$$

$$+(v-\tau_i)D(v,\,\tau_i)\varphi^{3}_{i-1,\,j}(\tau_i,\,u)+(u-\tau_j)\varphi^{3^*}_{i,\,j-1}(v,\,\tau_j)D^{\mathrm{T}}(u,\,\tau_j)+A_{ij}(v,\,u),$$

$$\varphi^{1}_{i,\,j}(v,\,u)=-\frac{(v-\tau_i)\,(u-\tau_j)}{4}\,E^{0}_{i,\,j}(\tau_i,\,v;\,\tau_j,\,u)+\frac{v-\tau_i}{2}\,B^{0^*}_{i,\,j}(\tau_i,\,v;\,v,\,u)+$$

$$+\frac{u-\tau_j}{2}\,C^{0}_{i,\,j}(\tau_j,\,u;\,v,\,u)+A_{ij}(v,\,u),$$

$$\varphi^{m}_{i,\,j}(v,\,u)=-\frac{(v-\tau_i)\,(u-\tau_j)}{4}\,E^{m-1}_{i,\,j}\,(\sigma_{1i}(v),\,\sigma_{2i}(v);\,\sigma_{1j}(u),\,\sigma_{2j}(u))+$$

$$+\frac{v-\tau_i}{2}\,B^{m-1}_{i,\,j}\,(\sigma_{1i}(v),\,\sigma_{2i}(v);\,v,\,u)+\frac{u-\tau_j}{2}\,C^{m-1}_{i,\,j}\,(\sigma_{1j}(u),\,\sigma_{2j}(u);\,v,\,u)+\quad(12)$$

$$+A_{ij}(v,\,u),$$

где $m=2,\,3$, $E^{l}_{i,\,j}(t_1,\,t_2;\,t_3,\,t_4)=D(v,\,t_1)\,[\varphi^{l}_{i,\,j}(t_1,\,t_2)D^{\mathrm{T}}(u,\,t_3)+\varphi^{l}_{i,\,j}(t_1,\,t_4)\times$ $\times D^{\mathrm{T}}(u,\,t_4)]+D(v,\,t_2)\,[\varphi^{l}_{i,\,j}(t_2,\,t_3)D^{\mathrm{T}}(u,\,t_3)+\varphi^{3}_{i,\,j}(t_2,\,t_4)D^{\mathrm{T}}(u,\,t_4)]$,

$$A_{ij}(v,\,u)=-\sum_{\nu=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{z}_{\nu k}(v,\,u)+\sum_{\nu=0}^{i-1}\,[\tilde{y}^{1^*}_{\nu,\,j}(v,\,u)-\tilde{d}^{1}_{\nu,\,j}(v,\,u)]+$$

$$+\sum_{k=0}^{j-1}\,[\tilde{y}^{2}_{i,\,k}(v,\,u)-\tilde{d}^{2}_{i,\,k}(v,\,u)]+B(v,\,u);\;A_{00}(v,\,u)=B(v,\,u),$$

$$\tilde{z}_{\nu k}(v,\,u)=\frac{h_\nu h_k}{4}\,E^{3}_{\nu,\,k}(\tau_{1\nu},\,\tau_{2\nu};\,\tau_{1k},\,\tau_{2k}),$$

$$\tilde{d}^{1}_{\nu,\,j}(v,\,u)=\frac{h_\nu(u-\tau_j)}{4}\,E^{3}_{\nu,\,j}(\tau_{1\nu},\,\tau_{2\nu};\,\sigma_{1j}(u),\,\sigma_{2j}(u)),$$

$$\tilde{d}^{2}_{i,\,k}(v,\,u)=\frac{h_k(v-\tau_i)}{4}\,E^{3}_{i,\,k}(\sigma_{1i}(v),\,\sigma_{2i}(v);\,\tau_{1k},\,\tau_{2k}).$$

Алгоритм (12) построен в результате замены интегралов в (6), не входящих под знаки сумм, по формулам левых прямоугольников, трапеции и их аналогам для двойных интегралов, а также по квадратурной формуле (11) и ее кубатурному аналогу

$$\int\limits_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(t, s)\,ds\,dt \approx \frac{h_\nu h_k}{4}\,[f(\tau_{1\nu}, \tau_{1k})+f(\tau_{1\nu}, \tau_{2k})+ \\ +f(\tau_{2\nu}, \tau_{1k})+f(\tau_{2\nu}, \tau_{2k})], \tag{13}$$

подстановки вместо функции $\varphi(t, s)$ на каждом отрезке разбиения соответствующих приближений и отбрасывания остаточных членов. Величины $\tilde{y}^{1}_{\nu, k}(v, u)$, $\tilde{y}^{2}_{\nu, k}(v, u)$, $\tilde{a}^{1}_{\nu, k}(v, u)$, $\tilde{a}^{2}_{\nu k}(v, u)$ и $z_{\nu k}(v, u)$ вычисляются рекуррентно по формулам (11) и (13), используя известное начальное значение $B(0, 0)$ и значения на начальных слоях $\varphi^{3}_{i,-1}(v, 0)$ и $\varphi^{3}_{-1, j}(0, u)$.

Введем обозначения

$$r^{l}_{ij}(v, u)=\varphi(v, u)-\varphi^{l}_{i, j}(v, u), \quad r^{l}_{ij}=\|r^{l}_{ij}(v, u)\|$$

$$(l=0, 1, 2, 3; \quad i, j=0, 1, \ldots, N).$$

Теорема 1. *Пусть функции $B(v, u)$, $D(\tau, s)$ и $G(\tau, s)$ вычисляются точно. Тогда для погрешности алгоритма (12) численного решения интегрального уравнения (5) верна оценка*

$$r^{3}_{ij} \leqslant C \exp\left[\frac{h}{\min\limits_{j} h_j} T(\|D\|+\|D^{\tau}\|)\right] h^4,$$

где C — постоянная, величина которой определяется используемыми квадратурными формулами и известными функциями.

Доказательство этой теоремы не представляет принципиальных трудностей, но достаточно громоздко. Оно основывается на последовательном получении оценок для r^{l}_{ij} $(l=0, 1, 2, 3;\ i, j=0, 1, \ldots, N)$ и аналогично получению такого вида оценки в статье [4].

Приближенное значение K_{lk} корреляционной функции $K_x(\tau, s)$ в точке (τ_l, τ_k) вычислим по следующей схеме:

$$K_{lk}=\sum_{\nu=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{h_\nu h_k}{4}\{G(\tau_l, \tau_{1\nu})\,[\varphi^{3}_{\nu, m}(\tau_{1\nu}, \tau_{1m})\,G(\tau_k, \tau_{1m})+ \\ +\varphi^{3}_{\nu, m}(\tau_{1\nu}, \tau_{2m})\,G(\tau_k, \tau_{2m})]+G(\tau_l, \tau_{2\nu})\,[\varphi^{3}_{\nu, m}(\tau_{2\nu}, \tau_{1m})\,G(\tau_k, \tau_{1m})+ \\ +\varphi^{3}_{\nu, m}(\tau_{2\nu}, \tau_{2m})\,G(\tau_k, \tau_{2m})]\}. \tag{14}$$

Алгоритм (14) получается, если интеграл в (4) вычислить по формуле (13), вместо функции $\varphi(v, u)$ подставить соответствующие приближения $\varphi^{3}_{\nu, m}(v, u)$ и отбросить остаточные члены.

Теорема 2. *Для погрешности $\varepsilon_{lk}=\|K_x(\tau_l, \tau_k)-K_{lk}\|$ корреляционной функции $K_x(\tau, s)$ решения системы (1), найденной в точках (τ_l, τ_k) по алгоритму (14), где $\varphi^{3}_{\nu, k}(v, u)$ вычисляются по формулам (12), верна оценка $\varepsilon_{lk}=O(h^4)$.*

Справедливость теоремы 2 следует из теоремы 1 и оценки погрешности формулы (13).

Наряду с (12) рассмотрим еще один алгоритм вычисления корреляционной матрицы $\varphi(v, u)$ процесса $\eta(\tau)$. Пусть $\Gamma(\tau, s)$ — резольвента интегрального уравнения (3). Тогда для каждой реализации процесса $\xi(\tau)$ решение $\eta(\tau)$ этого уравнения можем записать в виде

$$\eta(\tau)=\xi(\tau)+\int_0^\tau \Gamma(\tau, s)\xi(s)ds, \tag{15}$$

и корреляционная функция $\varphi(v, u)$ процесса $\eta(\tau)$ будет находиться из выражения

$$\varphi(v, u)=\int_0^v dt\int_0^u ds\Gamma(v, t)B(t, s)\Gamma^{\mathrm{T}}(u, s)+\int_0^v \Gamma(v, t)B(t, u)dt+$$

$$+\int_0^u B(v, t)\Gamma^{\mathrm{T}}(u, t)dt+B(v, u). \tag{16}$$

Отдельно следует рассмотреть возмущение исходной системы (1) белым шумом, т. е. случай, когда $B(v, u)=Q\delta(u-v)$, где Q — заданная матрица интенсивности. Пусть $\{\xi_m(\tau)\}$ — последовательность случайных процессов с непрерывными корреляционными функциями $\{B_m(\tau, s)\}$ на $[0, T; 0, T]$, таких, что $B_m(\tau, s)\to Q\delta(\tau-s)$ при $m\to\infty$. Соответственно и функция $\varphi_m(v, u)$, определяемая уравнением (16), примет при $m\to\infty$ вид

$$\varphi(v, u)=\int_0^{\min(v, u)} \Gamma(v, t)Q\Gamma^{\mathrm{T}}(u, t)dt+B_1(v, u), \tag{17}$$

где

$$B_1(v, u)=\begin{cases} Q\Gamma^{\mathrm{T}}(u, v), & v<u,\\ [D(v, v)Q+QD^{\mathrm{T}}(v, v)]/2, & v=u,\\ \Gamma(v, u)Q, & v>u,\end{cases}$$

и, следовательно, искомая корреляционная функция $K_x(\tau, s)$ будет иметь вид

$$K_x(\tau, s)=\int_0^\tau\int_0^s G(\tau, v)\varphi(v, u)G(s, u)dudv+\int_0^{\min(\tau, s)} G(\tau, t)QG(s, t)dt, \tag{18}$$

где $\varphi(v, u)$ задается равенством (17).

Выражение (16) позволяет найти, применяя квадратурные формулы заданной точности, функцию $\varphi(v, u)$ в произвольных точках (v, u).

Таким образом, задача нахождения корреляции решения исходной системы (1) свелась при таком подходе к отысканию резольвенты $\Gamma(v, u)$, которая является, как известно, решением интегрального уравнения

$$\Gamma(\tau, s)=\int_s^\tau D(\tau, t)\Gamma(t, s)dt+D(\tau, s). \tag{19}$$

Непосредственно из уравнения (19) видно, что $\Gamma(\tau, \tau)=D(\tau, \tau)$, а из (17) следует, что находить функцию $\Gamma(\tau, s)$ нужно в треугольной области $s\leqslant\tau$ квадрата $[0, T; 0, T]$.

Рассмотрим один из алгоритмов численного решения уравнения (19).

Разобьем отрезок $[0, T]$ точками $t_j: 0=t_0<t_1<\ldots<t_j<t_{j+1}<\ldots\ldots<t_{N_1}=T$. Пусть, как и раньше, $h_j=t_{j+1}-t_j$, $h=\max\limits_j h_j$. В случае, когда $\tau, s\in[t_l, t_{l+1}]$, вычисления будут проводиться по схеме

$$\Gamma^0_{l+1, l}(\tau, s)=(\tau-s)D(\tau, s)D(s, s)+D(\tau, s),$$

$$\Gamma^1_{l+1,\,l}(\tau,\,s)=\frac{\tau-s}{2}\,[D(\tau,\,s)D(s,\,s)+D(\tau,\,\tau)\Gamma^{0}_{l+1,\,l}(\tau,\,s)]+D(\tau,\,s),$$

$$\Gamma^m_{l+1,\,l}(\tau,\,s)=\frac{\tau-s}{6}\left[D(\tau,\,s)D(s,\,s)+4D\left(\tau,\,\frac{\tau+s}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\Gamma^{m-1}_{l+1,\,l}\left(\frac{\tau+s}{2},\,s\right)+D(\tau,\,\tau)\Gamma^0_{l+1,\,l}(\tau,\,s)\right]+D(\tau,\,s),$$

где $m=2,\,3;\ l=0,\,1,\,\ldots,\,N_1-1;\ s<\tau$.

Если τ и s не принадлежат одному отрезку разбиения, то уравнение (19) может быть представлено в следующем виде:

$$\Gamma(\tau,\,s)=\int\limits_{t_{i-1}}^{\tau}D(\tau,\,u)\Gamma(u,\,s)du+D(\tau,\,s)+\sum_{\nu=j}^{i-2}\int\limits_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}D(\tau,\,u)\Gamma(u,\,s)du+$$

$$+\int\limits_{s}^{t_j}D(\tau,\,u)\Gamma(u,\,s)du\,(t_{i-1}<\tau\leqslant t_i,\ t_{j-1}\leqslant s<t_j;\ j=\overline{0,\,N_1-1},\ i=\overline{j+1,\,N_1}). \tag{20}$$

Пусть, далее,

$$\Gamma^0_{ij}(\tau,\,s)=(\tau-t_{i-1})D(\tau,\,t_{i-1})\Gamma^3_{i-1,\,j}(t_{i-1},\,s)+H_{ij}(\tau,\,s),$$

$$\Gamma^1_{ij}(\tau,\,s)=\frac{\tau-t_{i-1}}{2}\,[D(\tau,\,t_{i-1})\Gamma^3_{i-1,\,j}(t_{i-1},\,s)+D(\tau,\,\tau)\Gamma^0_{ij}(\tau,\,s)]+H_{ij}(\tau,\,s),$$

$$\Gamma^m_{ij}(\tau,\,s)=\frac{\tau-t_{i-1}}{6}\left[D(\tau,\,t_{i-1})\Gamma^3_{i-1,\,j}(t_{i-1},\,s)+4D\left(\tau,\,\frac{t_{i-1}+s}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\Gamma^{m-1}_{ij}\left(\frac{t_{i-1}+\tau}{2},\,s\right)+D(\tau,\,\tau)\Gamma^{m-1}_{ij}(\tau,\,s)\right]+H_{ij}(\tau,\,s), \tag{21}$$

где $m=2,\,3;\ \Gamma(0,\,0)=D(0,\,0)$,

$$H_{ij}(\tau,\,s)=\frac{\tau_j-s}{6}\left[D(\tau,\,s)D(s,\,s)+4D\left(\tau,\,\frac{t_j+s}{2}\right)\Gamma^3_{j,\,j}\left(\frac{t_j+s}{2},\,s\right)+\right.$$

$$\left.+D(\tau,\,t_j)\Gamma^3_{j,\,j}(t_j,\,s)\right]+\sum_{\nu=j}^{i-2}z_\nu(\tau,\,s),$$

$$z_\nu(\tau,\,s)=\frac{h_{\nu+1}}{6}\left[D(\tau,\,t_\nu)\Gamma^3_{\nu,\,j}(t_\nu,\,s)+4D\left(\tau,\,\frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\Gamma^3_{\nu+1,\,j}\left(\frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2},\,s\right)+D(\tau,\,t_{\nu+1})\Gamma^3_{\nu+1,\,j}(t_{\nu+1},\,s)\right].$$

Формулы (21) получаются, если первый интеграл в выражении (20) заменить последовательно по формулам левых прямоугольников, трапеции и дважды по формулам Симпсона, используя предыдущие приближения, а оставшийся интеграл вычислять по формулам Симпсона (используя ранее полученные приближения). Вычисления ведутся послойно по второй переменной начиная с $s=0$.

В случае, когда τ и s принадлежат одному отрезку разбиения, приведенная ранее вычислительная схема получена аналогично.

Будем предполагать, что $\dfrac{\partial^4}{\partial u^4}[D(\tau,\,u)\Gamma(u,\,s)]$ является непрерывной на кубе $[0,\,T;\ 0,\,T;\ 0,\,T]$ функцией. Тогда найдутся такие постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4, что остатки $R_{1i}(\tau,\,s,\,\zeta_{1i})$, $R_{2i}(\tau,\,s,\,\zeta_{2i})$, $R_{3i}(\tau,\,s,\,\zeta_{3i})$

и $R_{4j}(\tau, s, \zeta_{4j})$ квадратурных формул левых прямоугольников, трапеций и Симпсона будут оцениваться соответственно неравенствами

$$\begin{aligned} &\|R_{1i}(\tau, s, \zeta_{1i})\| \leqslant C_1(\tau-t_{i-1})^2, \ \|R_{2i}(\tau, s, \zeta_{2i})\| \leqslant C_2(\tau-t_{i-1})^3, \\ &\|R_{3i}(\tau, s, \zeta_{3i})\| \leqslant C_3(\tau-t_{i-1})^5, \ \|R_{4j}(\tau, s, \zeta_{4j})\| \leqslant C_4(t_j-s)^5. \end{aligned} \tag{22}$$

Пусть $\varepsilon_{ij}^{k}(\tau, s)=\Gamma(\tau, s)-\Gamma_{ij}^{k}(\tau, s)$ $(k=0, 1, 2, 3)$. Тогда для погрешностей $\varepsilon_{ij}^{k}(\tau, s)$, предполагая, что $D(\tau, s)$ вычисляется точно, имеют место следующие представления:

$$\varepsilon_{ij}^{0}(\tau, s)=R_{1i}(\tau, s, \zeta_{1i})+(\tau-t_{i-1})D(\tau, t_{i-1})\varepsilon_{i-1, j}^{3}(t_{i-1}, s)+r_{ij}(\tau, s),$$

$$\varepsilon_{ij}^{1}(\tau, s)=R_{2i}(\tau, s, \zeta_{2i})+\frac{\tau-t_{i-1}}{2}[D(\tau, t_{i-1})\varepsilon_{i-1, j}^{3}(t_{i-1}, s)+$$

$$+D(\tau, \tau)\varepsilon_{ij}^{0}(\tau, s)]+r_{ij}(\tau, s),$$

$$\varepsilon_{ij}^{m}(\tau, s)=R_{3i}(\tau, s, \zeta_{3i})+\frac{\tau-t_{i-1}}{6}\Big[D(\tau, t_{i-1})\varepsilon_{i-1, j}^{3}(t_{i-1}, s)+$$

$$+4D\left(\tau, \frac{t_{i-1}+\tau}{2}\right)\varepsilon_{i, j}^{m-1}\left(\frac{\tau+t_{i-1}}{2}, s\right)+D(\tau, \tau)\varepsilon_{i, j}^{m-1}(\tau, s)\Big]+r_{ij}(\tau, s),$$

где $m=2, 3$,

$$r_{ij}(\tau, s)=R_{4j}(\tau, s, \zeta_{4j})+\frac{t_j-s}{6}\Big[D(\tau, t_j)\varepsilon_{j, j}^{3}(t_j, s)+$$

$$+4D\left(\tau, \frac{t_j+s}{2}\right)\varepsilon_{j, j}^{3}\left(\frac{s+t_j}{2}, s\right)\Big]+\sum_{\nu=j}^{i-2}\rho_\nu(\tau, s),$$

$$\rho_\nu(\tau, s)=R_{3\nu}(\tau, s, \zeta_{3\nu})+\frac{h_{\nu+1}}{6}\Big[D(\tau, t_j)\varepsilon_{\nu, j}^{3}(t_\nu, s)+$$

$$+4D\left(\tau, \frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2}\right)\varepsilon_{\nu+1, j}^{3}\left(\frac{t_\nu+t_{\nu+1}}{2}, s\right)+D(\tau, t_{\nu+1})\varepsilon_{\nu+1, j}^{3}(t_{\nu+1}, s)\Big].$$

Обозначая $\varepsilon_{ij}^{k}=\sup\limits_{\substack{t_{j-1}\leqslant s<t_j \\ t_{i-1}<\tau\leqslant t_i}}\|\varepsilon_{ij}^{k}(\tau, s)\|$, $r_{ij}=\max\limits_{\tau, s\in[0, T]}\|r_{ij}(\tau, s)\|$, из приведенных выше представлений имеем оценку погрешностей

$$\varepsilon_{ij}^{0}\leqslant C_1(\tau-t_{i-1})^2+(\tau-t_{i-1})\|D\|\varepsilon_{i-1, j}^{3}+r_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij}^{1}\leqslant C_2(\tau-t_{i-1})^3+\frac{\tau-t_{i-1}}{2}\|D\|\varepsilon_{i-1, j}^{3}+\frac{\tau-t_{i-1}}{2}\|D\|\varepsilon_{ij}^{0}+r_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij}^{m}\leqslant C_3(\tau-t_{i-1})^5+\frac{\tau-t_{i-1}}{6}\|D\|\varepsilon_{i-1, j}^{3}+\frac{5}{6}(\tau-t_{i-1})\|D\|\varepsilon_{i, j}^{m-1}+r_{ij}$$

$$(m=2, 3).$$

Используя последнюю группу неравенств, нетрудно получить

$$\varepsilon_{ij}^{3}\leqslant A(h_{i-1})h_{i-1}^{5}+h_{i-1}B(h_{i-1})\varepsilon_{i-1, j}^{3}+C(h_{i-1})r_{ij}, \tag{23}$$

где

$$A(h_{i-1})=C_3\left[1+\frac{5}{6}h_{i-1}\|D\|\right]+\frac{25}{36}\|D\|^2\left[C_2+\frac{\|D\|}{2}C_1\right],$$

$$B(h_{i-1})=\frac{\|D\|}{6}\left[1+\frac{5}{6}h_{i-1}\|D\|\right]+\frac{25}{72}h_{i-1}^2\|D\|^3[1+h_{i-1}\|D\|],$$

$$C(h_{i-1})=1+\frac{5}{6}h_{i-1}\|D\|+\frac{25}{36}h_{i-1}^2\|D\|^2\left[1+\frac{h_{i-1}}{2}\|D\|\right].$$

Для r_{ij} легко получить оценку

$$r_{ij}\leqslant C_4h_{i-1}^5+\frac{5}{6}h_{j-1}\|D\|\varepsilon_{j,j}^3+\sum_{\nu=j}^{i-2}\left[C_3h_\nu^5+\right.$$
$$\left.+\frac{h_\nu}{6}\|D\|\varepsilon_{\nu,j}^3+\frac{5}{6}h_\nu\|D\|\varepsilon_{\nu+1,j}^3\right]. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23) и вводя обозначения

$$\alpha(h)=[A(h)+C_4C(h)]h+C_3TC(h),\quad \beta(h)=B(h)+\frac{7}{6}C(h)\|D\|,$$

приходим к неравенству

$$\varepsilon_{ij}^3\leqslant\alpha(h)h^4+h\beta(h)\sum_{\nu=0}^{i-1}\varepsilon_{\nu,j}^3,$$

из которого следует, что

$$\varepsilon_{ij}^3\leqslant[\alpha(h)h^4+\beta(h)h\varepsilon_{00}^3]\exp\left[\beta(h)T\frac{h}{\min\limits_\nu h_\nu}\right].$$

Учитывая, что $\varepsilon_{00}^3\leqslant\alpha(h)h^4$, окончательно получаем

$$\varepsilon_{ij}^3\leqslant V(h)h^4,\ \text{где}\ V(h)=[\alpha(h)+\beta(h)h\alpha(h)]\exp\left[\beta(h)T\frac{h}{\min\limits_\nu h_\nu}\right].$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть функция $D(\tau, s)$ вычисляется точно. Тогда для погрешности $\varepsilon_{ij}^3(\tau, s)$ решения уравнения (19), найденного по алгоритму (21), верна оценка $\varepsilon_{lk}^3=O(h^4)$.*

Наряду с алгоритмом (21) приведем алгоритм приближенного нахождения решения интегрального уравнения (19) в точках (t_i, t_j). Если в формуле (20) положить $s=t_j$, то, поступая так же, как и при построении алгоритма (21), и ограничиваясь только формулой трапеции, примененной дважды, после подстановки предыдущих приближений в последующие, придем к следующей расчетной схеме:

$$\Gamma_2(t_i, t_i)=D(t_i, t_i),$$

$$\Gamma_2(t_i, t_j)=\frac{h_{i-1}}{2}\left[1+\frac{h_{i-1}}{2}D(t_i, t_i)+\frac{h_{i-1}^2}{2}D(t_i, t_i)D(t_i, t_i)\right]\times$$
$$\times D(t_i, t_{i-1})\Gamma_2(t_{i-1}, t_j)+\left[1+\frac{h_{i-1}}{2}D(t_i, t_i)+\right. \tag{25}$$
$$\left.+\frac{h_{i-1}^2}{4}D(t_i, t_i)D(t_i, t_i)\right]\tilde{H}(t_i, t_j),$$

где

$$\tilde{H}(t_i, t_j)=D(t_i, t_j)+\sum_{\nu=j}^{i-2}\frac{h_{\nu+1}}{2}[D(t_i, t_\nu)\Gamma_2(t_\nu, t_j)+D(t_i, t_{\nu+1})\Gamma_2(t_{\nu+1}, t_j)]$$

$$(i=1, 2, \ldots, N_1;\ j\leqslant i-1).$$

Невысокий порядок точности, а именно $\|\Gamma(t_i, t_j)-\Gamma_2(t_i, t_j)\|=O(h^2)$, алгоритма (25) окупается простотой расчетов, что позволяет успешно применять его при малом шаге h_ν.

Применяя к интегралам в (4) и (16) квадратурные формулы трапеции и ее кубатурные аналоги и находя значение резольвенты $\Gamma(\tau, s)$ по алгоритму (25), найдем корреляцию решения исходной задачи Коши с точностью $O(h^2)$.

Если для замены интегралов в (4) и (16) использовать формулы (13) и соответственно (11) и (13), а резольвенту $\Gamma(\tau, s)$ находить по формулам (21), то корреляция решения системы (1) будет найдена с точностью $O(h^4)$.

Эффективность некоторых из построенных алгоритмов проверялась на примерах численного нахождения корреляции решения уравнения, правая часть которого возмущена белым шумом. Значения корреляции решения исходной системы вычислялись по формулам, полученным в результате замены интегралов в (18) кубатурной и квадратурной формулами трапеции. Приближенные значения $\varphi(v, u)$ решения интегрального уравнения (5) находились из (17) заменой интеграла по формулам трапеции. Резольвента $\Gamma(\tau, s)$ вычислялась по алгоритму (25). Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1060 для равноотстоящих узлов на квадрате [0, 5; 0, 5] с шагом $h=0{,}1$.

Пример 1.

$$x''(\tau)-17x'(\tau)-15x(\tau)-\int_0^\tau[\sin(\tau-u)-15(\tau-u)-17]x''(u)du=$$

$$=F(\tau)+\xi(\tau),$$

где $B(\tau, s)=\delta(\tau-s)$, а $F(\tau)$ — произвольная детерминированная функция.

Корреляция решения уравнения с любыми детерминированными начальными условиями $x(0)=x_0$ и $x'(0)=x'_0$ имеет вид

Таблица 1

s \ τ	1	2	3	4	5
1	0,40386	1,3580	3,2196	6,5279	11,821
2	1,3580	5,3032	13,158	27,395	50,663
3	3,2196	13,158	33,820	71,710	134,47
4	6,5279	27,395	71,710	154,21	292,12
5	11,821	50,663	134,47	292,12	558,07

Таблица 2

s \ τ	1	2	3	4	5
1	0,40664	1,4394	4,0360	11,014	29,946
2	1,4394	5,8187	16,699	45,705	124,31
3	4,0360	16,699	48,864	134,24	365,31
4	11,014	45,705	134,24	369,84	1007,0
5	29,946	124,31	365,31	1007	2742,8

$$K_x(v,u)=\frac{vu^2}{2}+\frac{(u-z)^3}{6}-\frac{u^3}{6}+\frac{vu^4}{24}+\frac{(u-z)^5}{120}-\frac{u^5}{120}+\frac{uv^4}{24}+$$
$$+\frac{(v-z)^5}{120}-\frac{v^5}{120}+\frac{u^3v^4}{144}-\frac{u^2v^5}{240}+\frac{uv^6}{720}+\frac{(v-z)^7}{5040}-\frac{v^7}{5040},$$

где $z=\min(v, u)$.

В табл. 1 приведены приближенные значения корреляции $K_x(\tau, s)$ решения $x(\tau)$ этого уравнения.

Максимальная погрешность не превышает двух единиц третьей значащей цифры.

Пример 2.

$$x''(\tau)+2x'(\tau)-3x(\tau)-\int_0^\tau e^{\tau-u}x(u)\,du-\int_0^\tau \sin(\tau-u)\,x'(u)\,du-$$
$$-\int_0^\tau [\cos(\tau-u)-e^{\tau-u}-(\tau-u)+2]\,x''(u)\,du=F(\tau)+\xi(\tau),$$
$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x'_0,$$

где $B(\tau, s)=\delta(\tau-s)$; $F(\tau)$ — также произвольная детерминированная функция, а x_0 и x'_0 — любые фиксированные числа.

Точное значение корреляции решения в этом случае задается формулой

$$K_x(\tau, s)=\frac{1}{4}\operatorname{sh}(\tau+s)-\frac{1}{4}\operatorname{sh}|\tau-s|-\frac{\min(\tau, s)}{2}\operatorname{ch}(\tau-s).$$

В табл. 2 приведены приближенные значения корреляции $K_x(\tau, s)$ решения, которые совпадают с точным значением примерно на три значащие цифры. Максимальная относительная погрешность не превосходит 0,003.

Ядро $D(\tau, s)$ в первом примере имеет вид $D(\tau, s)=\sin(\tau-s)$, во втором $D(\tau, s)=\tau-s$, а резольвента соответственно равна $\Gamma(\tau, s)=\tau-s$ и $\Gamma(\tau, s)=\operatorname{sh}(\tau-s)$. Функция $\varphi(v, u)$ в первом случае задается равенством $\varphi(v, u)=|u-v|+\frac{\max(v, u)z^2}{2}-\frac{z^3}{6}$, во втором — равенством $\varphi(v, u)=\frac{3}{4}\operatorname{sh}|u-v|+\frac{1}{4}\operatorname{sh}(v+u)-\frac{z}{2}\operatorname{ch}(u-v)$. Функции $\varphi(v, u)$ для этих примеров находились по формуле (17).

Литература

1. Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В. Введение в аэроавтоупругость. М., 1980.
2. Астапов И. С., Белоцерковский С. М., Качанов Б. О., Кочетков Ю. А. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 18, № 9. С. 1628—1637.
3. Чайковский М. В., Янович Л. А. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27, № 11. С. 972—975.
4. Янович Л. А. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 4. С. 293—296.
5. Чайковский М. В., Янович Л. А. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 9. С. 780—783.

Институт математики
АН БССР

Поступила в редакцию
27 января 1984 г.