Доклады Академии наук БССР

1983 Том XXVII № 11

УДК 519.642.2

М. В. ЧАЙКОВСКИЙ, Л. А. ЯНОВИЧ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

(Представлено академиком АН БССР В. И. Крыловым)

Рассматривается система уравнений вида

$$x''(\tau)+2p(\tau)x'(\tau)+q(\tau)x(\tau)=Q(\tau)x(\tau)+P(\tau)x'(\tau)+ \\ +\sum_{\nu=0}^{2}\int_0^\tau K_\nu(\tau,\ s)x^{(\nu)}(s)\,ds+F(\tau) \tag{1}$$

с начальными условиями $x(0)=x_0$, $x'(0)=\dot{x}_0$, где $p(\tau)$ и $q(\tau)$ — диагональные матрицы, $\omega(\tau)=q(\tau)-p^2(\tau)>0$ для $\tau\in[0,\ T]$; $Q(\tau)$, $P(\tau)$ и $K_\nu(\tau,\ s)\,(\nu=0,\ 1,\ 2)$ — квадратные матрицы размерности n; $F(\tau)$ — вектор-столбец заданных функций.

Предполагается существование и единственность данной задачи Коши, а также наличие необходимой гладкости функций, входящих в уравнение (1), обеспечивающей возможность проводимых в дальнейшем преобразований.

Такого рода системы интегро-дифференциальных уравнений возникают при решении многих практических задач (см., напр., [1, 2]). Имеется ряд приближенных методов решения уравнений вида (1). В предлагаемой работе строятся и исследуются алгоритмы решения данной задачи Коши, близкие к алгоритмам, рассмотренным в [3, 4] для случая постоянных коэффициентов в дифференциальном операторе.

Введем обозначения

$$\chi(\tau)=\frac{\omega''(\tau)}{4\omega(\tau)}-\frac{5}{16}\left(\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)}\right)^2,\quad \vartheta(\tau)=Q(\tau)+\chi(\tau)+p'(\tau),$$

$$G(\tau,\ s)=\omega^{-1/4}(\tau)\,\omega^{-1/4}(s)\exp\left\{-\int_s^\tau p(t)\,dt\right\}\sin\left\{\int_s^\tau \omega^{1/2}(t)\,dt\right\}$$

и рассмотрим интегральное уравнение

$$x(\tau)=\int_{\tau_j}^{\tau}G(\tau,\ s)[\Phi(s)+F(s)]\,ds+G(\tau,\ \tau_j)x'(\tau_j)+\Psi(\tau,\ \tau_j)x(\tau_j) \\ (\tau_j\leqslant\tau\leqslant T), \tag{2}$$

где

$$\Phi(s)=\vartheta(s)x(s)+P(s)x'(s)+\sum_{i=0}^{2}\int_0^s K_i(s,\ u)x^{(i)}(u)\,du, \tag{3}$$

$$\Psi(\tau,\ s) = 2G(\tau,\ s)\,p(s) - \frac{\partial}{\partial s}G(\tau,\ s)$$

$$(\tau_j < \tau_{j+1};\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N;\ \tau_0 = 0,\ \tau_{N+1} = T).$$

Так как $G(\tau,\ \tau)$ — нулевая матрица, то, дифференцируя равенство (2), получим

$$x'(\tau) = \int_{\tau_j}^{\tau} \frac{\partial}{\partial\tau} G(\tau,\ s)\,[\Phi(s) + F(s)]\,ds +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\tau} G(\tau,\ \tau_j)\,x'(\tau_j) + \frac{\partial}{\partial\tau}\Psi(\tau,\ \tau_j)\,x(\tau_j). \tag{4}$$

Введем далее обозначения

$$A_i(\tau,\ u) = \int_u^{\tau} K_i(\tau,\ t)\,\frac{\partial^i G(t,\ u)}{\partial t^i}\,dt,\quad B_i(\tau,\ u) = \int_u^{\tau} K_i(\tau,\ t)\,\frac{\partial^i \Psi(t,\ u)}{\partial t^i}\,dt$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2).$$

Если $x(s)$ и $x'(s)$ в (3) заменить их представлениями (2) и (4), а $x''(s)$ — выражением, полученным после дифференцирования (4), поменять порядок интегрирования в двойных интегралах и сделать некоторые преобразования, то придем к уравнению

$$\Phi(s) = \int_0^s D(s,\ u)\,\Phi(u)\,du + Q_0(s), \tag{5}$$

где

$$D(s,\ u) = \vartheta(s)\,G(s,\ u) + P(s)\,\frac{\partial G(s,\ u)}{\partial s} + \sum_{i=0}^{2} A_i(s,\ u) + K_2(s,\ u),$$

$$Q_0(s) = \int_0^s D(s,\ u)\,F(u)\,du + \vartheta(s)\,[G(s,\ 0)\,x_0' + \Psi(s,\ 0)\,x_0] +$$

$$+ P(s)\left[\frac{\partial}{\partial s} G(s,\ 0)\,x_0' + \frac{\partial}{\partial s}\Psi(s,\ 0)\,x_0\right] + \sum_{i=0}^{2}\,[A_i(s,\ 0)\,x_0' + B_i(s,\ 0)\,x_0].$$

Пусть при построении численных алгоритмов к интегралам в (2) и (4) при $\tau = \tau_{j+1}$ применены квадратурные формулы вида

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} G(\tau_{j+1},\ s)\,f(s)\,ds = h_j \sum_{k=1}^{m} A_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})\,f(\tau_j + \gamma_k h_j) + R_{mj}(f), \tag{6}$$

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\partial}{\partial\tau} G(\tau_{j+1},\ s)\,f(s)\,ds = h_j \sum_{k=1}^{m} B_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})\,f(\tau_j + \gamma_k h_j) + \bar{R}_{mj}(f)$$

$$(f(s) = \Phi(s) + F(s)),$$

где $A_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})$ и $B_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})$ — диагональные матрицы размерности n, остатки $R_{mj}(f)$ и $\bar{R}_{mj}(f)$ — векторы-столбцы, для которых справедливы следующие оценки:

$$\|R_{mj}(f)\| \leqslant c_1 h_j^{\nu_1+1},\quad \|\bar{R}_{mj}(f)\| \leqslant c_2 h_j^{\nu_2+1}$$

$$(h_j = \tau_{j+1} - \tau_j,\ 0 \leqslant \gamma_k \leqslant 1,\ \max(c_1,\ c_2) \leqslant c < \infty,\ \nu_1 > 0,\ \nu_2 > 0).$$

Обозначим через Φ_{kj} и F_{kj} соответственно приближенные значения функций $\Phi(s)$ и $F(s)$ в точке $t_{kj}=\tau_j+\gamma_k h_j$: $\Phi(t_{kj})=\Phi_{kj}+\varepsilon_{kj}$, $F(t_{kj})=F_{kj}+\tilde{\varepsilon}_{kj}$, где ε_{kj} и $\tilde{\varepsilon}_{kj}$ — погрешности вычисления этих функций. Предположим также, что выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^{m}\|A_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})\|\leqslant a,\ \sum_{k=1}^{m}\|B_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})\|\leqslant b,$$

$$\|\varepsilon_{kj}\|\leqslant\|\varepsilon\| \text{ и } \|\tilde{\varepsilon}_{kj}\|\leqslant\|\tilde{\varepsilon}\|.$$

Для дальнейшего изложения удобнее будет ввести обозначения: производные $\dfrac{\partial^{i+k}f(\tau,\ s)}{\partial\tau^i\partial s^k}$ будем обозначать $f^{(i,k)}(\tau,\ s)$, а $\|f^{(i,k)}\|$ положим равным

$$\|f^{(i,k)}\|=\sup_{0\leqslant\tau,s\leqslant T}\|f^{(i,k)}(\tau,\ s)\|.$$

Пусть вектор $X_{j+1}=\{x_{j+1},\ x'_{j+1}\}$ приближенных значений искомого решения $x(\tau_{j+1})$ и его производной $x'(\tau_{j+1})$ в точках τ_{j+1} $(j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ вычисляется последовательно по схеме

$$X_{j+1}=S_jX_j+C_j, \tag{7}$$

где

$$S_j=\begin{bmatrix}\Psi(\tau_{j+1},\ \tau_j) & G(\tau_{j+1},\ \tau_j)\\ \dfrac{\partial}{\partial\tau_{j+1}}\Psi(\tau_{j+1},\ \tau_j) & \dfrac{\partial}{\partial\tau_{j+1}}G(\tau_{j+1},\ \tau_j)\end{bmatrix},$$

$$C_j=\{c_{1j},\ c_{2j}\},$$

$$c_{1j}=h_j\sum_{k=1}^{m}A_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})[\Phi_{kj}+F_{kj}],$$

$$c_{2j}=h_j\sum_{k=1}^{m}B_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})[\Phi_{kj}+F_{kj}].$$

Теорема 1. *Пусть в алгоритме (7) матрица S_j и вектор C_j вычисляются точно для $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Тогда для вектора погрешностей $\Delta X_j=\{\|x(\tau_j)-x_j\|,\ \|x'(\tau_j)-x'_j\|\}$ решения системы (1) справедлива оценка*

$$\Delta X_j\leqslant e^{A\tau_j}(\Delta X_0+\tau_j d)\quad(j=0,\ 1,\ \ldots,\ N+1),$$

где

$$A=\begin{bmatrix}\|\Psi^{(2,0)}\|h & \|G^{(1,0)}\|\\ \|\Psi^{(2,0)}\| & \|G^{(2,0)}\|\end{bmatrix},\ d=\{d_1,\ d_2\},$$

$$d_1=a(\|\varepsilon\|+\|\tilde{\varepsilon}\|)+c_1h^{\nu_1},$$

$$d_2=b(\|\varepsilon\|+\|\tilde{\varepsilon}\|)+c_2h^{\nu_2},\ h=\max_j h_j.$$

Пусть коэффициенты квадратурных формул (6) вычисляются с погрешностями α_{kj} и $\tilde{\alpha}_{kj}$, т. е.

$$A_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})=A_{kj}+\alpha_{kj},\ B_{kj}(\tau_j,\ \tau_{j+1})=B_{kj}+\tilde{\alpha}_{kj}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ N).$$

На практике S_j также будут находиться неточно:

$$S_j=L_j+\mathrm{B}_j,$$

где

$$L_j = \begin{bmatrix} \Psi_{0j} & G_{0j} \\ \Psi_{1j} & G_{1j} \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} \beta_{0j} & \tilde{\beta}_{0j} \\ \beta_{1j} & \tilde{\beta}_{1j} \end{bmatrix} h_j$$

есть соответственно приближенное значение матрицы S_j и погрешность ее вычисления.

Рассмотрим вычислительную схему

$$X_{j+1} = L_j X_j + g_j, \tag{8}$$

в которой вектор-столбец $g_j = \{g_{1j}, g_{2j}\}$ имеет такие же элементы, как и вектор C_j, но только $A_{kj}(\tau_j, \tau_{j+1})$ и B_{kj} (τ_j, τ_{j+1}) заменены на приближенные A_{kj} и B_{kj}.

Будем считать, что погрешности $\|\beta_{kj}\|$ и $\|\tilde{\beta}_{kj}\|$ при $k=0$, 1 и $j=0$, 1, 2, ..., N оцениваются некоторой величиной $\|\beta\|$. Пусть также выполняются неравенства $\|\alpha_{kj}\| \leqslant \|\alpha\|$ и $\|\tilde{\alpha}_{kj}\| \leqslant \|\alpha\|$.

Теорема 2. *Пусть приближенное решение задачи Коши (1) находится по алгоритму (8). Тогда для вектора погрешности ΔX_j справедлива оценка*

$$\Delta X_j \leqslant e^{(A + \|\beta\| I)\tau_j} (\Delta X_0 + \tau_j V) \; (j = 0, 1, \ldots, N+1),$$

где

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

$$v_1 = c_1 h^{\nu_1} + mc_3 \|\alpha\| + c_4 \|\beta\| + (a + m\|\alpha\|)(\|\varepsilon\| + \|\tilde{\varepsilon}\|),$$

$$v_2 = c_2 h^{\nu_2} + mc_3 \|\alpha\| + c_4 \|\beta\| + (b + m\|\alpha\|)(\|\varepsilon\| + \|\tilde{\varepsilon}\|),$$

c_i— константы.

Заметим, что константы c_1 и c_2 определяются применяемыми квадратурными формулами (6), т. е. гладкостью решения $\Phi(s)$ интегрального уравнения (5) и правой части $F(s)$, а c_3 и c_4— известными функциями, входящими в систему (1), и начальными условиями.

Summary

Algorithms for numerical solution of the Cauchy problem for linear second-order integro-differential, equations of the Volterra type are composed, and the errors are estimated.

Литература

[1] Белоцерковский С. М.— ДАН СССР, 1972, т. 207, № 3, с. 557—559. [2] Астапов И. С., Белоцерковский С. М., Качанов Б. О., Кочетков Ю. Л.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 9, с. 1628—1637. [3] Янович Л. А., Денисенко Н. В.— ДАН БССР, 1982, т. 26, № 12, с. 1065—1068. [4] Денисенко Н. В., Янович Л. А.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 5, с. 879—892.

Институт математики
АН БССР

Поступило 22.03.83