Доклады Академии наук БССР

1985 Том XXIX № 9

УДК 519.642.2:519.246.25

М. В. ЧАЙКОВСКИЙ, Л. А. ЯНОВИЧ

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АЭРОУПРУГОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ПРАВОЙ ЧАСТИ

(Представлено академиком АН БССР В. И. Крыловым)

Рассмотрим задачу Коши для системы

$$\mu[x''(\tau)+2\varkappa p x'(\tau)+p^2 x(\tau)]-\Phi(\tau)=F(\tau)+\xi(\tau) \qquad (1)$$

с детерминированными начальными условиями $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$, где

$$\Phi(\tau)=C_0 x(\tau)+C_1 x'(\tau)+\sum_{i=0}^{2}\int_0^{\tau} K_i(\tau-s)\,x^{(i)}(s)\,ds,$$

μ, $\varkappa$, p — постоянные диагональные матрицы; C_0 и C_1 — постоянные, а $K_i(\zeta)$ $(i=0, 1, 2)$ — функциональные квадратные матрицы размерности n; $F(\tau)$ и $\xi(\tau)$ — вектор-столбец соответственно детерминированных и случайных функций.

Уравнением вида (1) является, в частности, уравнение линейной нестационарной аэроупругости со случайным возмущением в правой части [1].

Будем искать ковариационную матрицу решения системы (1) в точках (τ_l, τ_k) квадрата $[0, T]\times[0, T]$ $(\tau_l=lh,\ \tau_k=kh,\ h$ — выбранный шаг, $l, k=0, 1, \ldots, N)$.

Через $K(\tau, s)$, $B(\tau, s)$ и $\varphi(\tau, s)$ обозначим соответственно корреляционные функции процессов $x(\tau)$, $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)=\Phi(\tau)+\xi(\tau)$ в точке (τ, s). Нетрудно показать, что для корреляционной функции решения $x(\tau)$ системы (1) справедливо представление

$$K(\tau_l, \tau_k)=\mu^{-1}\int_0^{\tau_l}\int_0^{\tau_k} G(\tau_l-v)\,\varphi(v, u)\,G(\tau_k-u)\,du\,dv\,\mu^{-1}, \qquad (2)$$

где $\varphi(v, u)$ находится из интегрального уравнения типа Вольтерра

$$\varphi(v, u)=-\int_0^{v}\int_0^{u} D(v-t)\,\varphi(t, s)\,D^T(u-s)\,ds\,dt+$$
$$+\int_0^{v} D(v-t)\,\varphi(t, u)\,dt+\int_0^{u}\varphi(v, s)\,D^T(u-s)\,ds+B(v, u), \qquad (3)$$

а ядра $G(\zeta)$ и $D(\zeta)$ выражаются через заданные матрицы [2, 3].

Введем следующие обозначения:

$$y_{1\nu}(v, u)=\int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} D(v-t)\,\varphi(t, u)\,dt,\ \ d_{1\nu}(v, u)=$$

$$= \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} \int_{\tau_j}^{u} D(v-t)\,\varphi(t, s)\,D^T(u-s)\,ds\,dt,$$

$$y_{2k}(v, u) = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \varphi(v, s)\,D^T(u-s)\,ds, \quad d_{2k}(v, u) =$$

$$= \int_{\tau_i}^{v} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} D(v-t)\,\varphi(t, s)\,D^T(u-s)\,ds\,dt,$$

$$z_{\nu k}(v, u) = \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} D(v-t)\,\varphi(t, s)\,D^T(u-s)\,ds\,dt,$$

$$\sigma_{1j}(\tau) = \tau_j + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\tau - \tau_j), \quad \sigma_{2j} = \tau_j +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\tau - \tau_j), \quad \tau_{1j} = \sigma_{1j}(\tau_{j+1}), \quad \tau_{2j} = \sigma_{2j}(\tau_{j+1})$$

$$(\nu, k, i, j = 0, 1, 2, \ldots, N-1).$$

Представим уравнение (3) в виде

$$\begin{gathered}\varphi(v, u) = -\int_{\tau_i}^{v}\int_{\tau_j}^{u} D(v-t)\,\varphi(t, s)\,D^T(u-s)\,ds\,dt + \\ + \int_{\tau_i}^{v} D(v-t)\,\varphi(t, u)\,dt + \int_{\tau_j}^{u} \varphi(v, s)\,D^T(u-s)\,ds + B(v, u) + \\ + \sum_{\nu=0}^{j-1}[y_{1\nu}(v, u) - d_{1\nu}(v, u)] - \sum_{\nu=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1} z_{\nu k}(v, u) + \\ + \sum_{k=0}^{j-1}[y_{2k}(v, u) - d_{2k}(v, u) \quad (\tau_i < v \leqslant \tau_{i+1}, \ \tau_j < u \leqslant \tau_{j+1}).\end{gathered} \tag{4}$$

Для численного решения интегрального уравнения (3) используем метод последовательного повышения порядка точности, подобный методу из [4]. Приближенные значения функции $\varphi(v, u)$ (обозначим $\varphi^l_{i,j}(v, u)$, где смысл индексов будет пояснен далее), будут находиться по рекуррентным формулам, использующим $\varphi(0, 0) = B(0, 0)$ и значения на начальных слоях, $\varphi(v, 0)$ и $\varphi(0, u)$, которые являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$\varphi(v, 0) = \int_{\tau_i}^{v} D(v-t)\,\varphi(t, 0)\,dt + B(v, 0) + \sum_{\nu=0}^{i-1} y_{1\nu}(v, 0), \tag{5}$$

$$\varphi(0, u,) = \int_{\tau_j}^{u} \varphi(0, s)\,D^T(u-s)\,ds + B(0, u) + \sum_{k=0}^{j-1} y_{2k}(0, u). \tag{6}$$

Приближенные решения уравнений (5) и (6) (обозначим $\varphi^l_{i,-1}(v, 0)$ и $\varphi^l_{-1,j}(0, u)$ соответственно) находим по алгоритму из [4], считая $\varphi^3_{-1,-1}(0, 0) = B(0, 0)$.

I. Алгоритм нахождения $\varphi^l_{i,-1}(v, 0)$ $(l = 0, 1, 2, 3;\ i = 0, 1, \ldots, N)$:

$$\varphi^0_{i,-1}(v,\ 0) = (v-\tau_i)D(v-\tau_i)\,\varphi^3_{i-1,1}(\tau_i,\ 0) + \sum_{\nu=0}^{i-1} \tilde{y}^1_{\nu,-1}(v,\ 0) + B(v,\ 0),$$

$$\varphi^1_{i,-1}(v,\ 0) = \frac{v-\tau_i}{2} B^0_{i,-1}(\tau_i,\ v;\ v,\ 0) + \sum_{\nu=0}^{i-1} \tilde{y}^1_{\nu,-1}(v,\ 0) + B(v,\ 0),$$

$$\varphi^m_{i,-1}(v,\ 0) = \frac{v-\tau_i}{2} B^{m-1}_{i,-1}(\sigma_{1i}(v), \sigma_{2i}(v);\ v,\ 0) + \sum_{\nu=0}^{i-1} \tilde{y}^1_{\nu,-1}(v,\ 0) + B(v,\ 0), \tag{7}$$

где $m = 2,\ 3$,

$$B^l_{i,j}(t_1,\ t_2;\ v,\ u) = D(v-t_1)\,\varphi^l_{i,j}(t_1,\ u) + D(v-t_2)\,\varphi^l_{i,j}(t_2,\ u),$$

$$\tilde{y}^1_{i,j}(v,\ u) = \frac{h}{2} B^3_{i,j}(\tau_{1i},\ \tau_{2i};\ v,\ u)\quad (j = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

II. Алгоритм нахождения $\varphi^l_{-1,j}(0,\ u)$ $(l = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$:

$$\varphi^0_{-1,j}(0,\ u) = (u-\tau_i)\,\varphi^3_{-1,j-1}(0,\ \tau_j)\,D^T(u-\tau_j) + \\ + \sum_{k=0}^{j-1} \tilde{y}^2_{-1,k}(0,\ u) + B(0,\ u),$$

$$\varphi^1_{-1,j}(0,\ u) = \frac{u-\tau_j}{2} C^0_{-1,j}(\tau_j,\ u;\ 0,\ u) + \\ + \sum_{k=0}^{j-1} \tilde{y}^2_{-1,k}(0,\ u) + B(0,\ u),$$

$$\varphi^m_{-1,j}(0,\ u) = \frac{u-\tau_j}{2} C^{m-1}_{-1,j}(\sigma_{1j}(u),\ \sigma_{2j}(u);\ 0,\ u) + \\ + \sum_{k=0}^{j-1} \tilde{y}^2_{-1,k}(0,\ u) + B(0,\ u), \tag{8}$$

где $m = 2,\ 3$,

$$C^l_{i,j}(t_1,\ t_2;\ v,\ u) = \varphi^l_{i,j}(v,\ t_1)\,D^T(u-t_1) + \varphi^l_{i,j}(v,\ t_2)\,D^T(u-t_2),$$

$$\tilde{y}^2_{i,j}(v,\ u) = \frac{h}{2} C^3_{i,j}(\tau_{1j},\ \tau_{2j};\ v,\ u)\quad (i = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

$\tilde{y}^1_{\nu,-1}(v,\ 0)$ и $\tilde{y}^2_{-1,k}(0,\ u)$ являются приближенными значениями функций $y_{1\nu}(v,\ 0)$ и $y_{2k}(0,\ u)$ соответственно и вычисляются по формуле (5) из [4] рекуррентно с использованием известного начального значения $B(0,\ 0)$.

III. Алгоритм нахождения $\varphi^l_{i,j}(v,\ u)$ $(l = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$:

$$\varphi^0_{i,j}(v,\ u) = -(v-\tau_i)(u-\tau_j)\,D(v-\tau_i)\,\varphi^3_{i-1,\ j-1}(\tau_i,\ \tau_j)\,D^T(u-\tau_j) + \\ + (v-\tau_i)\,D(v-\tau_i)\,\varphi^3_{i-1,\ j}(\tau_i,\ u) + (u-\tau_j)\,\varphi^3_{i,\ j-1}(v,\ \tau_j)\,D^T(u-\tau_j) + A_{ij}(v,\ u),$$

$$\varphi^1_{i,j}(v,\ u) = -\frac{(v-\tau_i)(u-\tau_j)}{4} E^0_{i,j}(\tau_i,\ v;\ \tau_j,\ u) + \\ + \frac{v-\tau_i}{2} B^0_{i,j}(\tau_i,\ v;\ v,\ u) + \frac{u-\tau_j}{2} C^0_{i,j}(\tau_j,\ u;\ v,\ u) + A_{ij}(v,\ u),$$

$$\varphi^m_{i,j}(v, u) = -\frac{(v-\tau_i)(u-\tau_j)}{4} E^{m-1}_{i,j}(\sigma_{1i}(v), \sigma_{2i}(v); \quad \sigma_{1j}(u), \sigma_{2j}(u)) +$$

$$+ A_{ij}(v, u) + \frac{v-\tau_i}{2} B^{m-1}_{i,j}(\sigma_{1i}(v), \sigma_{2i}(v); \quad v, u) +$$

$$+ \frac{u-\tau_j}{2} C^{m-1}_{i,j}(\sigma_{1j}(u), \sigma_{2j}(u); \quad v, u), \tag{9}$$

где $m = 2, 3$,

$$E^l_{i,j}(t_1, t_2; t_3, t_4) = D(v-t_1)[\varphi^l_{i,j}(t_1, t_3) D^T(u-t_3) + \varphi^l_{i,j}(t_1, t_4) D(u-t_4)] +$$

$$+ D(v-t_2)[\varphi^l_{i,j}(t_2, t_4) D^T(u-t_4) + \varphi^l_{i,j}(t_2, t_3) D^T(u-t_3)],$$

$$A_{ij}(v, u) = -\sum_{\nu=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1} \tilde{z}_{\nu k}(v, u) + \sum_{\nu=0}^{i-1} [\tilde{y}^1_{\nu,j}(v, u) - \tilde{d}^1_{\nu,j}(v, u)] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} [\tilde{y}^2_{i,k}(v, u) - \tilde{d}^2_{i,k}(v, u)] + B(v, u),$$

$$\tilde{z}_{\nu k}(v, u) = \frac{h^2}{4} E^3_{\nu,k}(\tau_{1\nu}, \tau_{2\nu}; \quad \tau_{1k}, \tau_{2k}),$$

$$\tilde{d}^1_{\nu,j}(v, u) = \frac{h(u-\tau_j)}{4} E^3_{\nu,j}(\tau_{1\nu}, \tau_{2\nu}; \quad \sigma_{1j}(u), \sigma_{2j}(u)),$$

$$d^2_{i,k}(v, u) = \frac{h(v-\tau_i)}{4} E^3_{i,k}(\sigma_{1i}(v), \sigma_{2i}(v); \quad \tau_{1k}, \tau_{2k}).$$

Алгоритм (9) получается, если интегралы, не входящие под знаки сумм, заменить последовательно по формулам левых прямоугольников, трапеции и по формуле (5) из [4], вместо функции $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ подставить соответствующие приближения и отбросить остаточные члены. Введем обозначение: $r_{ij} = \|\varphi(v, u) - \varphi^3_{i,j}(v, u)\|$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть функции $B(v, u)$, $D(\zeta)$, $G(\zeta)$ вычисляются точно. Тогда для погрешности алгоритма (7)—(9) верна оценка $r_{ij} \leqslant \{\gamma \exp[TP]\} h^4$, где γ, P — постоянные, определяемые используемыми квадратурными формулами и известными величинами уравнения (1).*

Приближенное значение K_{lk} корреляционной функции $K(\tau_l, \tau_k)$ в точке (τ_l, τ_k) вычислим по следующему алгоритму:

$$K_{lk} = \mu^{-1}\sum_{\nu=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{k-1} \frac{h^2}{4} \{G(\tau_l - \tau_{1\nu})[\varphi^3_{\nu,m}(\tau_{1\nu}, \tau_{1m}) G(\tau_k - \tau_{1m}) +$$

$$+ \varphi^3_{\nu,m}(\tau_{1\nu}, \tau_{2m}) G(\tau_k - \tau_{2m})] + G(\tau_l - \tau_{2\nu})[\varphi^3_{\nu,m}(\tau_{2\nu}, \tau_{1m}) G(\tau_k - \tau_{1m}) +$$

$$+ \varphi^3_{\nu,m}(\tau_{2\nu}, \tau_{2m}) G(\tau_k - \tau_{2m})]\} \mu^{-1}. \tag{10}$$

Введем далее обозначение $\varepsilon_{lk} = \|K(\tau_l, \tau_k) - K_{lk}\|$. Верна

Теорема 2. *Для погрешности ε_{lk} корреляции решения уравнения (1), найденной по алгоритму (10), где $\varphi^3_{\nu,k}(\zeta_1, \zeta_2)$ вычисляются по формулам (7)—(9), верна оценка $\varepsilon_{lk} = O(h^4)$.*

Summary

The numerical method of finding the correlation function for solution of aeroelasticity integro-differential equations is constructed, and the error estimation is given.

Литература

1. Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В. Введение в аэроавтоупругость.— М.: Наука, 1980.—363 с. 2. Денисенко Н. В., Янович Л. А. —ДУ, 1983, т. 19, № 5, с. 879—892. 3. Янович Л. А., Денисенко Н. В.— ДАН БССР, 1982, т. 26, № 12, с. 1065—1068. 4. Янович Л. А.— ДАН БССР, 1984, т. 28, № 4, с. 293—296.

Институт математики АН БССР *Поступило 13.07.84*