

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Практикум

*Рекомендовано
учебно-методическим объединением
по химико-технологическому образованию
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования
по химико-технологическим специальностям*

Минск 2023

УДК 621.01:531.8(076.5)

ББК 30.12я73

П75

А в т о р ы:

*Е. И. Кордикова, Г. М. Хвесько, Р. Н. Ласовский,
А. Л. Наркевич, А. О. Шошин*

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра математических методов в строительстве
Белорусского национального технического университета
(заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук,
доцент *С. В. Чернявская*);

заместитель начальника Университета гражданской
защиты МЧС Республики Беларусь по научной и инновационной
деятельности кандидат физико-математических наук,
доцент *А. Н. Камлюк*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или ее части не может быть осуществлено без разрешения учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет».

Прикладная механика. Практикум : учеб.-метод. пособие для студентов химико-технологических специальностей / Е. И. Кордикова [и др.]. – Минск : БГТУ, 2023. – 110 с.
ISBN 978-985-897-068-0.

В учебно-методическом пособии рассмотрены основы теоретической механики и сопротивления материалов: плоская произвольная система сил, балочные системы, кинематика и динамика, растяжение и сжатие, изгиб, кручение, приведены индивидуальные задания и примеры решения основных задач. Набор расчетных схем и исходных данных позволяет скомпоновать различные варианты заданий. В приложение включен необходимый для расчетов справочный материал.

УДК 621.01:531.8(076.5)

ББК 30.12я73

ISBN 978-985-897-068-0

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2023

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прикладная механика – комплексная дисциплина, являющаяся основой общетехнической подготовки инженеров химико-технологического профиля. Эта дисциплина является связующим звеном между общеобразовательными (физика, математика и др.) и специальными дисциплинами.

Представленное учебно-методическое пособие дает возможность лучше организовать самостоятельную работу студентов на практических занятиях и при выполнении расчетно-проектировочных работ по индивидуальным заданиям.

Практикум поделен на разделы в соответствии с учебной программой дисциплины.

Тематический раздел «*Статика*» знакомит с условиями равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Раздел «*Сопротивление материалов*» рассматривает вопросы расчета элементов конструкций на прочность и жесткость при растяжении (сжатии), изгибе, кручении.

В разделе «*Кинематика*» изучается движение механических систем с геометрической точки зрения, без учета сил, вызывающих это движение и изменение движения.

Раздел «*Динамика*» рассматривает движение материальных тел, объектов и механических систем с учетом сил, вызывающих это движение.

Каждый раздел пособия поделен на связанные структурные элементы, включающие теоретические сведения, индивидуальное задание, варианты исходных данных к нему, пример решения задачи.

В приложениях пособия содержатся все необходимые справочные данные, которые могут потребоваться для решения задач.

Перед выполнением расчетно-проектировочных работ студент должен **ОБЯЗАТЕЛЬНО** ознакомиться с требованиями к выполнению и оформлению работ.

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ

1. Студент выполняет необходимое количество заданий в соответствии с шифром, который задается преподавателем каждому студенту индивидуально. Число задач в расчетно-проектировочных работах (РПР) определяется программой дисциплины для каждой специальности.

2. Расчетно-проектировочная работа выполняется на белой бумаге формата А4 (297×210 мм) *на одной стороне листа*. Сдается скрепленной *в скоросшивателе*.

3. Титульный лист оформляется согласно образцу, приведенному в прил. 1.

4. Каждая работа должна включать следующие структурные элементы:

а) *тему задания и полное условие задачи* с исходными данными;

б) *схему*, для которой проводится решение с обязательным **указанием на ней числовых значений всех величин**, необходимых для расчета; если на эскизе производятся дополнительные построения, то в тексте работы обязательно должны быть даны соответствующие пояснения;

в) *решение* должно **обязательно сопровождаться краткими пояснениями** без сокращения слов и с выделением основных этапов расчета. При выполнении этого пункта следует все расчетные формулы написать сначала в общем (буквенном) виде, а затем вместо букв проставить их числовые значения в Международной системе единиц (СИ) и записать конечный результат **с указанием его размерности**;

г) все вычисления производятся *в десятичных дробях*, количество значащих цифр после запятой должно соответствовать точности расчета (обычно достаточно двух);

д) *заключение*, в котором приводятся и обосновываются результаты расчетов.

РАБОТЫ, ОФОРМЛЕННЫЕ НЕ В СООТВЕТСТВИИ С УКАЗАННЫМИ ТРЕБОВАНИЯМИ, ВОЗВРАЩАЮТСЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕМ БЕЗ ПРОВЕРКИ.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Терминология и обозначение величин, представляемых в пособии, приняты в соответствии с действующими стандартами и рекомендациями Международного комитета по стандартизации (ISO). Основные величины, используемые в прикладной механике, и их единицы измерения представлены в табл. 1.

Таблица 1
**Основные геометрические и физические величины
и их единицы измерения (СИ)**

Величины		Размерность
Наименование	Обозначение	
Длина, расстояние	l, a, b, c	м
Ширина, высота, диаметр поперечного сечения	b, h, d	м
Горизонтальная / вертикальная ось поперечного сечения; продольная ось бруса	$x / y, z$	—
Площадь поперечного сечения	A	м ²
Статические моменты сечения	S_x, S_y	м ³
Момент инерции фигуры (сечения) при вращении	J_z	м ⁴
Моменты инерции сечения: осевые / полярный	$I_x, I_y / I_p$	м ⁴
Моменты сопротивления сечения: осевые / полярный	$W_x, W_y / W_p$	м ³
Внешняя сосредоточенная сила	F	Н
Реакция в отброшенной связи	R, X, Y	Н
Внутренняя продольная сила	N	Н
Внутренние поперечные силы	Q_x, Q_y	Н
Внешний сосредоточенный момент, пара сил	M	Н · м
Внешний крутящий момент	T	Н · м
Внутренний крутящий момент	$M_{кр}$	Н · м
Внутренние изгибающие моменты	M_x, M_y	Н · м
Интенсивность распределенной внешней нагрузки	q	Н/м
Напряжение нормальное / касательное	σ / τ	Па = Н/м ²
Допускаемое напряжение: нормальное / касательное	$[\sigma] / [\tau]$	Па = Н/м ²

Окончание табл. 1

Величины		Размерность
Наименование	Обозначение	
Модуль упругости при растяжении (модуль Юнга) / при сдвиге	E / G	Па = Н/м ²
Перемещение линейное, мм	δ	м
Абсолютная продольная деформация	Δl	м
Угол поворота поперечного сечения	φ	рад
Относительный угол закручивания	θ	рад/м
Траектория движения точки, путь	S	м
Скорость точки	v	м/с
Ускорение точки; нормальное ускорение, касательное ускорение	a, a_n, a_τ	м/с ²
Время	t	с
Кинетическая энергия	T	Дж
Работа	A	Дж
Угловая скорость	ω	рад/с
Угловое ускорение точки	ε	рад/с ²

Векторные величины обозначают полужирным шрифтом с прямым написанием (например, **F**), а модуль этой величины – той же буквой, но светлой и курсивом (например, *F*).

При подстановке численных значений физических величин в расчетные формулы необходимо помнить, что *они должны быть выражены в единицах СИ* (табл. 1).

Таблица 2

Приставки и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка		Обозначение	
	русская	международная	русское	международное
10^9	гига	Giga	Г	G
10^6	мега	Mega	М	M
10^3	кило	kilo	к	k
10^{-2}	санти	centi	с	с
10^{-3}	милли	milli	м	m

В рамках выполнения расчетно-проектировочных работ студенты зачастую сталкиваются с трудностями перевода единиц измерения высоких порядков. Необходимо знать приставки перед основными единицами и множитель, который соответствует этой приставке (табл. 2).

1. СТАТИКА

1.1. Основные теоретические сведения

Статика – раздел теоретической механики, в котором изучается равновесие тел под действием системы сил. Все тела в статике считаются абсолютно твердыми, т. е. не деформируются (не меняют свою форму) под действием нагрузок и находятся в равновесии.

Когда на тело действуют больше трех сил или направление некоторых сил неизвестно, при решении задач чаще используют *аналитическое условие равновесия*, которое основано на *методе проекций* (рис. 1).

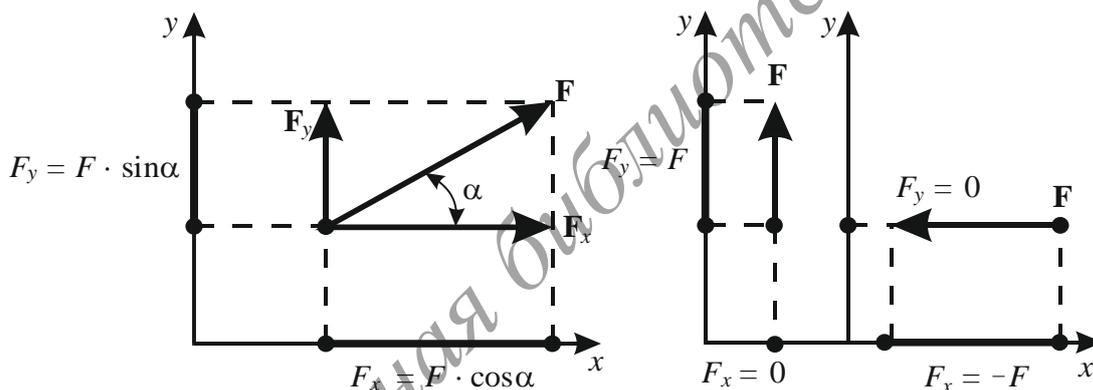


Рис. 1. Метод проекций сил на оси

Проекция силы на ось есть величина алгебраическая, которая может быть положительной или отрицательной, что устанавливается ее направлением (направление от проекции начала к проекции конца вектора силы).

Правило знаков: если направление проекции силы на ось координатной системы совпадает с направлением этой оси, то проекция считается *положительной*, и наоборот (рис. 1).

Если вектор силы параллелен оси, то он проецируется на эту ось в *натуральную величину*. Если вектор силы перпендикулярен оси, то его проекция на эту ось равна *нулю* (рис. 1).

В статике рассматриваются *свободные* и *несвободные* тела. Любое ограничение, наложенное на перемещение тела в пространстве, называется *связью*. Сила, с которой связь действует на тело, называется *реакцией связи*.

Различают следующие типы связей (типы опор).

1. *Несомый стержень* – стержень, закрепленный по концам шарнирами. Реакция такого стержня (\mathbf{R}) является определенной и направлена *вдоль линии, соединяющей центры шарниров* (рис. 2).

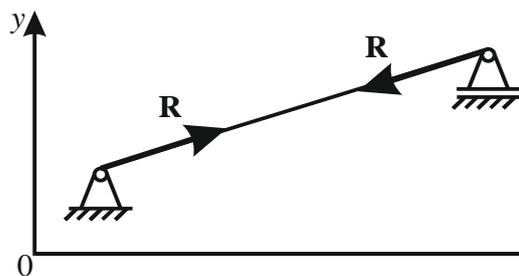


Рис. 2. Несомый стержень

2. *Шарнирно-подвижная опора* (подвижный шарнир) – ограничивает поступательное перемещение в одном направлении, но не ограничивает в другом, перпендикулярном первому, и не ограничивает вращательное движение относительно точки опоры. Реакция \mathbf{R} подвижного шарнира всегда направлена *перпендикулярно опорной поверхности* (рис. 3).

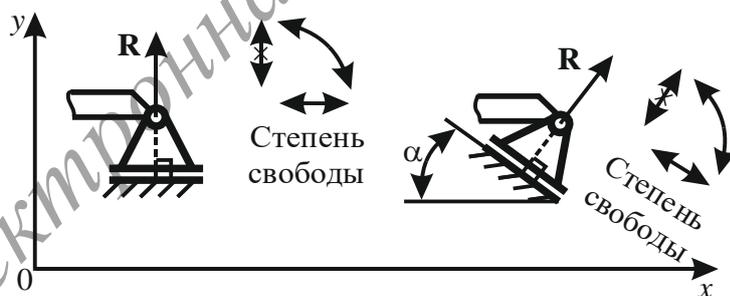


Рис. 3. Шарнирно-подвижная опора

3. *Шарнирно-неподвижная опора* (неподвижный шарнир) – ограничивает поступательное перемещение в проекциях на две взаимно перпендикулярные оси, но не ограничивает вращательное движение относительно точки опоры (рис. 4).

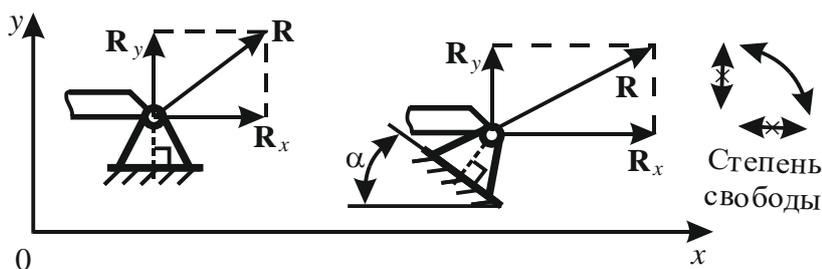


Рис. 4. Шарнирно-неподвижная опора

Реакция \mathbf{R} неподвижного шарнира представляется в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих в проекциях на оси принятой системы координат (\mathbf{R}_x и \mathbf{R}_y).

Модуль R определяется по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1)$$

4. *Защемление* (жесткая заделка) – ограничивает все виды плоского движения по трем степеням свободы: поступательное перемещение в проекциях на две взаимно перпендикулярные оси и вращательное движение (рис. 5).

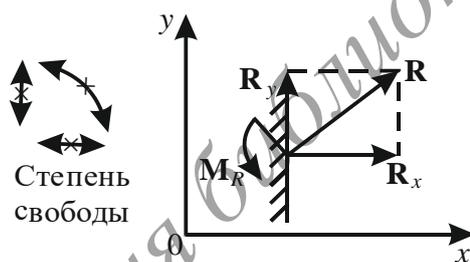


Рис. 5. Жесткая заделка

В защемлении возникает силовая реакция \mathbf{R} и реактивный момент \mathbf{M}_R . Реакция \mathbf{R} представляется в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих в проекциях на оси принятой системы координат (\mathbf{R}_x и \mathbf{R}_y). Модуль R определяется по формуле (1).

Тело под действием приложенной к нему силы может двигаться в некотором направлении и поворачиваться. Вращательный эффект действия силы на тело оценивается *моментом силы* относительно выбранной точки.

Моментом силы \mathbf{F} относительно точки называется, взятое с соответствующим знаком, произведение величины силы на кратчайшее расстояние (плечо) h от точки до линии действия силы:

$$M(\mathbf{F}) = F \cdot h. \quad (2)$$

Момент силы относительно точки является алгебраической величиной.

Правило знаков: произведение берется со знаком *плюс* (рис. 6, *а*), если сила стремится вращать тело вокруг точки против хода часовой стрелки, и со знаком *минус*, если сила стремится вращать тело по ходу часовой стрелки (рис. 6, *б*).

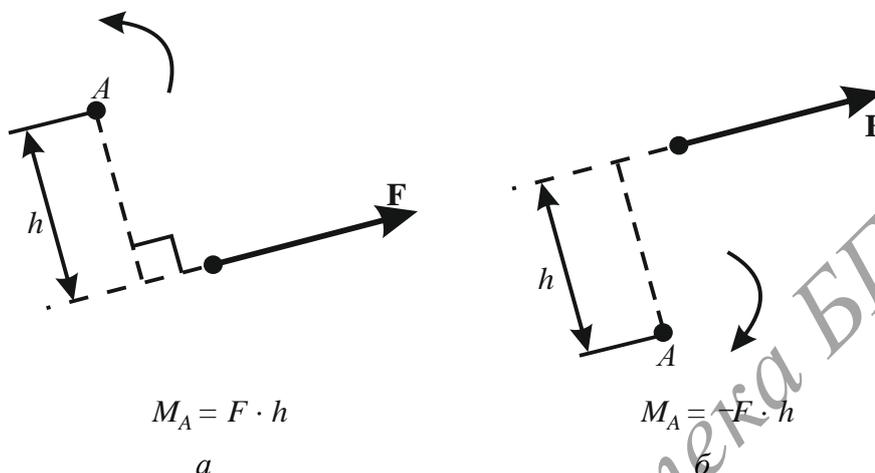


Рис. 6. Правила знаков при определении момента относительно точки (пояснения в тексте)

Свойства момента силы относительно точки

1. Момент силы относительно точки, лежащей на линии действия этой силы, равен нулю, так как в данном случае плечо равно нулю (рис. 7, *а*).

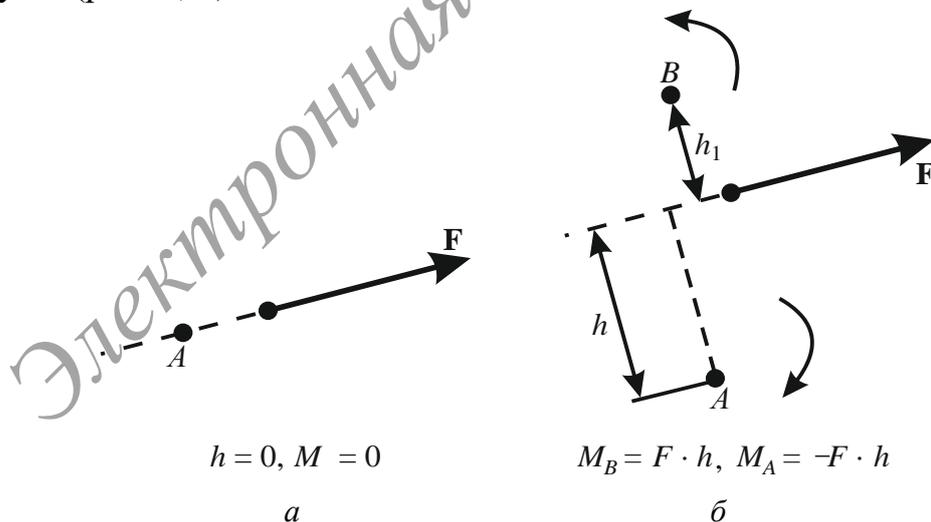


Рис. 7. Свойства момента силы относительно точки (пояснения в тексте)

2. Момент силы относительно точки не меняется при переносе силы вдоль линии ее действия, так как модуль силы и плечо остаются неизменными (см. рис. 7, а, б).

3. Одна и та же сила относительно разных точек может давать и положительный, и отрицательный момент (рис. 7, б).

Пара сил – это две силы, приложенные к одному телу, равные по модулю, параллельные и направленные в разные стороны (рис. 8).

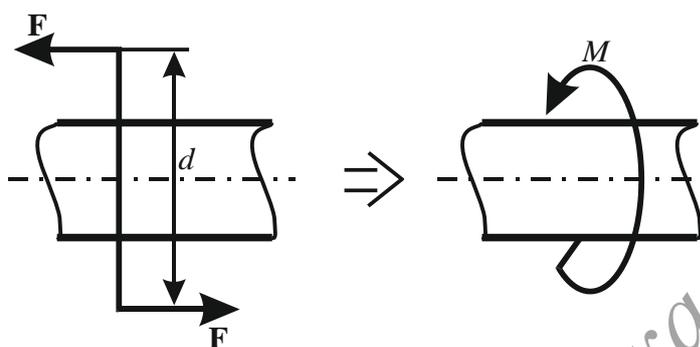


Рис. 8. Понятие пары сил

Действие пары сил на тело оценивается моментом пары сил, который равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары (кратчайшее расстояние между линиями действия этих сил):

$$M = F \cdot d. \quad (3)$$

Свойства пары сил

1. Пара сил *не имеет равнодействующей* (т. е. не может быть уравновешена силой).

2. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару, *относительно любой точки плоскости* действия пары величина постоянная и *равна моменту пары*.

3. Алгебраическая сумма проекций сил пары на ось всегда равна нулю; т. е. пара сил *не входит ни в уравнение сил, ни в уравнение проекций сил*.

4. Пару можно *перемещать* и *поворачивать* как угодно в плоскости ее действия.

5. Чтобы задать пару, достаточно задать ее момент, поэтому пару условно изображают «моментом».

Кроме сосредоточенной силы и пары сил на тело может действовать нагрузка, приложенная на некотором участке, такая нагрузка называется *распределенной* (рис. 9, а, б) и характеризуется

интенсивностью q , которая показывает величину нагрузки, приходящуюся на единицу длины нагруженного участка.

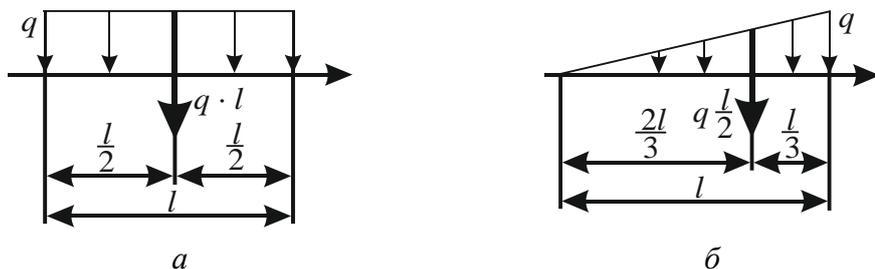


Рис. 9. Виды распределенной нагрузки:
 a – равномерно распределенная; b – неравномерно распределенная

Равнодействующая *равномерно распределенной* нагрузки приложена в середине нагруженного участка ($l / 2$) тела длиной l и характеризуется произведением $q \cdot l$ (рис. 9, a).

Для распределенной нагрузки, интенсивность которой изменяется по линейному закону от нуля до q , равнодействующая обозначается выражением $0,5 \cdot q \cdot l$ и приложена на расстоянии $\frac{2}{3} \cdot l$ от точки нагруженного участка, где $q = 0$ (рис. 9, b).

Для записи момента произвольно направленной силы, сосредоточенной или распределенной, пользуются *теоремой Вариньона*, которая гласит: если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно некоторого центра равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра (рис. 10).

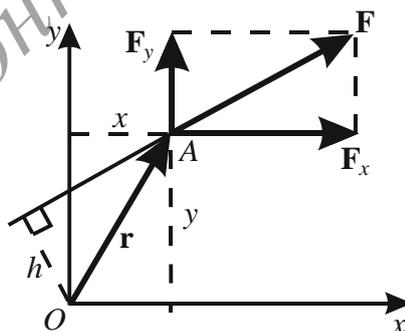


Рис. 10. Теорема Вариньона

Например, момент силы \mathbf{F} относительно точки O (рис. 10) можно определить как алгебраическую сумму моментов сил \mathbf{F}_x

и F_y (на которые можно разложить силу \mathbf{F}) относительно той же точки O :

$$M_O(\mathbf{F}) = -F \cdot h = -F_x \cdot y + F_y \cdot x, \quad (4)$$

где F_x , F_y , x и y – проекции на оси координат силы \mathbf{F} и радиус-вектора \mathbf{r} соответственно.

При записи уравнения пользуются **правилом знаков** для моментов (рис. 6 на с. 10).

Условия равновесия

Под действием внешних нагрузок и реакций в опорах в произвольный момент времени конструкция находится в равновесном состоянии, которое описывается с помощью уравнений равновесия статики.

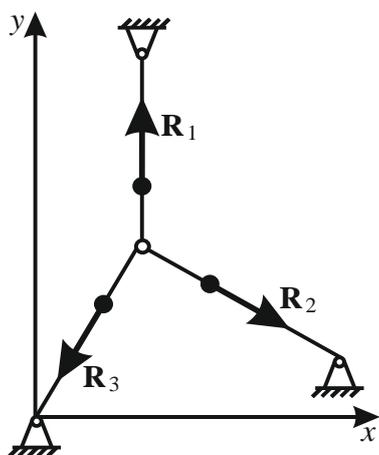


Рис. 11. Плоская система сходящихся сил

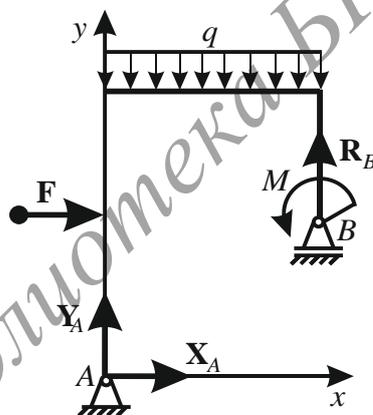


Рис. 12. Плоская произвольная система сил

Для *плоской системы сходящихся сил* (рис. 11) необходимо и достаточно составить два уравнения равновесия в плоской декартовой системе координат – суммы проекций всех сил на оси x и y равны нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (5)$$

Для *плоской системы произвольно расположенных сил* (рис. 12) записывают три уравнения равновесия в плоской декартовой системе координат: суммы проекций всех сил на оси x и y и сумма моментов всех сил относительно произвольной точки системы равны нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_o(\mathbf{F}_k) = 0. \quad (6)$$

1.2. Последовательность решения задач на равновесие тела под действием системы сил

1. Выделить тело (элемент), равновесие которого рассматривается.

2. Выявить все действующие на тело нагрузки (активные силы) и изобразить их на схеме, указав точку приложения, направление действия и числовое значение.

3. Определить тип связей, наложенных на рассматриваемое тело, ввести их буквенное обозначение.

4. Освободить тело от связей, заменив их реакциями (использовать аксиому освобождения от связей) и изобразить эти реакции на схеме.

5. Назвать тип системы сил, приложенной к телу, находящемуся в равновесии (система сходящихся сил или плоская произвольная система сил). В зависимости от типа системы применить соответствующие условия равновесия (5) или (6) и найти неизвестные.

6. Провести проверку правильности определения неизвестных, записав независимое уравнение равновесия для системы.

Индивидуальное задание № 1

Определение реакций опор твердого тела

при воздействии плоской произвольной системы сил

Прямоугольная рама, показанная на рис. 13, высота которой $2 \cdot a$ и ширина $2 \cdot b$, находится в равновесии под действием приложенных к ней сил F_1 , F_2 , моментов M_1 , M_2 и распределенной нагрузки интенсивностью q_1 , q_2 , q_3 , q_4 .

Для всех вариантов заданий геометрические размеры одинаковы: $a = 0,6$ м, $b = 0,5$ м, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\varphi = 60^\circ$.

Значения нагрузок выбирают исходя из заданного преподавателем шифра по табл. 3. Знак «-» в таблице свидетельствует о том, что данная нагрузка на раме отсутствует. Отсутствующие на раме нагрузки не показывают.

Требуется.

Определить реакции связей, наложенных на раму.

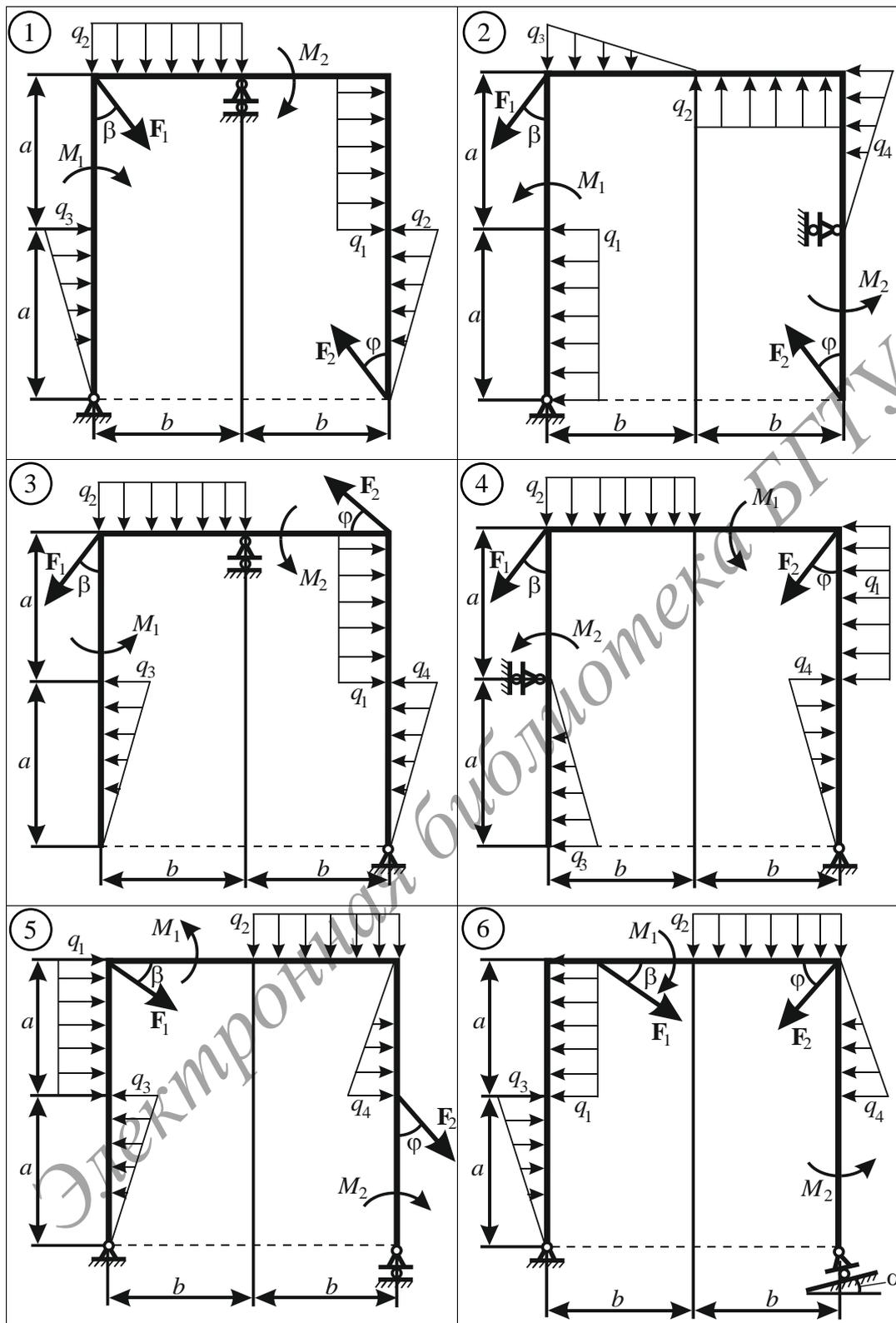


Рис. 13. Плоская произвольная система сил
(начало; продолжение см. на с. 16–17)

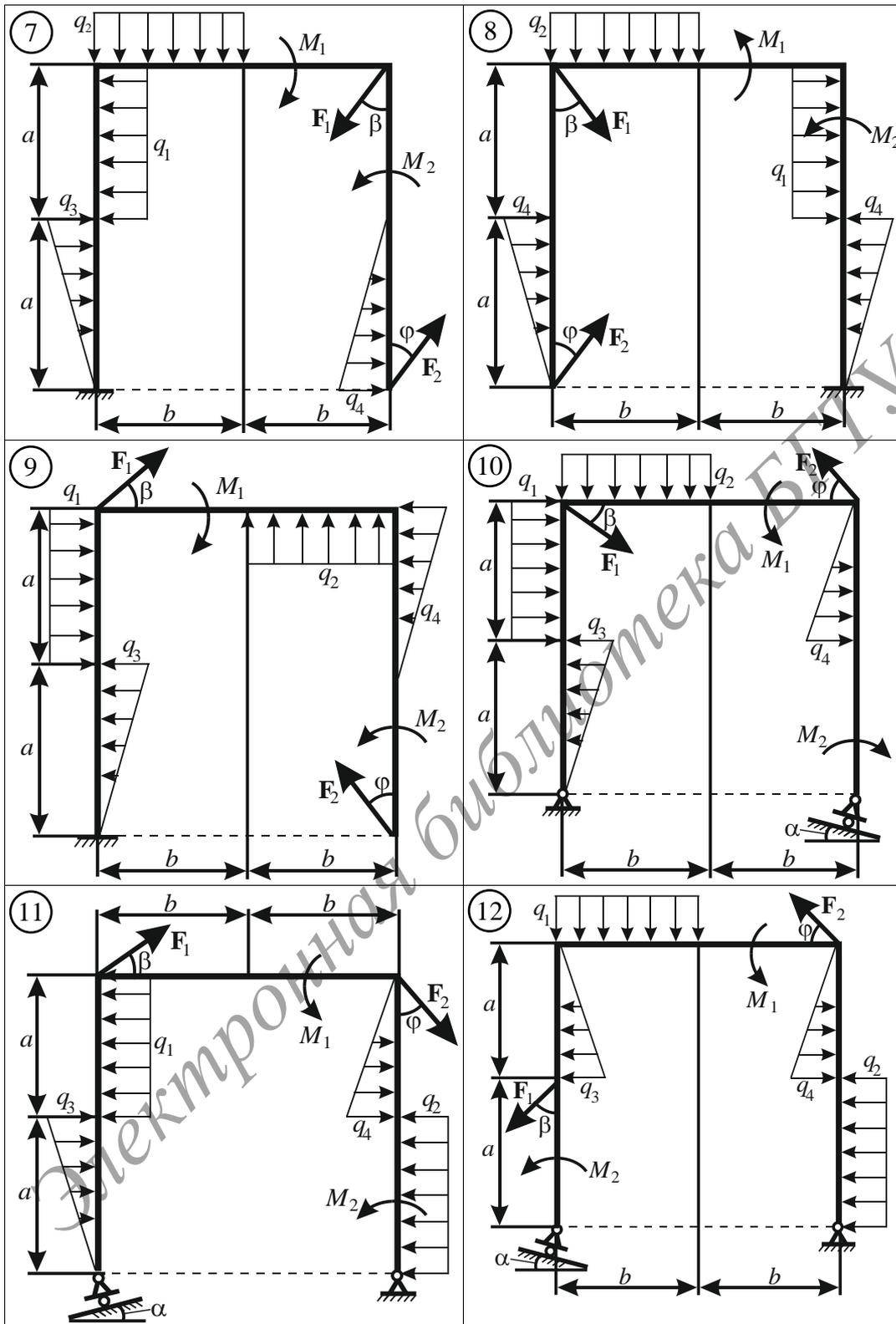


Рис. 13. Плоская произвольная система сил
(продолжение; начало см. на с. 15, окончание на с. 17)

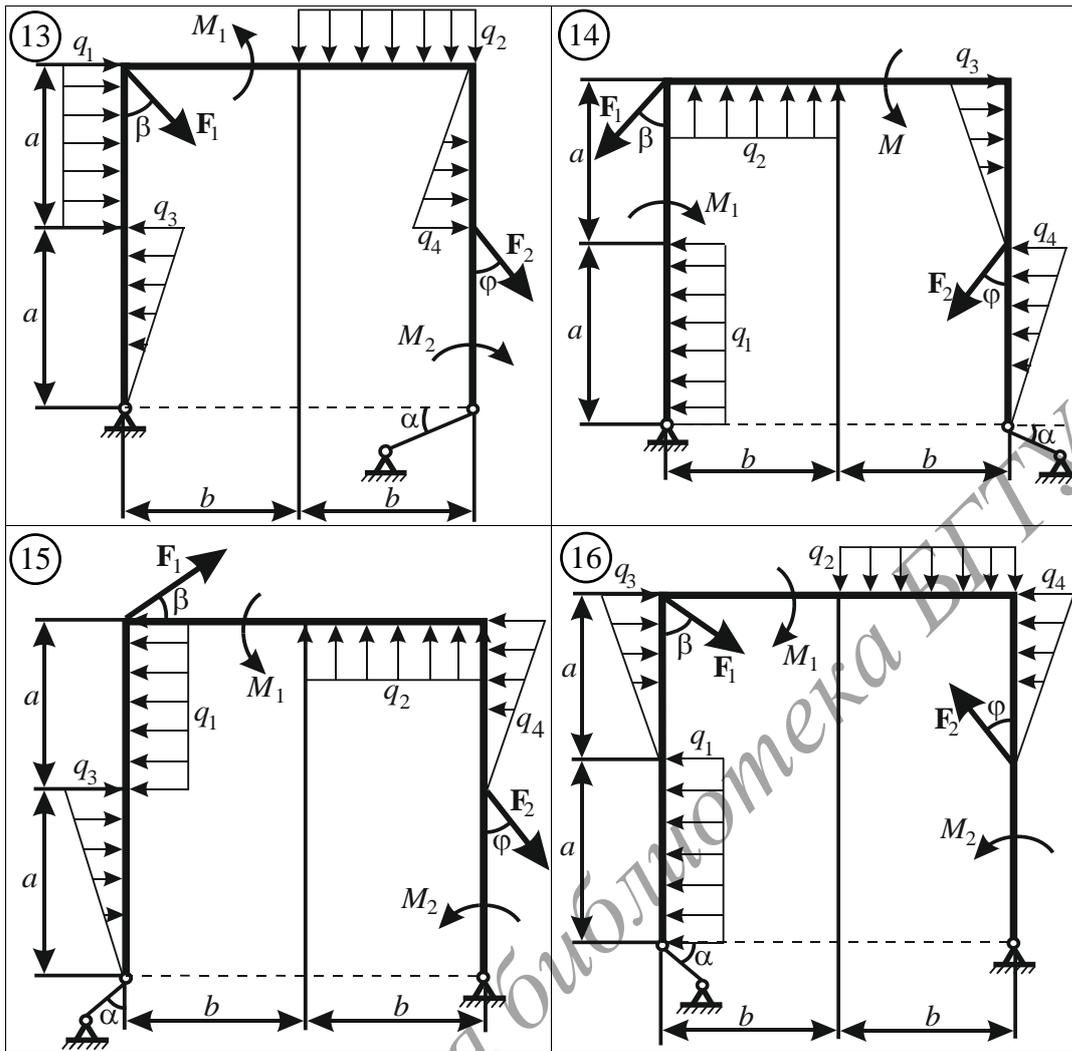


Рис. 13. Плоская произвольная система сил
(окончание, начало см. на с. 15–16)

Таблица 3

Плоская произвольная система сил

Номер строки	F_1 , Н	F_2 , Н	M_1 , Н·м	M_2 , Н·м	q_1 , Н/м	q_2 , Н/м	q_3 , Н/м	q_4 , Н/м
1	100	–	40	–	20	–	30	–
2	100	200	40	–	20	–	30	–
3	100	200	–	50	20	–	30	–
4	100	200	–	50	–	40	30	–
5	100	200	–	50	–	40	–	60
6	100	200	40	–	20	–	–	60
7	–	200	40	–	20	–	–	60
8	–	200	40	–	20	–	30	–
9	100	–	40	–	20	–	–	60

Номер строки	F_1 , Н	F_2 , Н	M_1 , Н·м	M_2 , Н·м	q_1 , Н/м	q_2 , Н/м	q_3 , Н/м	q_4 , Н/м
10	100	200	40	—	20	40	—	—
11	100	—	—	50	20	40	—	—
12	100	—	—	50	20	—	30	—
13	100	—	—	50	20	—	—	60
14	100	—	—	50	—	40	30	—
15	—	200	—	50	—	40	30	—
16	—	200	—	50	—	40	—	60
17	—	200	40	—	20	—	30	—
18	100	—	40	—	20	—	—	60
19	—	200	—	50	20	—	30	—
20	—	200	—	50	20	—	—	60
21	100	—	40	—	—	40	30	—
22	100	—	40	—	—	40	—	60
23	100	—	—	50	20	40	—	—
24	100	—	—	50	20	—	30	—
25	100	—	—	50	20	—	—	60
26	100	200	40	—	20	—	—	—
27	100	200	40	—	20	—	—	60
28	100	200	—	50	20	—	—	60
29	—	200	—	50	—	40	30	—
30	—	200	—	50	—	40	—	60

Пример решения задачи индивидуального задания № 1

Рама, закрепленная в точках A и B , находится в равновесии под действием сил, момента пары сил и распределенной нагрузки (рис. 14, a).

Определить величину реакций связей, если $F_1 = 200$ Н, $F_2 = 400$ Н, $\alpha = 30^\circ$, $\delta = 60^\circ$, $M = 150$ Н·м, $q = 80$ Н/м, $a = 0,6$ м, $b = 0,8$ м.

Решение.

Рассматриваем равновесие рамы. На нее наложены две связи: в точке A – неподвижный цилиндрический шарнир, в точке B – подвижный шарнир.

Покажем направление осей x и y и направление реакций связей: в опоре A – две составляющие реакции X_A , Y_A , направленные по двум взаимно перпендикулярным осям x и y ; в опоре B – одна реакция R_B , направленная перпендикулярно опорной поверхности (см. рис. 14, b). Величина равнодействующей линейно распределенной

нагрузки характеризуется выражением $0,5 \cdot q \cdot l$ и приложена на расстоянии $\frac{2}{3} \cdot l$ от точки нагруженного участка, где $q = 0$ (рис. 9, б).

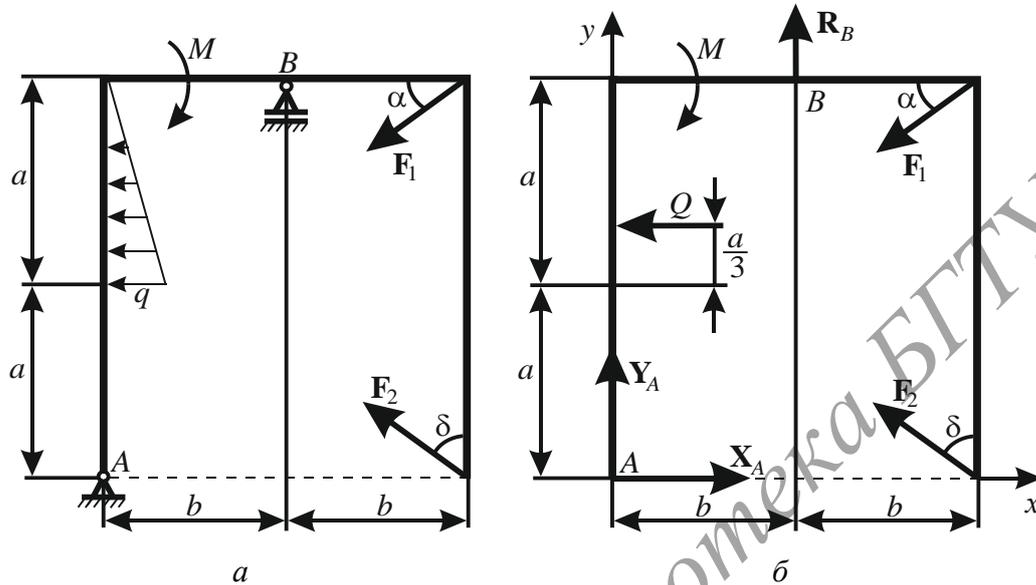


Рис. 14. Схема конструкции (а) и расчетная схема (б)

Приложенные силы образуют плоскую произвольную систему сил. Запишем необходимые уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - 0,5q \cdot a - F_1 \cos \alpha - F_2 \sin \delta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + R_B - F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \delta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\mathbf{F}) = 0;$$

$$0,5q \cdot a \left(a + \frac{a}{3} \right) - M + R_B \cdot b + F_1 \cos \alpha \cdot 2a - F_1 \sin \alpha \cdot 2b + F_2 \cos \delta \cdot 2b = 0.$$

Из уравнений равновесия выразить искомую неизвестную и провести вычисления.

$$X_A = 0,5 \cdot q \cdot a + F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \sin \delta;$$

$$X_A = 0,5 \cdot 80 \cdot 0,6 + 200 \cdot 0,866 + 400 \cdot 0,866 = 543,6 \text{ Н};$$

$$R_B = \frac{-0,5 \cdot q \cdot a \left(a + \frac{a}{3} \right) + M - F_1 \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot a + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot 2 \cdot b - F_2 \cdot \cos \delta \cdot 2 \cdot b}{b};$$

$$R_B = \frac{0,5 \cdot 80 \cdot 0,6 \cdot 0,8 - 150 + 200 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 0,6}{0,8} - \frac{200 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,8 + 400 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,8}{0,8} = -296,3 \text{ Н};$$

$$Y_A = -R_B + F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \cos \delta;$$

$$Y_A = 296,3 + 200 \cdot 0,5 - 400 \cdot 0,5 = 196,3 \text{ Н}.$$

Знак «-» для реакции R_B означает, что правильное направление противоположное, при этом модуль реакции остается без изменения.

Для проверки правильности определения реакций составим уравнение моментов всех нагрузок относительно опоры B .

$$\sum_{k=1}^n m_B(\mathbf{F}) = 0;$$

$$X_A \cdot 2a - Y_A \cdot b - 0,5q \cdot a \cdot \frac{2}{3}a - M - F_1 \sin \alpha \cdot b + F_2 \cos \delta \cdot b - F_2 \sin \delta \cdot 2a = 543,6 \cdot 2 \cdot 0,6 - 196,3 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 80 \cdot 0,6 \cdot 0,67 \cdot 0,6 - 150 - 200 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 400 \cdot 0,5 \cdot 0,8 - 400 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 0,6 = 0.$$

Заключение. В ходе решения задачи на равновесие тела под действием системы сил определили значения реакций в опорах: $X_A = 543,6 \text{ Н}$; $Y_A = 196,3 \text{ Н}$; $R_B = -296,3 \text{ Н}$. Проверка показала правильность проведенных вычислений.

2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

2.1. Основные теоретические сведения

Раздел «Соппротивление материалов» в прикладной механике рассматривает деформируемое тело, способное под действием внешних нагрузок изменять свои размеры и форму (деформироваться) и даже разрушаться.

В этой связи приводятся вопросы расчета на прочность и жесткость элементов конструкции.

Прочность – свойство материалов воспринимать в определенных пределах, не разрушаясь, приложенные к ним нагрузки. Математически этот критерий формулируется с помощью *условия прочности*.

Жесткость – это способность тела или конструкции сопротивляться изменению формы и размеров, вызванных внешней нагрузкой. Математически этот критерий формулируется с помощью *условия жесткости*.

При конструкторском расчете чаще всего пользуются условием прочности, а условие жесткости применяют в качестве проверочного.

Внутренние усилия – силы взаимодействия (сцепления) между частицами тела, возникающие внутри элемента конструкции, как противодействие внешнему нагружению. Именно величиной внутренних усилий определяется возможность разрушения в том или ином опасном сечении элемента конструкции.

Таким образом, для решения задач сопротивления материалов необходимо уметь выявлять, а затем *определять величину и направление внутренних усилий*, при этом используется **метод сечений**.

Произвольное тело, нагруженное внешними силами F_1, F_2, \dots, F_n и находящееся под их действием *в равновесии*, мысленно разрезается в интересующем месте секущей плоскостью (рис. 15, *a*). Отбрасывается наиболее сложно нагруженная часть элемента, действие отброшенной части заменяется распределенными внутренними усилиями.

Если тело находится в равновесии, то в равновесии будет находиться и любая его мысленно рассматриваемая часть под действием внешних сил, приложенных к ней, и *внутренних сил*, возникающих в сечении.

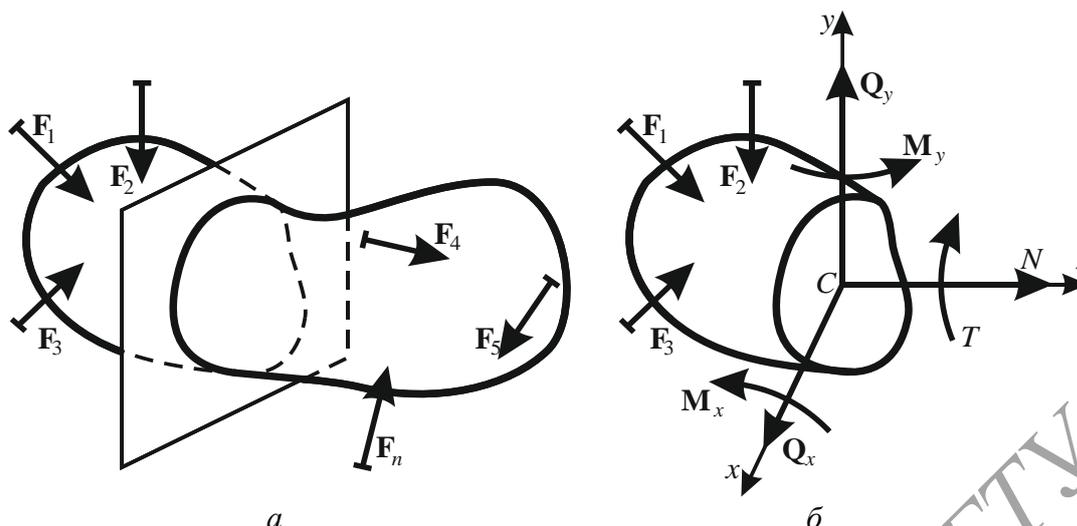


Рис. 15. Метод сечений (пояснения в тексте)

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил к центру тяжести поперечного сечения C . В результате получим главный вектор \mathbf{R} и главный момент \mathbf{m} , разложим по трем взаимно перпендикулярным осям x , y и z (ось z – нормальна к сечению элемента). Полученные составляющие N , Q_y , Q_x и M_x , M_y , $M_{кр}$ называются внутренними силовыми факторами (ВСФ), которые определяются из уравнений равновесия между внутренними и внешними нагрузками, действующими в оставшейся части элемента.

Для элементов конструкции сложной формы и при воздействии большого количества различных видов нагрузок необходимо выполнять несколько сечений и устанавливать характер изменения ВСФ по длине элемента конструкции.

Сечения выполняют для каждого из участков – отрезка между двумя ключевыми точками, которыми могут быть:

- торцы элемента;
- точки приложения сосредоточенных нагрузок (внешние силы, моменты, реакции в опорах);
- начало и конец участка для распределенной нагрузки (положение равнодействующей силы от распределенной нагрузки не является ключевой точкой);
- точки соединения со всеми типами опор;
- места изменения формы элемента (поперечного сечения).

Для определения характера изменения ВСФ по длине элемента конструкции строят эпюры – график изменения ВСФ в направлении

оси бруса. Эпюры отображают величину, характер изменения и знак ВСФ в зависимости от положения сечения на продольной оси элемента конструкции.

Вид эпюры на участке обусловлен уравнением равновесия для этого участка. Анализ эпюры позволяет найти опасные сечения, т. е. то место, в котором возможно разрушение элемента конструкции (образование чрезмерных остаточных деформаций) – как правило, это точки с наибольшими по модулю значениями ВСФ.

Интенсивность действия ВСФ, распределенных по площади сечения, характеризуется величиной напряжений. В поперечном сечении могут возникать два вида напряжений: нормальные и касательные. Нормальное напряжение σ (сигма) – проекция полного напряжения на нормаль к сечению. Касательное напряжение τ (тау) – проекция полного напряжения, лежащая в плоскости сечения.

2.2. Центральное растяжение (сжатие)

Растяжение (сжатие) называется *центральным*, если внешние силы действуют вдоль продольной оси стержня и приложены в центре тяжести сечения. При этом в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N , а прочие внутренние силовые факторы равны нулю.

Продольная сила, соответствующая деформации *растяжения*, принимается *положительной* и направлена от сечения, а *сжатия* – *отрицательной* и направлена к сечению.

При растяжении (сжатии) в каждой точке поперечного сечения стержня возникают только *нормальные* напряжения σ , которые определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (7)$$

где N – продольная сила; A – площадь поперечного сечения.

Условие прочности при центральном растяжении (сжатии) выражает требование, чтобы максимальное расчетное напряжение в стержне не превышало значения допустимого напряжения для материала $[\sigma]$:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]. \quad (8)$$

При расчетах N_{\max} подставляют без учета знаков (растяжение / сжатие), т. е. по модулю.

Исходя из условия прочности проводят проверочные или конструкторские расчеты элементов.

1. Проверка на прочность стержня (проверочный расчет), т. е. определение по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения стержня максимальных напряжений и сравнение их с допускаемыми.

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (9)$$

2. Определение размеров поперечного сечения стержня (конструкторский расчет) по известным нагрузке и допускаемому напряжению:

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}. \quad (10)$$

Из зависимости между площадью и формой поперечного сечения выражают его линейный размер.

Аналогичные задачи можно решать с помощью условия жесткости. Условие жесткости формулируется на основании закона Гука и выражает требование, чтобы расчетное удлинение стержня не превышало допускаемого удлинения $[\Delta l]$:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \leq [\Delta l], \quad (11)$$

где l – длина стержня; E – модуль продольной упругости материала стержня (для стали Ст3 $E = 200$ ГПа).

При проверке жесткости стержня определяется фактическая деформация по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения и сравнивается с допускаемой.

При проектном (конструкторском) расчете определяют размеры поперечного сечения стержня, требуемые из условия жесткости:

$$A \geq \frac{N \cdot l}{E \cdot [\Delta l]}. \quad (12)$$

Вследствие деформации поперечные сечения бруса перемещаются. Перемещение точек – кратчайшее расстояние между крайними

положениями точек до и после деформирования в направлении приложения нагрузки.

Если точка непосредственно не связана с деформируемым элементом, то ее перемещение δ определяется геометрической связью между жесткими и деформируемыми элементами после анализа построенной системы в деформированном состоянии согласно определенным правилам и допущениям. *Правила справедливы только для случая малых деформаций.*

2.2.1. Правила построения системы в деформированном состоянии

1. Показывают схему в исходном состоянии.

2. Под действием внешних сил жесткий брус повернется относительно собственной опоры (точки крепления) в направлении действия результирующего внешнего момента. Показывают новое положение жесткого бруса. При этом необходимо помнить, что жесткий брус не деформируется.

3. Вследствие малости деформаций (перемещений) по отношению к размерам конструкции (принцип неизменности размеров) все точки, принадлежащие жесткому брусу, смещаются *по перпендикулярам* к их исходному положению.

4. Связь перемещений точек, принадлежащих жесткому брусу, определяется из подобия треугольников, две стороны которых являются отрезками бруса в крайних положениях (деформированном и недеформированном), а третья – искомыми перемещениями точек.

5. Деформацию стержня отображают как разность между большей и меньшей длиной стержня в деформированном и исходном состоянии соответственно.

В случае, если стержень расположен под углом к жесткому брусу, предварительно выполняют проецирование стержня меньшей длины на стержень большей длины – удлинение определяется как разность большей длины и проекции меньшей длины.

6. Удлинение стержня геометрически связано с перемещением точек крепления к шарниру или жесткому брусу. Как правило, точки крепления в крайних положениях обуславливают начальную и конечную длину стержня.

Если ось стержня не изменяет своей ориентации, то его удлинение (укорочение) равно смещению точек. При отклонении оси

стержня его удлинение (укорочение) и перемещение точек соотносятся между собой как катет и гипотенуза прямоугольного треугольника.

Рассмотрим некоторые *частные случаи* представления конструкции в деформированном состоянии и запись соотношений между деформацией стержня и перемещением точек.

Жесткий брус AC (рис. 16, а) повернется относительно опоры A по направлению действия момента от силы F на малый угол β . Вследствие малости деформаций (принцип начальных размеров) точки переместятся по перпендикулярам к начальному положению бруса: $BB' \perp AC$; $CC' \perp AC$ (рис. 16, б).

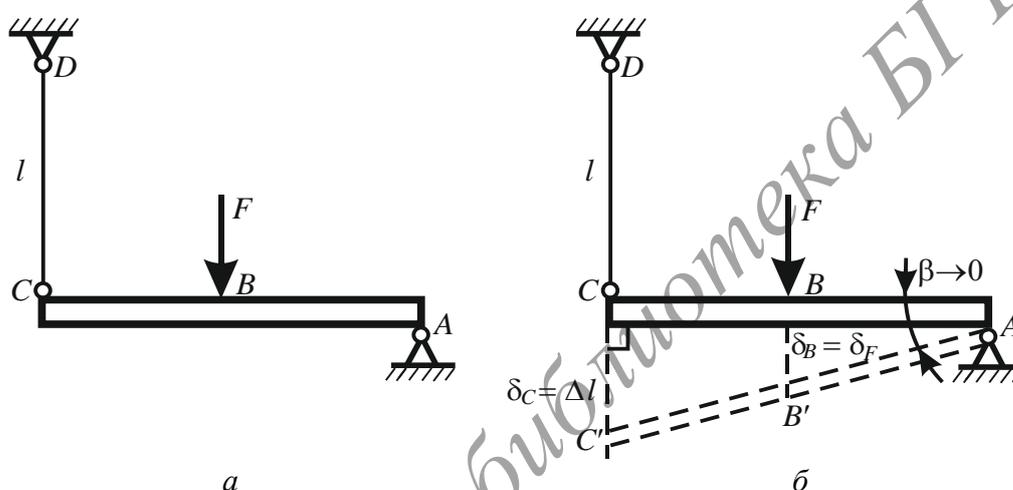


Рис. 16. Система с прямым расположением стержня:
а – исходное состояние; б – деформированное состояние

Введем обозначения: δ_B , δ_C , δ_F – перемещения точек B , C и точки приложения силы F соответственно; Δl – деформация стержня. Удлинение стержня связано с перемещением точек, принадлежащих жесткому брусу.

$$BB' = \delta_B = \delta_F; \quad CC' = \delta_C = \Delta l; \quad DC = l;$$

$$DC' = DC + CC' = l + \Delta l.$$

Выразим связь перемещения и удлинения через подобие треугольников $\Delta ACC' \sim \Delta ABB'$:

$$\frac{AC}{CC'} = \frac{AB}{BB'} \Rightarrow CC' = \delta_C = \Delta l = \frac{AC \cdot BB'}{AB} = \frac{AC \cdot \delta_B}{AB}.$$

При наклонном расположении стержня DB (рис. 17, а) жесткий брус AC повернется относительно опоры A по направлению действия момента от силы F на малый угол β . Вследствие малости деформаций (принцип начальных размеров) точки, принадлежащие брусу, переместятся по перпендикулярам к начальному положению бруса: $BB' \perp AC$; $CC' \perp AC$.

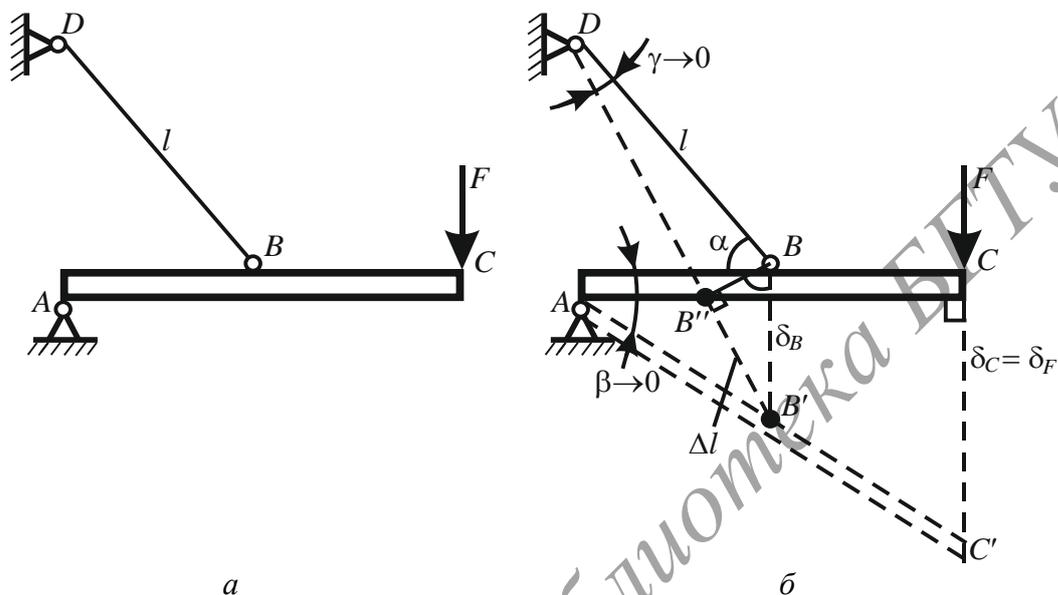


Рис. 17. Система с наклонным расположением стержня:
 а – исходное состояние; б – деформированное состояние

Введем обозначения: δ_B , δ_C , δ_F – перемещения точек B , C и точки приложения силы F соответственно; Δl – деформация стержня.

$$BB' = \delta_B; CC' = \delta_C = \delta_F; DB = l; DB = DB''.$$

Для определения деформации стержня выполняем проецирование стержня меньшей длины на стержень большей длины – удлинение определяется как разность большей длины и проекции меньшей длины.

$$DB' = DB'' + B'B'' = l + \Delta l; B'B'' = \Delta l.$$

Удлинение (укорочение) и перемещение точек соотносятся между собой как катет и гипотенуза прямоугольного треугольника $\Delta BB'B''$.

$$B'B'' = BB' \cdot \sin(\alpha) = \Delta l = \delta_B \cdot \sin(\alpha).$$

Выразим связь перемещения и удлинения через подобие треугольников $\Delta ACC' \sim \Delta ABB'$:

$$\frac{AC}{CC'} = \frac{AB}{BB'}; \quad BB' = \delta_B = \frac{AB \cdot CC'}{AC} = \frac{AB \cdot \delta_C}{AC}.$$

2.2.2. Последовательность решения задач на растяжение (сжатие)

1. Назвать все типы связей, наложенные на рассматриваемую систему, и обозначить их на схеме.

2. Освободить тело от связей и заменить их реакциями (аксиома освобождения от связей). Изобразить их на схеме. *При необходимости* записать уравнения равновесия и определить величину реакций.

3. Применить метод сечений и составить уравнения равновесия между внешними и внутренними силовыми факторами. Определить неизвестную величину продольной силы в поперечном сечении стержня.

5. Показать систему в деформированном состоянии (воспользоваться правилами, описанными выше и примерами на рис. 16, 17).

5. Из чисто геометрических соображений составить *геометрическое уравнение* совместности деформаций.

6. Пользуясь физическими законами, выразить деформации через внутренние усилия и внешние силы. Составить *физическое уравнение* совместности деформаций.

7. *Решить совместно* уравнения равновесия и физическое уравнение совместности деформаций.

Индивидуальное задание № 2

Расчет на прочность и жесткость при растяжении

Абсолютно жесткий брус, показанный на рис. 18, нагружен внешними силами F_1 и F_2 , закреплен шарнирно на опоре и удерживается в равновесии стальным стержнем. Допускаемое напряжение для материала стержня $[\sigma] = 160$ МПа, модуль упругости $E = 200$ ГПа. Значения внешних сил F_1 , F_2 и размеры конструкции даны в табл. 4.

Требуется.

1. Определить диаметр стального стержня из условия прочности.

2. Проверить конструкцию на жесткость, учитывая, что максимальное перемещение точки C бруса не должно превышать величину δ_C . Пересчитать диаметр стержня, если условие жесткости не выполняется.

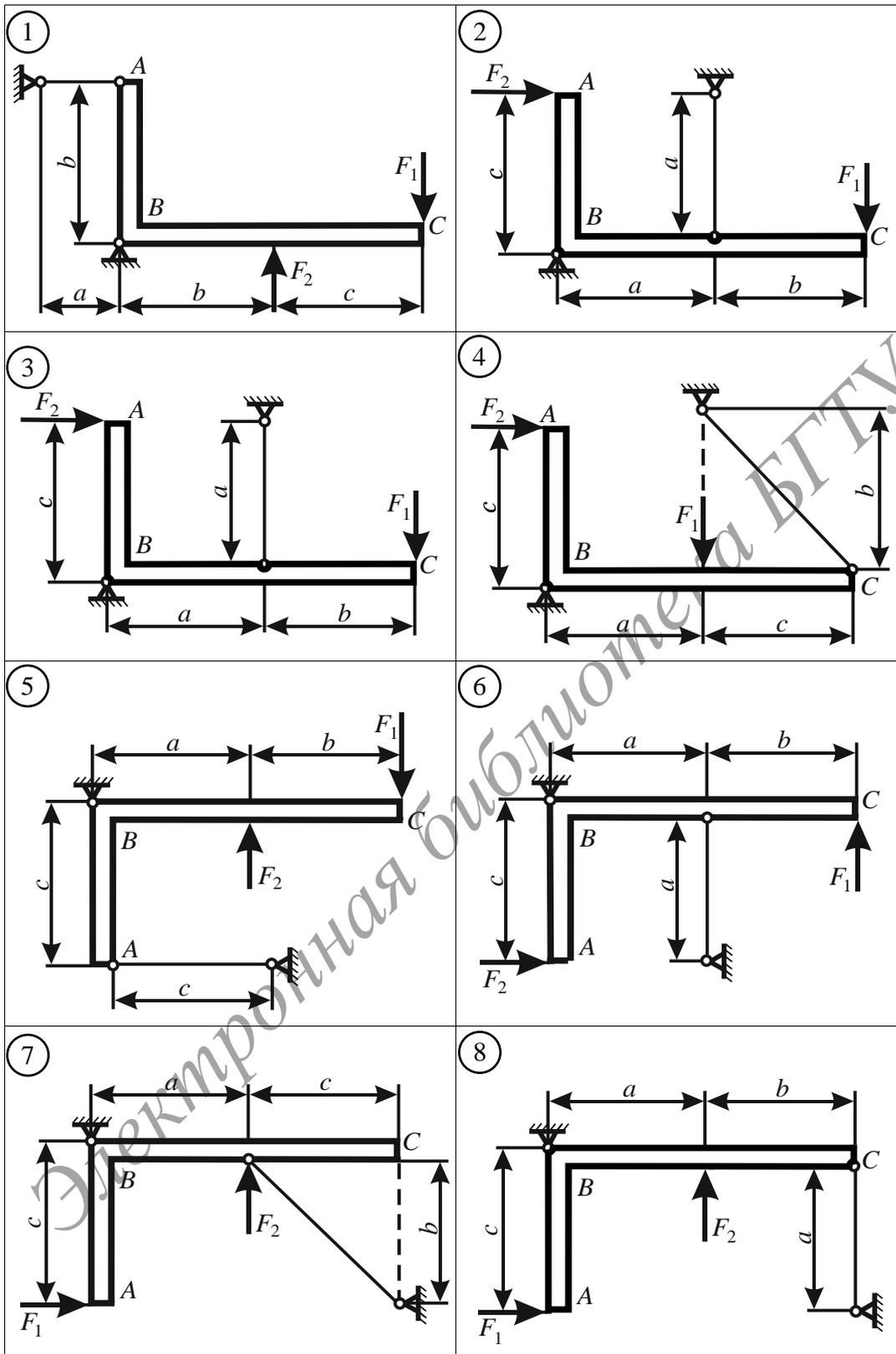


Рис. 18. Центральное растяжение (сжатие) (начало, окончание см. на с. 30)

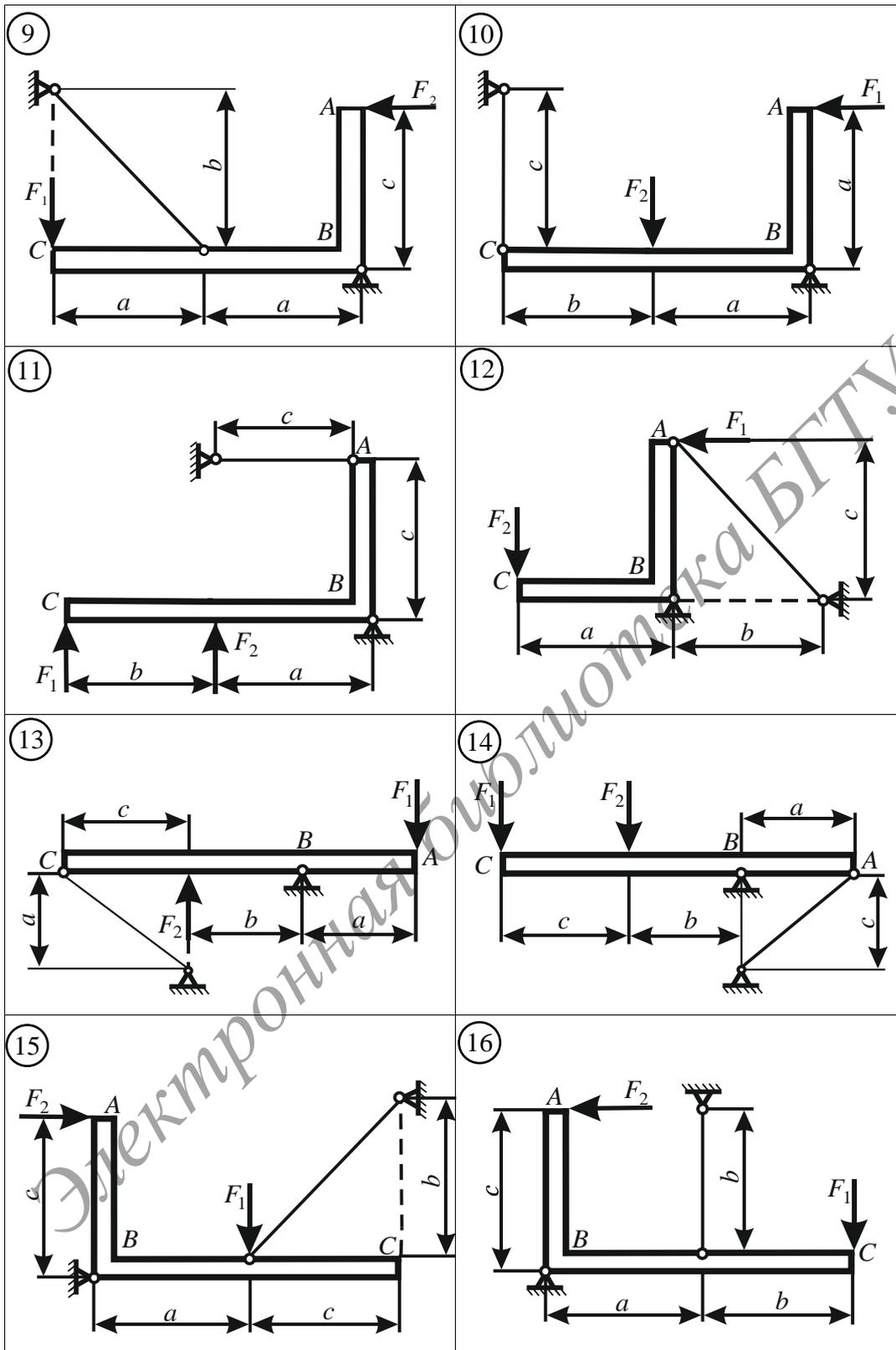


Рис. 18. Центральное растяжение (сжатие) (окончание; начало см. на с. 29)

Центральное растяжение (сжатие)

Номер строки	a , м	b , м	c , м	F_1 , кН	F_2 , кН	δ_c , мм
1	1,0	2,5	1,4	30	16	5,0
2	1,1	2,4	1,5	28	14	4,9
3	1,2	2,3	1,6	26	12	4,8
4	1,3	2,2	1,7	24	10	4,7
5	1,4	2,1	1,8	22	11	4,6
6	1,5	2,0	1,9	40	20	4,5
7	1,6	1,9	2,0	38	18	4,4
8	1,7	1,8	2,1	36	16	4,3
9	1,8	1,7	2,2	34	14	4,2
10	1,9	1,6	2,3	32	12	4,1
11	2,0	1,5	2,4	30	11	4,0
12	2,1	1,4	2,5	28	10	3,9
13	2,2	1,3	1,0	26	11	3,8
14	2,3	1,2	1,1	24	12	3,7
15	2,4	1,1	1,2	22	10	3,6
16	2,5	1,0	1,3	50	36	5,0
17	2,4	2,5	1,4	48	34	4,9
18	2,3	2,4	1,5	46	32	4,8
19	2,2	2,3	1,6	44	30	4,7
20	2,1	2,2	1,7	42	28	4,6
21	2,0	2,1	1,8	40	26	4,5
22	1,9	2,0	1,9	38	24	4,4
23	1,8	1,9	2,0	36	22	4,3
24	1,7	1,8	2,1	34	20	4,2
25	1,6	1,7	2,2	32	16	4,1
26	1,5	1,6	2,3	30	14	4,0
27	1,4	1,5	2,4	28	12	3,9
28	1,3	1,4	2,5	26	10	3,8
29	1,2	1,3	1,0	24	12	3,7
30	1,1	1,2	1,1	22	10	3,6



Пример решения задачи индивидуального задания № 2

На стержневую конструкцию, показанную на рис. 19, действует сила $F = 10$ кН. Брус AB абсолютно жесткий, удерживается в равновесии при помощи стержня CD . Материал стержня CD – сталь Ст3, для которой $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 200$ ГПа. Геометрические параметры конструкции известны: $a = 2$ м; $b = 1$ м; $c = 1$ м; $\alpha = 45^\circ$.

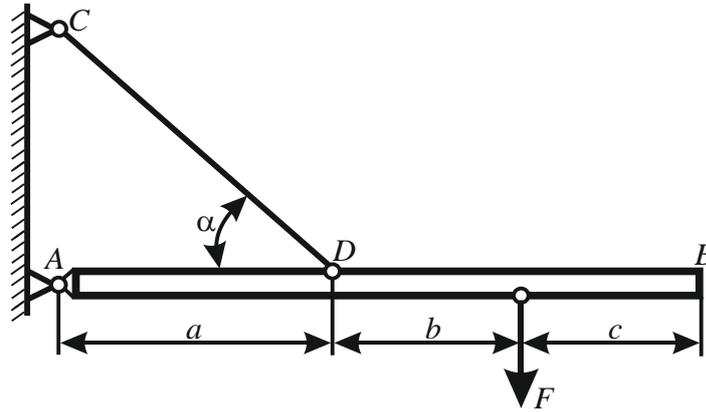


Рис. 19. Схема конструкции

Требуется.

1. Из условия прочности определить диаметр стержня CD .
2. Проверить конструкцию на жесткость (перемещение правого края бруса AB в вертикальном направлении не должно превышать 5 мм).
3. Если условие жесткости не выполняется, пересчитать диаметр стержня CD .

Решение.

1. *Подбор сечения из условия прочности.* Составим расчетную схему системы. Выделяем объект равновесия (тело, освобожденное от связей, действие которых на тело заменено реакциями связей). В рассматриваемой задаче объектом равновесия является брус AB (рис. 19).

Рассекаем стержень CD в произвольном месте согласно методу сечений. В рассматриваемом сечении будет действовать продольная сила N , которую условно направляем от сечения (считаем растягивающей). Связь, наложенную шарнирно-неподвижной опорой, заменяем двумя составляющими реакции связи Z_A, Y_A (принцип освобождения от связей). Расчетная схема составлена (см. рис. 20).

Полученная схема представляет собой плоскую произвольную систему сил. Для определения неизвестных необходимо и достаточно составить три уравнения равновесия.

Условие задачи не требует определения реакций опор в шарнирно-неподвижной опоре. Для определения продольной силы N в стержне CD воспользуемся одним уравнением равновесия. Сумма моментов всех сил относительно точки A должна быть равна нулю.

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad -F \cdot (a + b) + N \cdot a \cdot \sin \alpha = 0.$$

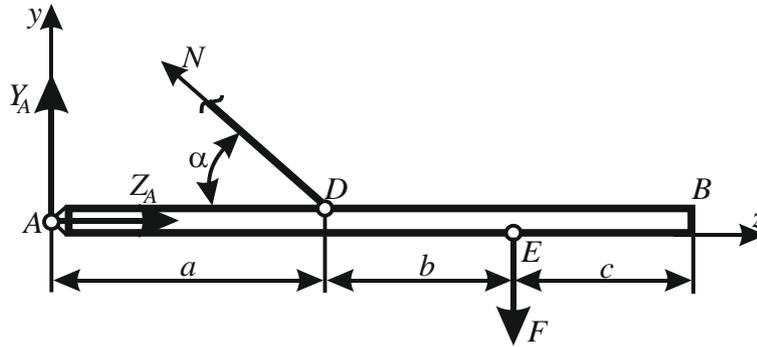


Рис. 20. Расчетная схема

Усилие в стержне CD :

$$N = \frac{F \cdot (a + b)}{a \cdot \sin \alpha} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot (2 + 1)}{2 \cdot 0,707} = 21,2 \cdot 10^3 \text{ Н} = 21,2 \text{ кН.}$$

Из условия прочности в варианте проектного расчета (10) запишем выражение для определения геометрической характеристики сечения (площадь):

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}.$$

Очевидно, что вдоль стержня CD продольная сила N не изменяется, поэтому $N_{\max} = N = 21,2 \text{ кН}$.

По условию задачи поперечное сечение стержня CD круглое. Площадь круга определяется выражением $A = \pi d'^2 / 4$. Решив неравенство относительно диаметра d' , получим

$$d' \geq \sqrt{\frac{4 \cdot N}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 21,2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,013 \text{ м} = 13 \text{ мм.}$$

Если стержень круглого поперечного сечения будет изготовлен диаметром $d' \geq 13 \text{ мм}$, то можно гарантировать, что он *не разрушится* под действием приложенной внешней нагрузки.

2. *Проверочный расчет на жесткость.* По условию задачи жесткость будет обеспечена, если под действием внешних сил вертикальное перемещение правого края бруса AB (точка B) не будет превышать $\delta_B = 5 \text{ мм}$. Запишем условие жесткости для стержня CD в соответствии с (11):

$$\Delta l_{CD} = \frac{N \cdot l_{CD}}{E \cdot A} \leq [\Delta l_{CD}],$$

где Δl_{CD} – фактическое удлинение стержня CD , рассчитанное по закону Гука; $[\Delta l_{CD}]$ – допускаемое удлинение, которое связано с максимально допустимым перемещением правого края бруса AB ; $l_{CD} = a / \cos \alpha = 2,83$ м – длина недеформированного стержня CD , N – усилие в стержне CD (рис. 20).

Так как диаметр стержня был определен из условия прочности, а $A = \pi d'^2 / 4$, то фактическое удлинение стержня CD :

$$\begin{aligned} \Delta l_{CD} &= \frac{N \cdot l_{CD}}{E \cdot A} = \frac{4 \cdot N \cdot l_{CD}}{E \cdot \pi \cdot d'^2} = \frac{4 \cdot 21,2 \cdot 10^3 \cdot 2,83}{200 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot (13 \cdot 10^{-3})^2} = \\ &= 0,0023 \text{ м} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,3 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Определим допускаемое удлинение $[\Delta l_{CD}]$ стержня CD , т. е. удлинение, при котором точка B переместится на расстояние 5 мм. Для этого изобразим конструкцию в деформированном виде (рис. 21).

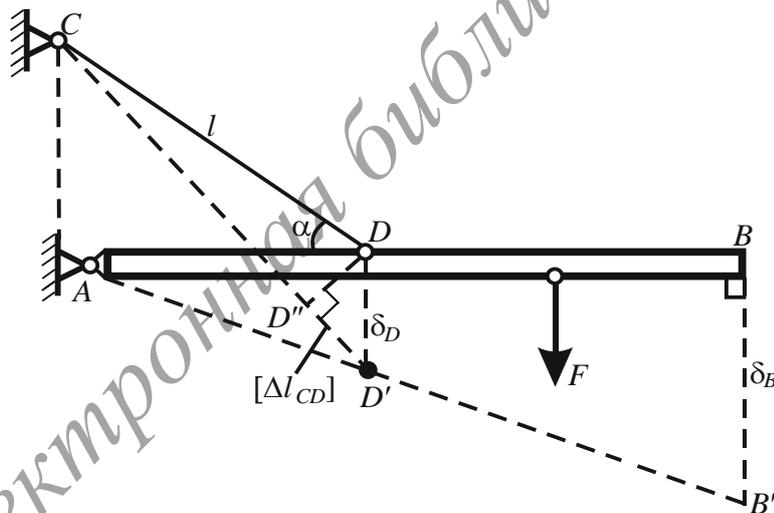


Рис. 21. Система в деформированном виде

Под действием силы F брус AB поворачивается относительно шарнирно-неподвижной опоры A в направлении действия момента силы (по часовой стрелке). При этом все точки изначально ненагруженного бруса AB (кроме точки A) переместятся по перпендикулярам (рис. 21) к начальному положению бруса: $BB' \perp AB$; $DD' \perp AB$.

При этом

$$DD' = \delta_D; BB' = \delta_B; CD = CD'' = l.$$

Так как брус AB абсолютно жесткий (согласно условию задачи), то вертикальное перемещение точки D определяем исходя из подобия треугольников $\Delta ABB'$ и $\Delta ADD'$ (треугольники прямоугольные и имеют общий угол).

$$\frac{BB'}{(a+b+c)} = \frac{DD'}{a} \Rightarrow DD' = BB' \cdot \frac{a}{(a+b+c)} = \delta_B \cdot \frac{a}{(a+b+c)}.$$

Искомое допускаемое удлинение стержня $[\Delta l_{CD}] = D'D''$ определяется из прямоугольного треугольника $\Delta DD'D''$:

$$\begin{aligned} [\Delta l_{CD}] = D'D'' &= DD' \cdot \sin \alpha = \delta_B \cdot \frac{a}{(a+b+c)} \sin \alpha = \\ &= 5 \pm \frac{2}{(2+1+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,8 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Очевидно, что условие жесткости не выполняется, так как

$$\Delta l_{CD} = 2,3 \text{ мм} > [\Delta l_{CD}] = 1,8 \text{ мм}.$$

Условие жесткости не выполняется, поэтому проведем конструкторский расчет из условия (12):

$$A \geq \frac{N \cdot l_{CD}}{E \cdot [\Delta l_{CD}]}$$

Так как сечение стержня круглое и $A = \pi d''^2/4$, решив неравенство относительно d'' , получим расчетный диаметр стержня CD из условия жесткости:

$$d'' \geq \sqrt{\frac{4 \cdot N \cdot l_{CD}}{\pi \cdot E \cdot [\Delta l_{CD}]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 21,2 \cdot 10^3 \cdot 2,83}{3,14 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3}}} = 0,0146 \text{ м} = 14,6 \text{ мм}.$$

Диаметр, определенный из условия жесткости, всегда больше диаметра, определенного из условия прочности, иное указывает на ошибку вычисления.

Заключение. Окончательно к проекту принимаем диаметр d стержня CD равным 14,6 мм, который удовлетворяет и условию прочности, и условию жесткости конструкции.

2.3. Плоский изгиб

Изгиб – это такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает *изгибающий момент* ($M_{\text{изг}}$).

Прямой брус, работающий на изгиб, называется *балкой*.

Если в поперечном сечении возникает *только изгибающий момент*, такой изгиб называется *чистым* ($Q = 0, M_{\text{изг}} \neq 0$).

Если в поперечных сечениях действуют *изгибающий момент и поперечная сила*, такой изгиб называется *поперечным* ($Q \neq 0, M_{\text{изг}} \neq 0$).

При изгибе балки под действием ВСФ всегда возникают растянутые и сжатые волокна (рис. 22).

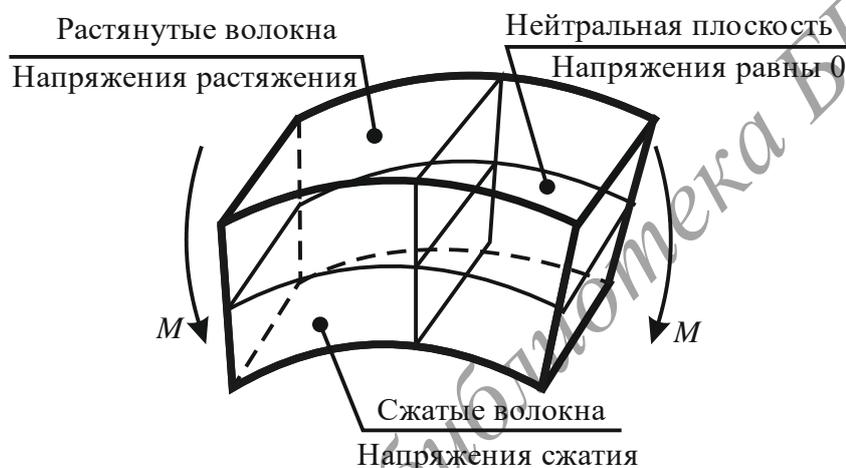


Рис. 22. Изгиб балки

Между областью растяжения и сжатия существует слой, в котором длина волокон не изменяется. Этот слой называется *нейтральным (плоскостью)*. Пересечение поперечного сечения балки с нейтральной плоскостью происходит по линии, которая называется *нейтральной* (рис. 22).

При изгибе в точках поперечного сечения стержня возникают *нормальные* напряжения σ , которые неравномерно распределены по высоте сечения, изменяются по линейному закону и определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_{\text{изг}} \cdot y}{I_{xc}}, \quad (13)$$

где y – расстояние от нейтральной линии до рассматриваемой точки; I_{xc} – момент инерции сечения относительно главной

центральной оси x_c . При плоском поперечном изгибе *нейтральная линия* всегда совпадает с одной из главных центральных осей, т. е. *проходит через центр тяжести сечения*.

Из формулы (13) видно, что напряжения равны нулю на нейтральной линии (при $y = 0, \sigma = 0$) и принимают наибольшее значение в точках, максимально удаленных от нейтральной линии (при $y = y_{\max}, \sigma = \sigma_{\max}$). По одну сторону от нейтральной линии возникают напряжения растяжения, по другую – напряжения сжатия (рис. 22).

На основе (13) можно сформулировать *условие прочности при изгибе*. Максимальные напряжения, которые возникают в *опасном сечении* (сечение, в котором изгибающий момент $M_{\text{изг}}$ максимален по модулю) в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (*опасные точки*), не должны превышать допустимое напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}^{\max} \cdot y_{\max}}{I_{x_c}} \leq [\sigma]. \quad (14)$$

Для балок с простым поперечным сечением, симметричным относительно нейтральной линии (круг, двутавр, швеллер и т. п.), удобно пользоваться формой записи условия прочности (14) через момент сопротивления:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}^{\max}}{W_{x_c}} \leq [\sigma], \quad (15)$$

где $W_{x_c} = I_{x_c} / y_{\max}$ – момент сопротивления сечения относительно оси x_c .

Условие прочности при изгибе позволяет:

1) *производить проверочный расчет*. При этом определяют напряжения в опасных точках σ_{\max} и сравниваются с допустимым $[\sigma]$. Допускается превышение $[\sigma]$ на 5% (перегрузка) и недогрузка – 10%;

2) *определять размеры поперечного сечения (конструкторский расчет)*. Из условия прочности (15) определяется геометрическая характеристика сечения – момент сопротивления:

$$W_{x_c} \geq \frac{M_{\text{изг}}^{\max}}{[\sigma]}.$$

По известному значению момента сопротивления рассчитывают размеры поперечного сечения.

2.3.1. Правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Для того чтобы воспользоваться условиями прочности (14) или (15), нужно знать максимальный изгибающий момент $M_{\text{изг}}^{\text{max}}$, который определяется из эпюр внутренних силовых факторов.

Для построения эпюр ВСФ применяют *метод сечений*. Балку разбивают на участки между ключевыми точками (см. с. 22). В зависимости от того, какая часть балки отбрасывается, различают *правые и левые участки*.

Координату линии сечения обозначают z_i , где i – номер рассматриваемого участка. Нумеруют участки в порядке их удаления от *крайних* точек балки. Для балки, состоящей из нескольких участков, могут *совместно использоваться* как левые, так и правые участки. Координата z_i может изменяться только в пределах участка (между ключевыми точками).

ВСФ уравнивают действие внешних нагрузок в пределах рассматриваемого участка.

Закон изменения ВСФ в пределах участка описывается:

1) *уравнением поперечных сил* Q – сумма проекций всех внешних сил, расположенных справа или слева от сечения на *поперечную ось*:

$$Q_i = \sum (F, R, q).$$

2) *уравнением моментов* M – сумма моментов всех внешних нагрузок, расположенных справа или слева от сечения относительно сечения:

$$M_i = \sum m(F, R, M, q).$$

При записи данных уравнений используют правила знаков, различных для правых и левых участков.

Правило знаков для поперечных сил Q (рис. 23) – если внешняя сила стремится повернуть участок балки по часовой стрелке относительно точки сечения, то ее принимают со знаком «+» (рис. 23, а), если против часовой – то со знаком «-» (рис. 23, б).

Правило знаков для изгибающих моментов $M_{\text{изг}}$ (рис. 24): если внешние нагрузки пытаются изогнуть участок выпуклостью вниз, то изгибающий момент принимают со знаком «+» (рис. 24, а), если выпуклостью вверх – со знаком «-» (рис. 24, б). (Если внешние усилия вызывают сжатие верхних волокон, то момент имеет знак «+», если нижних – то «-»).

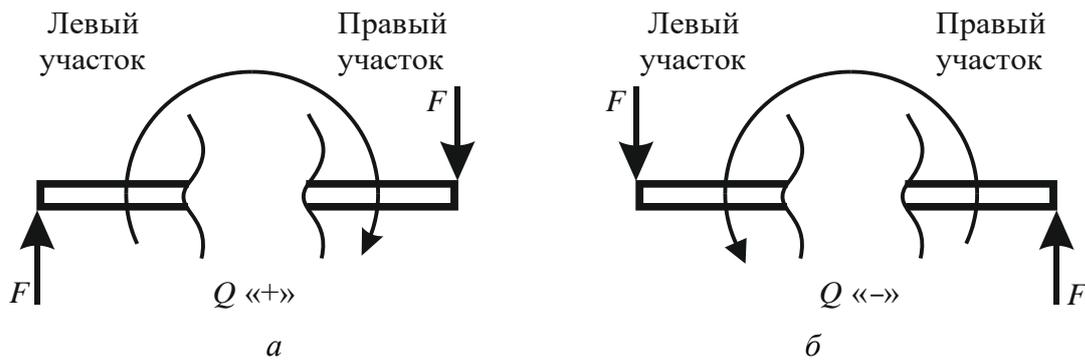


Рис. 23. Правило знаков для поперечных сил (пояснения в тексте)

Эпюра изгибающих моментов строится со стороны сжатых волокон (см. рис. 22). Записанные для каждого участка уравнения Q и $M_{\text{изг}}$ определяют график (эпюру) только между ключевыми точками данных участков.

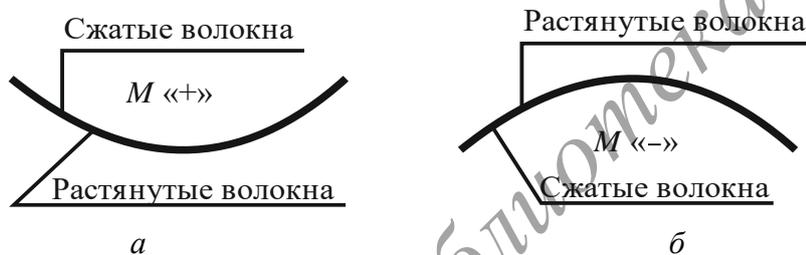


Рис. 24. Правило знаков для изгибающих моментов (пояснения в тексте)

Значения функций для каждого уравнения определяют в ключевых точках участка (в крайних положениях координаты z_i).

Для построения эпюр существуют *основные правила*:

1) на участках, где нет распределенной нагрузки q , эпюры Q ограничены прямыми, параллельными базе, а эпюры $M_{\text{изг}}$ – наклонными прямыми (рис. 25, а);

2) на участках, где к балке приложена распределенная нагрузка q , эпюры Q ограничены наклонными прямыми, а эпюры $M_{\text{изг}}$ – квадратичными параболой, выпуклость которой направлена навстречу направлению действия q , а экстремум будет расположен в сечении, где эпюра Q пересекает базовую линию (переходит через ноль) (рис. 25, б);

Замечание. Для нахождения положения экстремума следует уравнение поперечной силы $Q(z)$ на этом участке приравнять к нулю и определить значение z . Затем данное расстояние необходимо подставить в уравнение изгибающего момента $M_{\text{изг}}(z)$ для этого участка и определить численное значение максимума или минимума.

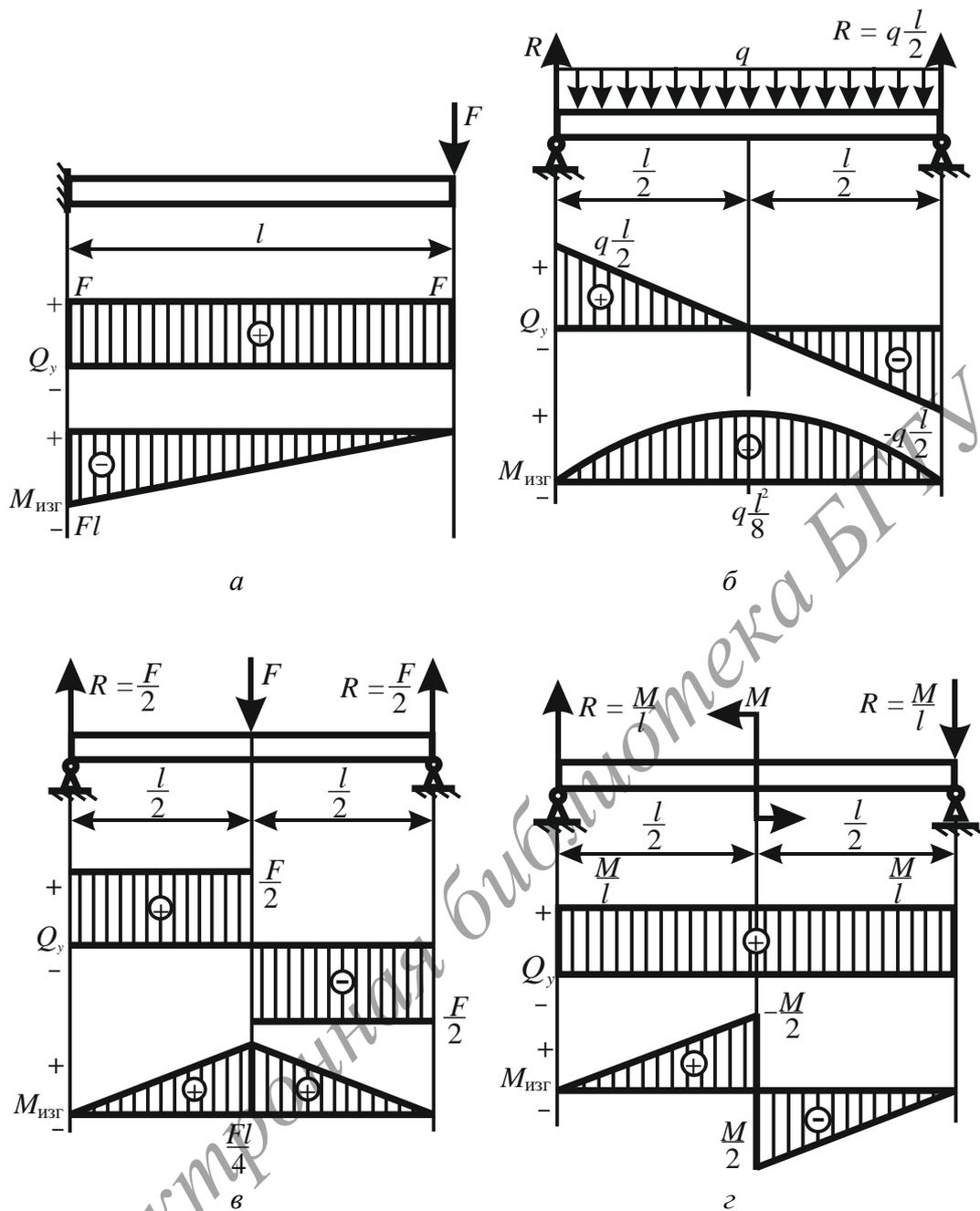


Рис. 25. Особенности построения эпюр внутренних силовых факторов при плоском изгибе (пояснения в тексте)

3) в сечениях, где к балке прикладывается сосредоточенная сила на эпюре Q присутствуют скачки на величину данной силы, а на эпюре $M_{изг}$ – перегибы, острием расположенные в направлении действия этой силы (рис. 25, а, в);

4) в сечениях, где к балке прикладывается сосредоточенный момент на эпюре Q , изменений не происходит, а на эпюре $M_{изг}$ – присутствуют скачки на величину этого момента (рис. 25, z);

5) на участках, где $Q > 0$, момент $M_{изг}$ возрастает, а на участках, где $Q < 0$, момент $M_{изг}$ убывает (рис. 25, $a-z$).

2.3.2. Последовательность решения задач с подбором сечений (проектный расчет)

1. Определить тип связей, наложенных на балку, и обозначить их.
2. Освободить тело от связей и заменить их действие реакциями.
3. Составить уравнения равновесия для системы внешних сил с использованием правил статики и определить значения неизвестных реакций.

Замечание. Для системы с жесткой заделкой можно реакции в опоре не вычислять, при этом метод сечений для определения ВСФ применяют, начиная от свободного края и продвигаясь к закрепленному.

4. Разделить балку на участки по ключевым точкам (см. с. 22) и применить метод сечений последовательно на каждом из выделенных участков.

5. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов на каждом участке в общем виде (через координату z_i) и определить значения функции в ключевых точках.

По результатам расчетов построить эпюры ВСФ на выделенных участках.

6. По эпюрам определить опасное сечение ($M_{изг} = M_{изг}^{max}$, по абсолютной величине).

7. Провести подбор сечения, используя условие прочности в варианте конструкторского расчета.

Подбор сечений в виде простых фигур (круг, прямоугольник и т. д.). Определить требуемое значение осевого момента сопротивления, используя условие прочности. По известному значению момента сопротивления рассчитать размеры поперечного сечения, полученные значения округлить до ближайшего большего целого.

Подбор сечения из стандартного проката. Из условия прочности определить требуемое значение осевого момента сопротивления. Из справочных таблиц (по ГОСТам) выписать ближайшее меньшее и ближайшее большее значения W_{xc} для стандартных профилей.

Для меньшего профиля вычисляют максимальные напряжения и определяют процент перегрузки:

$$\% \Pi = \frac{\sigma^{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% \leq 5\%. \quad (16)$$

Если перегрузка превышает 5%, то используют профиль с большим W_{xc} .

8. Если задано несколько типов сечений, то окончательно выбирают оптимальное. Оптимальной является балка с сечением меньшей площади, так как при одинаковой длине обладает меньшей массой, а следовательно, ниже затраты материала.

Для сечений в виде простых фигур по полученным размерам рассчитывают площадь поперечного сечения балки.

Для сечений из стандартного профиля из справочника выписывают площадь поперечного сечения балки.

Сравнивают полученные площади поперечных сечений и выбирают наименьшее.

Индивидуальное задание № 3 Поперечный изгиб

Размеры балок, а также значения внешних сил следует взять из табл. 5. Прочерк в таблице указывает на то, что данный силовой фактор не действует на балку и на расчетной схеме его не изображают. Материал балки – сталь Ст3, $[\sigma] = 160$ МПа. Балки представлены на рис. 26.

Требуется.

1. Построить для балки эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов $M_{изг}$.

2. Из условия прочности подобрать рациональное поперечное сечение из указанных в табл. 5.

Таблица 5

Поперечный изгиб

Номер строки	a , м	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	M_1 , кНм	M_2 , кНм	Форма сечения
1	2,0	20	–	–	10	–	24	–	Круг, квадрат, два швеллера
2	4,0	–	20	–	–	10	–	20	
3	3,0	–	–	30	10	–	36	–	
4	2,0	20	–	–	–	10	–	30	

Номер строки	a , м	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	M_1 , кНм	M_2 , кНм	Форма сечения
5	4,0	—	20	—	10	—	36	—	Круг, квадрат, два швеллера
6	3,0	—	—	20	—	10	—	24	
7	2,0	30	—	—	—	20	40	—	
8	4,0	—	20	—	10	—	—	30	
9	3,0	—	—	20	—	10	24	—	
10	2,0	30	—	—	15	—	—	40	
11	4,0	—	30	—	—	10	36	—	Круг, прямоугольник $h = 2 \cdot b$, двутавр
12	3,0	—	—	30	10	—	—	40	
13	2,0	20	—	—	10	—	30	—	
14	4,0	—	30	—	—	10	—	36	
15	3,0	—	—	20	15	—	30	—	
16	2,0	30	—	—	—	15	—	40	
17	4,0	—	20	—	10	—	24	—	
18	3,0	—	—	20	—	10	—	27	
19	2,0	20	—	—	—	15	40	—	
20	4,0	—	20	—	10	—	—	10	
21	3,0	10	—	—	20	—	—	6	
22	2,0	—	10	—	—	20	15	—	
23	4,0	—	—	10	5	—	—	10	
24	3,0	15	—	—	24	—	20	—	
25	2,0	—	15	—	—	10	—	20	
26	4,0	—	—	15	5	—	30	—	
27	3,0	25	—	—	—	8	—	15	
28	2,0	—	25	—	8	—	20	—	
29	4,0	—	—	25	—	10	—	10	
30	3,0	25	—	—	10	—	30	—	

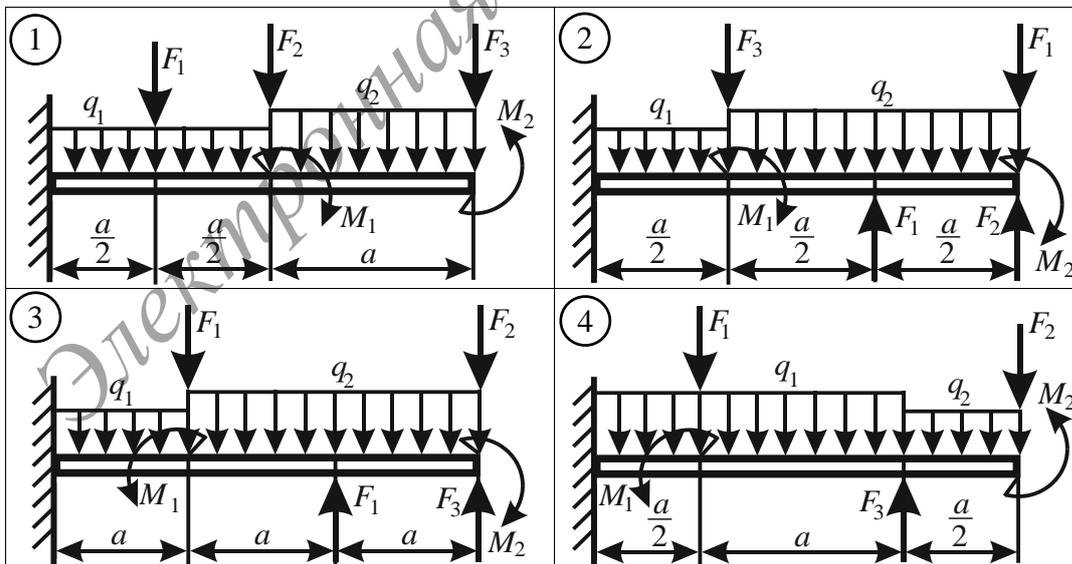


Рис. 26. Поперечный изгиб (начало; окончание см. на с. 44–45)

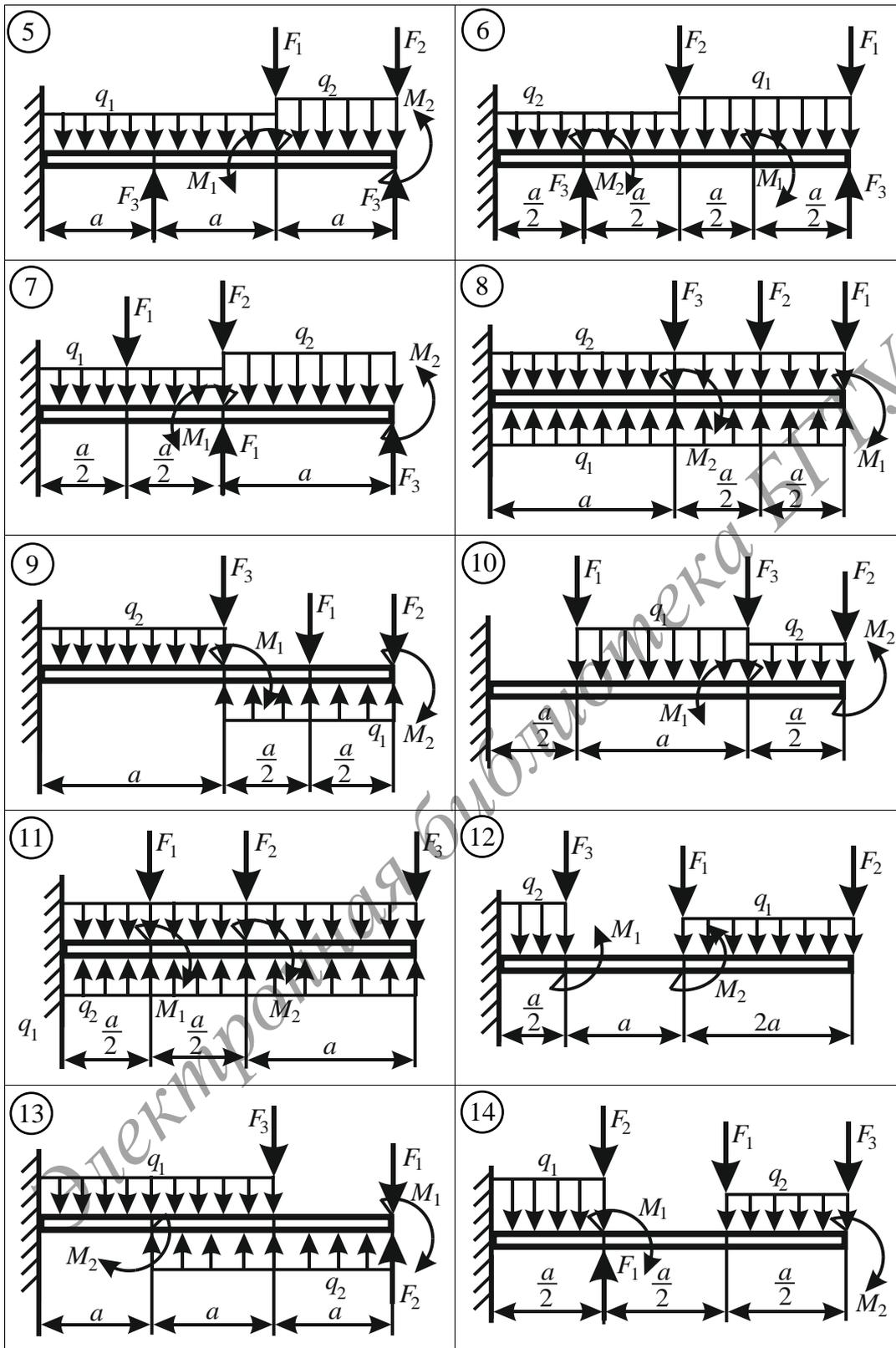


Рис. 26. Поперечный изгиб (продолжение; начало см. на с. 43, окончание на с. 45)

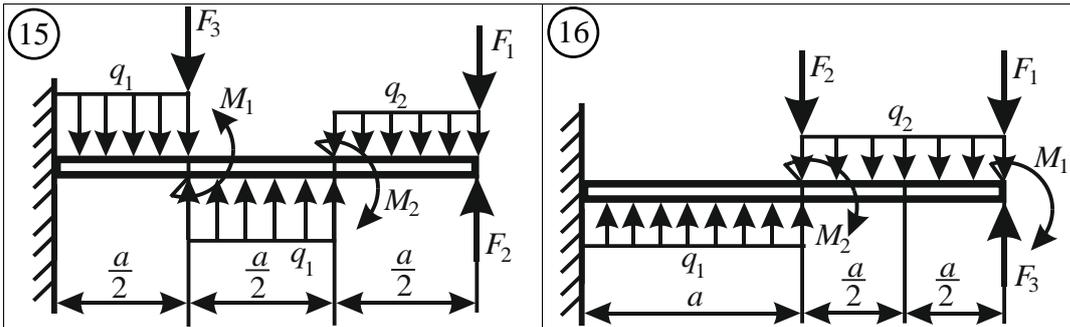


Рис. 26. Поперечный изгиб (окончание; начало см. на с. 43–44)

Пример решения задачи индивидуального задания № 3

Для балки, показанной на рис. 27, из условия прочности на изгиб подобрать рациональное сечение из перечисленных: круглое, прямоугольное с соотношением сторон, $h / b = 2$, двутавровое и состоящее из двух швеллеров. Допускаемое напряжение материала балки принять $[\sigma] = 160$ МПа.

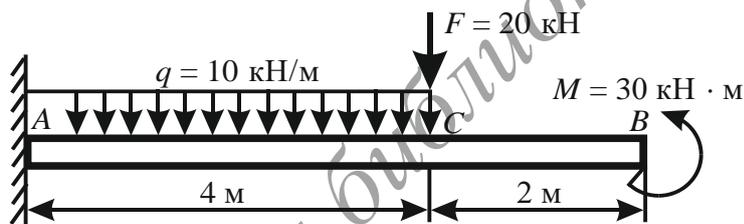


Рис. 27. Балка с защемленным концом

Решение.

1. *Определение реакций связей.* Балка жестко закреплена, в заделке возникают реакции (Y_A , Z_A) и реактивный момент M_A (рис. 28), показываем их на схеме и определяем тип системы. В результате получили плоскую произвольную систему сил, действующих на балку AB . Неизвестные реакции определим, составив три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kz} &= 0; \quad Z_A = 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \quad Y_A - F - q \cdot 4 = 0; \\ Y_A &= F + q \cdot 4 = 20 + 40 = 60 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad M_A - q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - F \cdot 4 + M = 0;$$

$$M_A = q \cdot 8 + F \cdot 4 - M = 80 + 80 - 30 = 130 \text{ кНм.}$$

Для проверки правильности произведенных расчетов убедимся в том, что соблюдается уравнение моментов относительно произвольной точки, к примеру, относительно точки C :

$$\sum M_C(F_k) = 0; \quad -Y_A \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + M_A + M = 0;$$

$$-240 + 80 + 130 + 30 = 0.$$

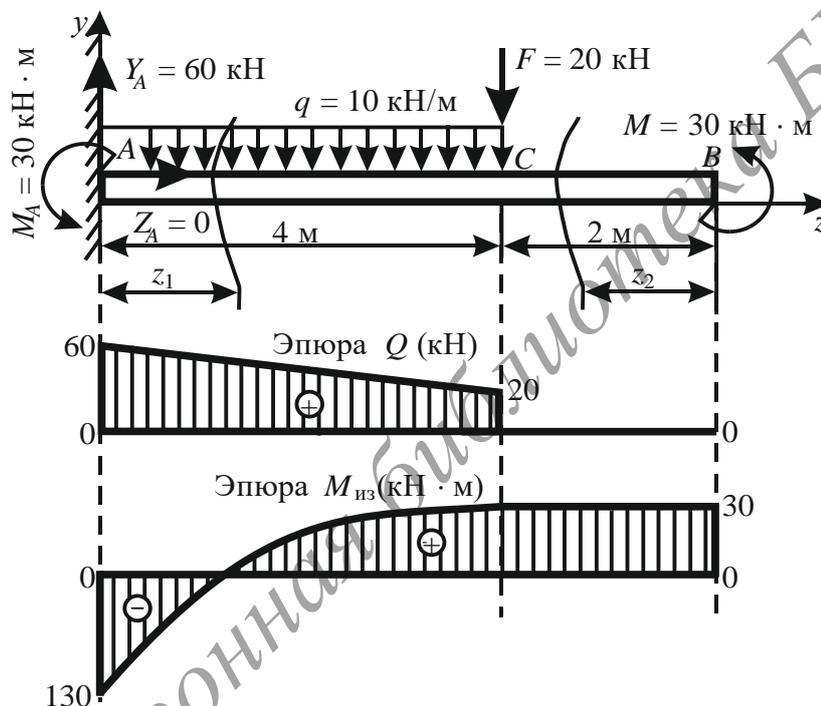


Рис. 28. Эпюры внутренних силовых факторов

Условие равновесия выполнено, следовательно, реакции определены верно.

2. *Построение эпюр внутренних силовых факторов.* Разделим балку на участки между ключевыми точками. Ключевыми являются точки приложения внешних нагрузок и опор. Введем обозначения для ключевых точек: A – опора, C – точка приложения сосредоточенной силы, B – свободный край (приложение сосредоточенного момента).

При построении эпюр сечения проводятся в пределах участка (рис. 28). Причем рассматривать можно как правую, так и левую части рассеченной балки.

Составим уравнения для поперечной силы Q и изгибающего момента $M_{\text{изг}}$ в сечениях на каждом из участков и рассчитаем их значения на краях интервалов.

$$0 \leq z_1 < 4 \text{ м};$$

$$Q(z_1) = Y_A - q \cdot z_1;$$

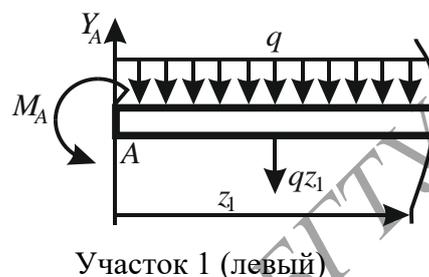
$$Q(z_1 = 0) = Y_A = 60 \text{ кН};$$

$$Q(z_1 = 4) = 60 - 10 \cdot 4 = 20 \text{ кН}.$$

$$M_{\text{изг}}(z_1) = Y_A \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} - M_A;$$

$$M_{\text{изг}}(z_1 = 0) = -M_A = -130 \text{ кНм};$$

$$M_{\text{изг}}(z_1 = 4) = 60 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 - 130 = 30 \text{ кНм}.$$



В поперечном сечении на расстоянии z_1 от опоры A возникает внутренняя поперечная сила $Q(z_1)$, которая уравнивает все внешние поперечные силы (Y_A и $q \cdot z_1$) слева от сечения. Внутренний изгибающий момент $M_{\text{изг}}(z_1)$ уравнивает внешний сосредоточенный момент M_A и моменты внешних сил Y_A и $q \cdot z_1$.

Поясним, как составляется уравнение $Q(z_1) = Y_A - q \cdot z_1$. При составлении уравнения пользуемся правилом знаков для поперечных сил (рис. 23). Сила Y_A стремится поворачивать рассматриваемую часть балки по часовой стрелке относительно сечения z_1 , поэтому, согласно правилу знаков, она входит в уравнение со знаком «+». Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки $q \cdot z_1$ стремится поворачивать рассматриваемую часть балки против часовой стрелки относительно сечения z_1 , поэтому входит в уравнение для $Q(z_1)$ со знаком «-».

Вычислим значения $Q(z_1)$ в крайних точках участка, при $z_1 = 0$ и $z_1 = 4$. Заметим, что функция $Q(z_1)$ линейно зависит от координаты z_1 , т. е. ее график представляет собой прямую линию.

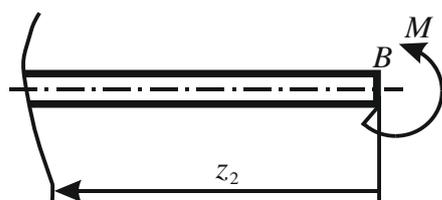
Теперь поясним, как составляется уравнение для изгибающего момента $M_{\text{изг}}(z_1) = Y_A \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} - M_A$. Сила Y_A вызывает сжатие верхних волокон балки (балка изгибается выпуклостью вниз),

поэтому момент этой силы относительно сечения ($Y_A \cdot z_1$), согласно правилу знаков (рис. 24), входит в уравнение со знаком «+». Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки $q \cdot z_1$ вызывает сжатие нижних волокон балки, поэтому момент этой силы $q \cdot z_1 \cdot (z_1 / 2)$ входит в уравнение со знаком «-». Внешний изгибающий момент M_A вызывает сжатие нижних волокон балки, поэтому он входит в уравнение со знаком «-».

Функция $M_{\text{изг}}(z_1)$ квадратичная, ее графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, так как перед квадратичным членом $q \cdot z_1^2 / 2$ стоит знак «-» (рис. 28).

Поперечная сила Q не пересекает базовую (нулевую) ось, поэтому парабола на участке не имеет экстремума.

Аналогичным образом записываются уравнения внутренних силовых факторов в сечении z_2 , при этом участок рассматривается от свободного края балки.



$$0 \leq z_2 < 2 \text{ м};$$

$$Q(z_2) = 0;$$

$$M_{\text{изг}}(z_2) = M = 30 \text{ кНм}.$$

Участок 2 (правый)

Внутренняя поперечная сила $Q(z_2)$ на этом участке равна нулю, так как отсутствуют внешние поперечные силы (нет внешних сил – не будет и внутренних).

Внутренний изгибающий момент $M_{\text{изг}}(z_2)$ на участке уравнивается внешним изгибающим моментом M и не зависит от длины участка.

Эпюры ВСФ строят по значениям соответствующих функций в ключевых точках участка. Построенные эпюры (см. рис. 28) полезно проверить согласно правилам, приведенным на с. 39–41 и рис. 25.

3. *Подбор сечения.* По эпюре изгибающих моментов определяется *опасное сечение* – сечение, в котором изгибающий момент максимален *по модулю*. В данной задаче опасным сечением является сечение в заделке (точка А), изгибающий момент, действующий в этом сечении, $M_{\text{изг}}^{\text{max}} = 130 \text{ кНм}$.

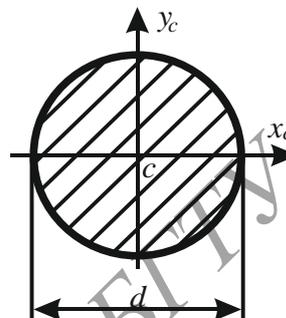
При конструкторском расчете (подбор сечения) из условия прочности при изгибе определяется геометрическая характеристика сечения – осевой момент сопротивления W_{xc} .

$$W_{xc} \geq \frac{M_{\text{изг}}^{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{130 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,812 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 812,5 \text{ см}^3.$$

Определим диаметр для круглого сечения. Момент сопротивления W_{xc} для круга (см. прил. 3) вычисляется по формуле

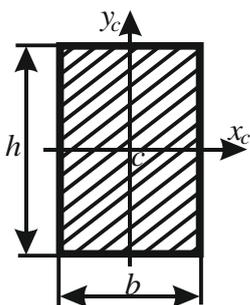
$$W_{xc} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_{xc}}{\pi}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 812,5}{3,14}} = 20,6 \text{ см} \Rightarrow 206 \text{ мм}.$$



Площадь круглого сечения

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (20,6)^2}{4} = 331,1 \text{ см}^2.$$



Определим размеры прямоугольного сечения. Момент сопротивления W_{xc} для прямоугольника (см. прил. 3) вычисляется по формуле

$$W_{xc} = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Так как $h = 2 \cdot b$ (по условию задачи), то

$$W_{xc} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_{xc}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 812,5}{2}} = 10,7 \text{ см} \Rightarrow 107 \text{ мм};$$

$$h = 2 \cdot b = 2 \cdot 10,7 = 21,4 \text{ см} \Rightarrow 214 \text{ мм}.$$

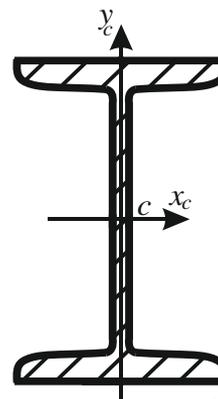
Площадь прямоугольного сечения

$$A = b \cdot h = 21,4 \cdot 10,7 = 228,98 \text{ см}^2.$$

Определим номер двутавра. Двутавр является стандартным профилем, его номер выбирается по табл. П.2.1, приведенной в прил. 2, в зависимости от необходимого момента сопротивления W_{xc} .

Из таблицы выбираем двутавр с большим и меньшим значениями W_{xc} относительно рассчитанного $W_{xc} = 812,5 \text{ см}^3$.

№ 36, $W_{xc} = 743 \text{ см}^3$; № 40, $W_{xc} = 953 \text{ см}^3$.



Определим фактические максимальные напряжения для двутавра меньшего размера (№ 36).

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}^{\max}}{W_{xc}} = \frac{130 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} = 175 \cdot 10^6 \text{ Па} = 175 \text{ МПа}.$$

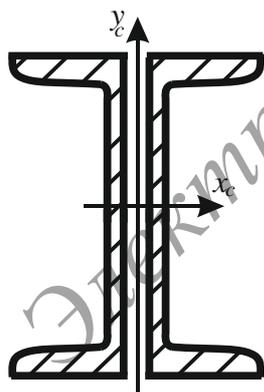
Процент перегрузки составит

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{175 - 160}{160} \cdot 100\% = 9\%.$$

Этот процент перегрузки не допустим (см. проверочный расчет, с. 42) из-за высокого риска разрушения конструкции, поэтому окончательно выберем двутавр № 40, тем самым создавая дополнительный запас прочности.

Площадь поперечного сечения двутавра № 40 (табл. П2.1)

$$A = 72,6 \text{ см}^2.$$



Рассчитаем сечение, состоящее из двух одинаковых швеллеров.

Момент сопротивления всего сечения $W_{xc} = 812,5 \text{ см}^3$, тогда для одного швеллера

$$W'_{xc} \geq \frac{W_{xc}}{2} = \frac{812,5}{2} = 406,25 \text{ см}^3.$$

Из таблицы выбираем швеллер с большим и меньшим значениями W'_{xc} относительно рассчитанного $W'_{xc} = 406,25 \text{ см}^3$.

№ 30: $W_{xc} = 387 \text{ см}^3$; № 33: $W_{xc} = 484 \text{ см}^3$.

Фактические максимальные напряжения для сечения из двух швеллеров с № 30

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}^{\max}}{W_{xc}} = \frac{130 \cdot 10^3}{2 \cdot 387 \cdot 10^{-6}} = 168 \cdot 10^6 \text{ Па} = 168 \text{ МПа}.$$

Процент перегрузки составит

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{168 - 160}{160} \cdot 100\% = 5\% .$$

Этот процент перегрузки допустим (см. проверочный расчет, с. 42), поэтому окончательно выбираем швеллер № 30.

Площадь поперечного сечения швеллера № 30 (см. табл. П2.2 прил. 2)

$$A' = 40,5 \text{ см}^2 .$$

Площадь поперечного сечения балки

$$A = 2 \cdot A' = 2 \cdot 40,5 = 81 \text{ см}^2 .$$

Заключение. Сравнив площади круглого, прямоугольного, двутаврового и состоящего из двух швеллеров сечения, можно сделать вывод, что наиболее рациональным является двутавровое, даже с учетом того, что балка будет недогружена на 15% .

2.4. Кручение

Кручение – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент $M_{\text{кр}}$. Вращающиеся и работающие на кручение стержни называют *валами*.

От действия $M_{\text{кр}}$ в точках поперечного сечения вала возникают только *касательные* напряжения τ , лежащие в плоскости сечения (рис. 29).

В рамках курса рассматривается кручение стержней *только круглого поперечного сечения*. Касательные напряжения в любой точке такого сечения (рис. 29) определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}} \cdot \rho}{I_p} , \quad (17)$$

где ρ – расстояние от центра кручения до точки, в которой определяется напряжение; I_p – полярный момент инерции.

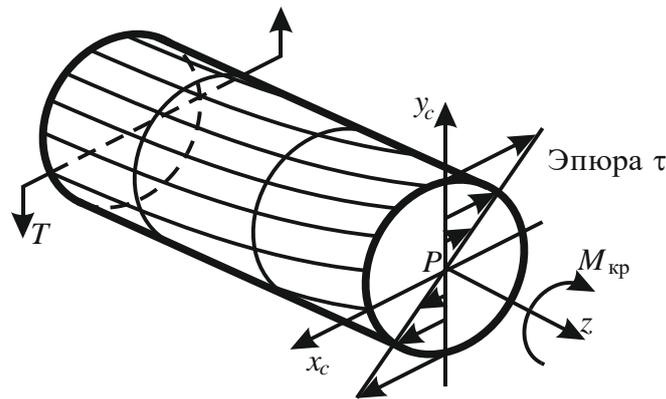


Рис. 29. Кручение стержня

Формула (17) показывает, что касательные напряжения при кручении стержней круглого поперечного сечения распределены в сечении неравномерно и подчиняются линейному закону. Напряжения равны нулю в центре кручения (при $\rho = 0$, $\tau = 0$) и принимают наибольшие значения в точках, максимально удаленных от центра кручения (при $\rho = \rho_{\max} = d/2$, $\tau = \tau_{\max}$).

На основании (17) можно сформулировать *условие прочности при кручении* – максимальные напряжения τ_{\max} , возникающие в опасном сечении (где крутящий момент максимален), не должны превышать допускаемого значения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{I_p} \cdot r = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (18)$$

где $M_{\text{кр}}^{\max}$ – максимальный крутящий момент, принимают из эпюры моментов (по абсолютному значению); r – наружный радиус поперечного сечения вала; $W_p = I_p / r$ – полярный момент сопротивления; $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

Валы кроме кручения испытывают изгиб, который в ориентировочных расчетах учитывают введением *пониженного допускаемого касательного напряжения* $[\tau] = 25\text{--}40$ МПа.

Условие прочности при кручении позволяет проводить:

1) *проверочный расчет*. Требуется определить максимальные напряжения в стержне τ_{\max} и сравнить их с допускаемыми $[\tau]$. При этом геометрические размеры стержня и внешняя нагрузка известны.

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (19)$$

2) *определение размеров поперечного сечения (конструкторский расчет)*. Из условия прочности определяется геометрическая характеристика сечения – полярный момент сопротивления W_p :

$$W_p \geq \frac{M_{кр}^{max}}{[\tau]}. \quad (20)$$

Зная, что для круглого сплошного сечения $W_p = (\pi \cdot d^3) / 16$, получим требуемый диаметр сплошного сечения по условию прочности:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}^{max}}{\pi \cdot [\tau]}}. \quad (21)$$

Для того чтобы воспользоваться условиями прочности, нужно знать максимальный крутящий момент $M_{кр}^{max}$, который определяется из *эпюры* крутящих моментов. Для построения эпюр пользуются *методом сечений* на участках нагруженного вала. При составлении уравнений моментов для рассматриваемого участка внутренний крутящий момент уравнивает все внешние скручивающие моменты, расположенные по одну сторону от сечения. При этом знак внешнего крутящего момента в уравнениях равновесия условно задаются положительным и отрицательным направлением вращения (конкретных правил знаков не существует).

Эпюра $M_{кр}$ на участке представляет собой прямую, параллельную базовой, и делает скачок в точке приложения внешнего крутящего момента на величину этого момента (крутящий момент в жесткой заделке тоже относится к внешним моментам).

Для валов наряду с выполнением условия прочности необходимо выполнение условия жесткости.

Для обеспечения требуемой жесткости вала при кручении *относительный угол* закручивания не должен превосходить допустимый:

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр}^{max}}{G \cdot I_p} \leq [\theta], \quad (22)$$

где $[\theta]$ – допустимый относительный угол закручивания вала; G – модуль сдвига ($G = 0,4 \cdot E = 80$ ГПа).

При переходе к градусной мере расчетная формула примет вид

$$\theta_{max} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_{кр}^{max}}{G \cdot I_p} \leq [\theta]. \quad (23)$$

Допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала и обычно лежит в пределах $[\theta] = (0,25-3,50) \cdot 10^{-2}$ рад/м, что соответствует $[\theta] = 0,15-2,00$ град/м.

Из условия жесткости можно решать те же задачи, что из условия прочности, но, как правило, *из условия прочности выполняют конструкторский расчет, а по условию жесткости осуществляют проверку.*

1. *Проверочный расчет.* Проверка выполнения условия жесткости по допускаемому относительному углу закручивания

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{G \cdot I_p} \leq [\theta]. \quad (24)$$

2. *Проектный расчет (определение размеров поперечного сечения).* Из условия жесткости определяется геометрическая характеристика сечения – полярный момент инерции I_p :

$$I_p \geq \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{G \cdot [\theta]}. \quad (25)$$

Зная, что для круга $I_p = (\pi \cdot d^4) / 32$ (см. прил. 3), получаем требуемый диаметр из условия жесткости:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{кр}}^{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}}, \quad (26)$$

или при переходе к градусной мере

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{кр}}^{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]} \cdot \frac{180}{\pi}}. \quad (27)$$

Деформация кручения круглого вала заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения (оси вала).

Если в пределах участка длиной l крутящий момент и геометрические характеристики сечения вала остаются постоянными, то *угол закручивания* можно определить как

$$\Delta\varphi = \frac{M_{\text{кр}} \cdot l}{G \cdot I_p}, \quad (28)$$

где l – расстояние между сечениями, для которых определяется взаимный угол поворота.

Для цилиндрического вала, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения или значением крутящего момента, *полный угол закручивания на длине вала* равен алгебраической сумме углов закручивания отдельных участков, т. е. учитывается знак внутреннего момента (направление кручения):

$$\varphi = \sum \varphi_i = \sum \frac{M_{\text{кри}} \cdot l_i}{G \cdot I_{\rho i}}. \quad (29)$$

При построении эпюры углов закручивания расчет начинают от неподвижного сечения.

Последовательность решения задач на прочность и жесткость при кручении

1. Разделить вал на участки по ключевым точкам (см. с. 22) и применить метод сечений последовательно на каждом из выделенных участков, начиная от свободного края и продвигаясь к закрепленному.

2. Составить уравнения для крутящих моментов на каждом участке в общем виде (через координату z_i) и определить значения функции в ключевых точках.

По результатам расчетов построить эпюры внутренних силовых факторов.

3. По эпюрам определить опасное сечение ($M_{\text{кр}} = M_{\text{кр}}^{\text{max}}$, без учета знаков).

4. Используя условие прочности в варианте конструкторского расчета, провести подбор сечения. Полученные значения *обязательно округляют* до ближайшего большего из стандартного ряда размеров (см. прил. 4).

5. Проверить вал на жесткость и, если условие не выполняется, пересчитать диаметры. Полученные значения *обязательно округляют* до ближайшего большего из стандартного ряда размеров (см. прил. 4).

6. Построить эпюру углов закручивания, двигаясь от заделки, где угол поворота равен нулю, к свободному краю по значениям диаметров, удовлетворяющих условию как прочности, так и жесткости.

Индивидуальное задание № 4

Расчет на прочность и жесткость при кручении

К стальному валу приложены четыре скручивающих момента: T_1, T_2, T_3, T_4 (рис. 30). Стальной вал имеет сплошное сечение и выполнен ступенчатым с диаметрами ступеней d_1 и d_2 . Схему вала принять согласно рис. 30. Численные данные для выполнения задания взять из табл. 6.

Требуется.

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить диаметры ступеней вала d_1 и d_2 из условия прочности, если $[\tau] = 100$ МПа. Диаметры округлить до ближайших больших из стандартного ряда (см. прил. 4).
3. Проверить вал на жесткость, если допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] = 1$ град/м. Если условие не выполняется, пересчитать диаметры ступеней вала из условия жесткости. Диаметры округлить до ближайших больших из стандартного ряда (см. прил. 4).
4. Построить эпюру углов закручивания, если $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

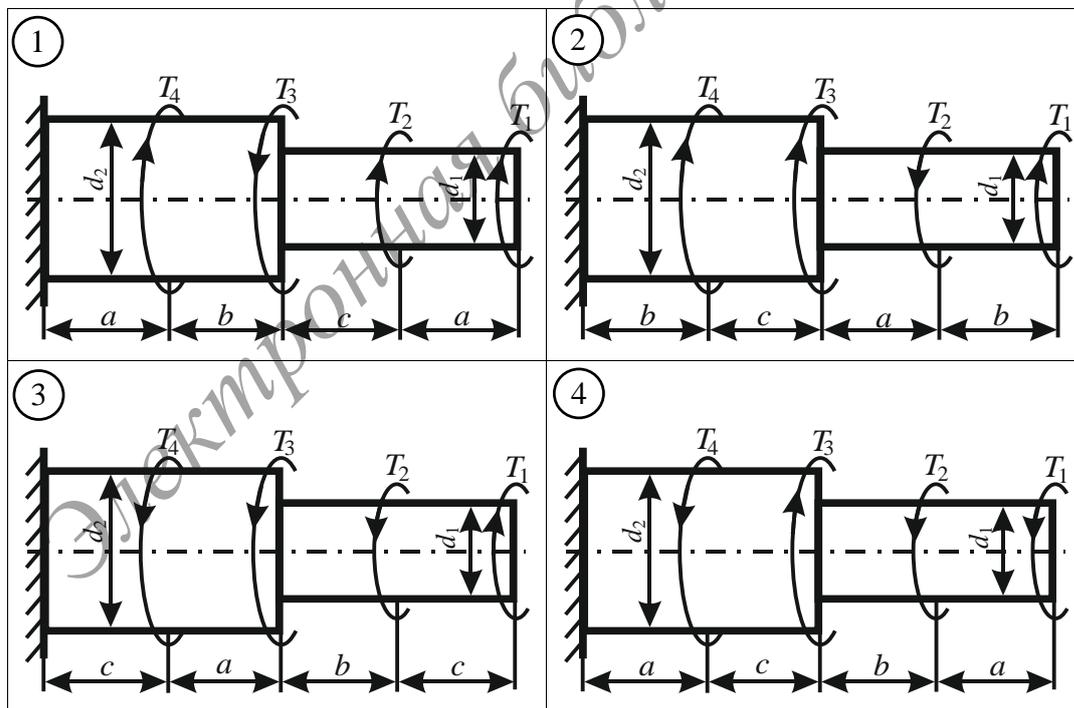


Рис. 30. Кручение (начало; окончание на см. с. 57–58)

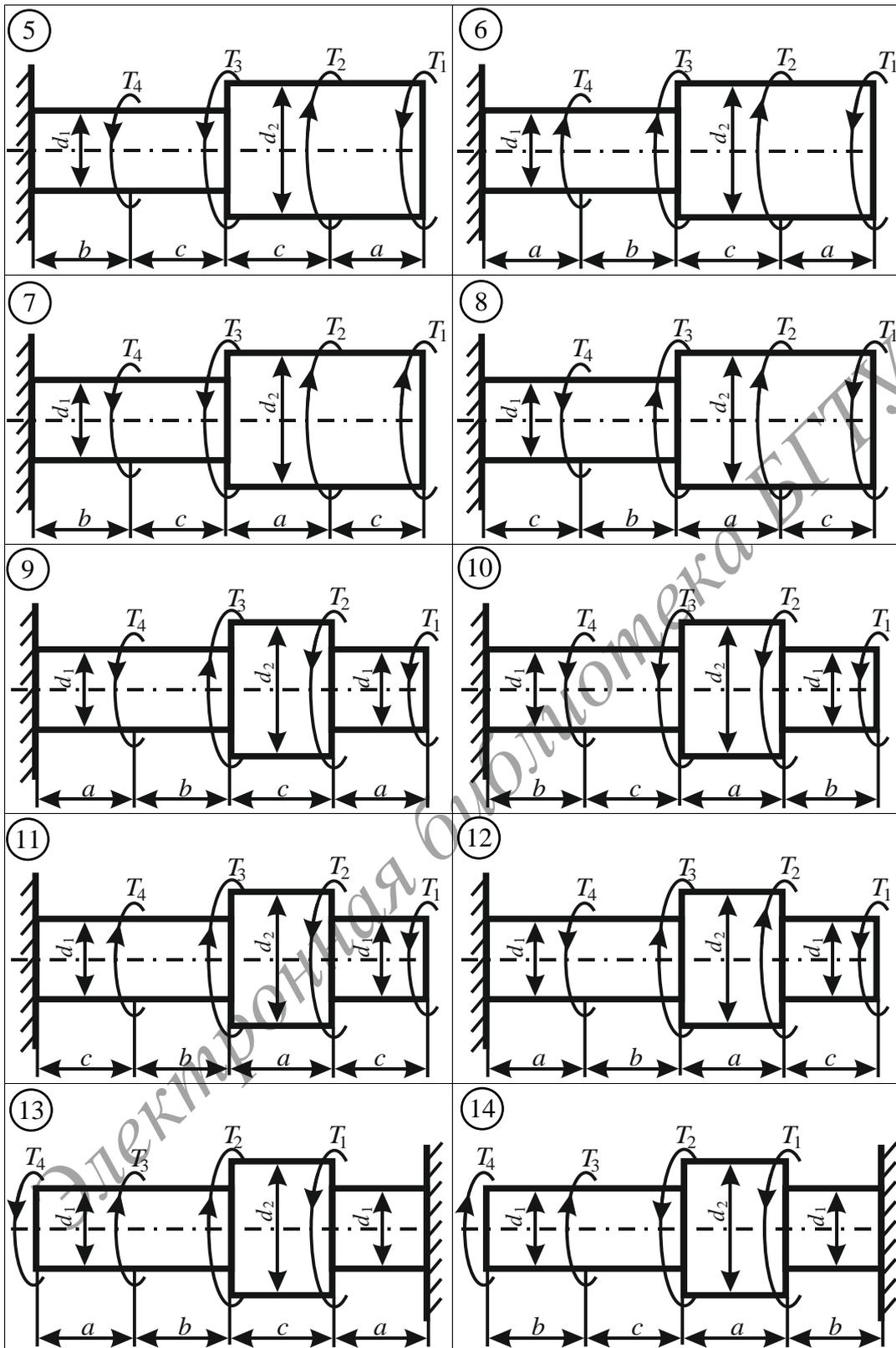


Рис. 30. Кручение (продолжение; начало см. на с. 56, окончание на с. 58)

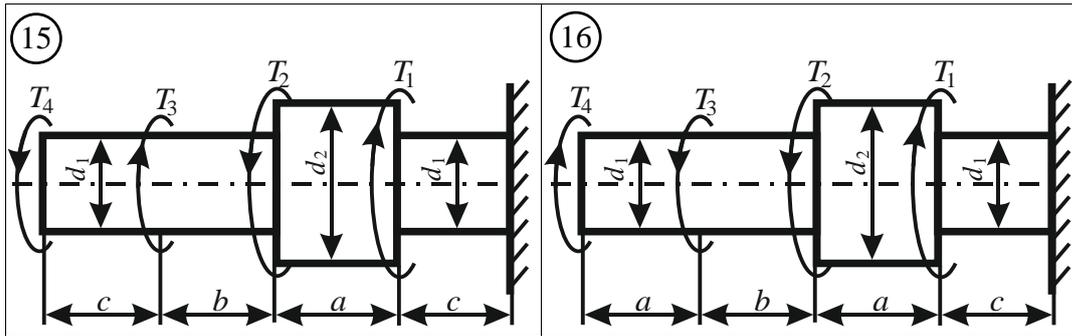


Рис. 30. Кручение (окончание; начало см. на с. 56–57)

Таблица 6

Численные значения кручения

Номер строки	Длина участка, м			Крутящие моменты, кН · м			
	a	b	c	T_1	T_2	T_3	T_4
1	0,5	0,6	0,7	1	2	3	4
2	0,6	0,7	0,8	2	3	4	5
3	0,7	0,8	0,9	3	4	5	6
4	0,8	0,9	1,0	4	5	6	7
5	0,9	1,0	1,1	4	3	2	1
6	1,0	1,1	1,2	5	4	3	2
7	1,1	1,2	1,3	6	5	4	3
8	1,2	1,3	1,4	7	6	5	4
9	1,3	1,4	1,5	3	2	1	4
10	1,4	1,5	1,6	4	3	2	1
11	1,5	1,6	1,7	5	4	3	6
12	1,6	1,7	1,8	6	5	4	7
13	1,7	1,8	1,9	2	1	4	3
14	1,8	1,9	2,0	3	2	5	4
15	1,9	2,0	0,5	4	3	6	5
16	2,0	0,5	0,6	5	4	7	6
17	0,5	0,7	0,5	3	4	1	2
18	0,6	0,8	0,7	4	5	2	3
19	0,7	0,9	0,8	5	6	3	4
20	0,8	1,0	0,9	6	7	4	5
21	0,9	1,1	1,0	4	2	3	1
22	1,0	1,2	1,1	5	3	4	2
23	1,1	1,3	1,2	6	4	5	3
24	1,2	1,4	1,3	7	5	6	4
25	1,3	1,5	1,4	4	1	2	3
26	1,4	1,6	1,5	5	2	3	4
27	1,5	1,7	1,6	6	3	4	5
28	1,6	1,8	1,7	7	4	5	6
29	1,7	1,9	1,8	4	5	6	2
30	1,8	2,0	1,9	3	7	6	5

Пример решения индивидуального задания № 4

Для двухступенчатого торсионного вала, показанного на рис. 31, необходимо определить диаметры каждой ступени из условия прочности.

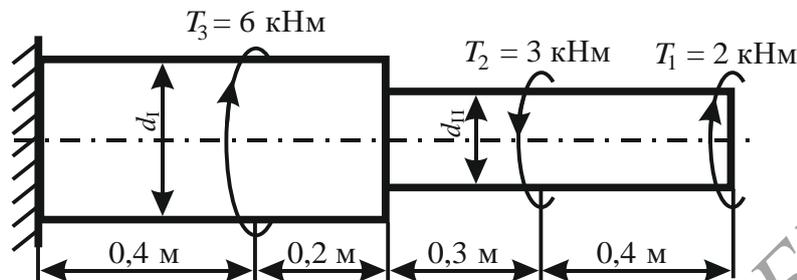


Рис. 31. Торсионный двухступенчатый вал

Провести проверку на жесткость, и если условие не выполняется, пересчитать диаметры. Для расчета принять допускаемое напряжение $[\tau] = 45$ МПа, $G = 80$ ГПа, а относительный угол закручивания $[\theta] = 0,8$ град/м.

Определить деформацию вала на каждом участке, построить эпюру углов закручивания и определить угол поворота свободного конца вала.

Решение.

1. *Построение эпюры крутящего момента.* Разделим вал на участки по ключевым точкам: A – опора; B , D – точки приложения внешних моментов; C – сечение, где изменяется геометрия сечения; E – свободный край сечения (приложен момент), рис. 32.

Применим метод сечений последовательно на каждом из участков, причем рассматривать можно как правую, так и левую части рассеченного вала. Для упрощения расчетов начинаем рассматривать сечения от свободного края, без определения момента в заделке.

Составим уравнения для крутящего момента $M_{кр}$ в сечениях на каждом из выделенных участков. Внутренний крутящий момент уравновешивает внешние, расположенные по одну сторону от сечения. Так как специального правила знаков не существует, при

записи уравнений равновесия *условно примем* вращение внешнего момента по часовой стрелке за *положительное*.

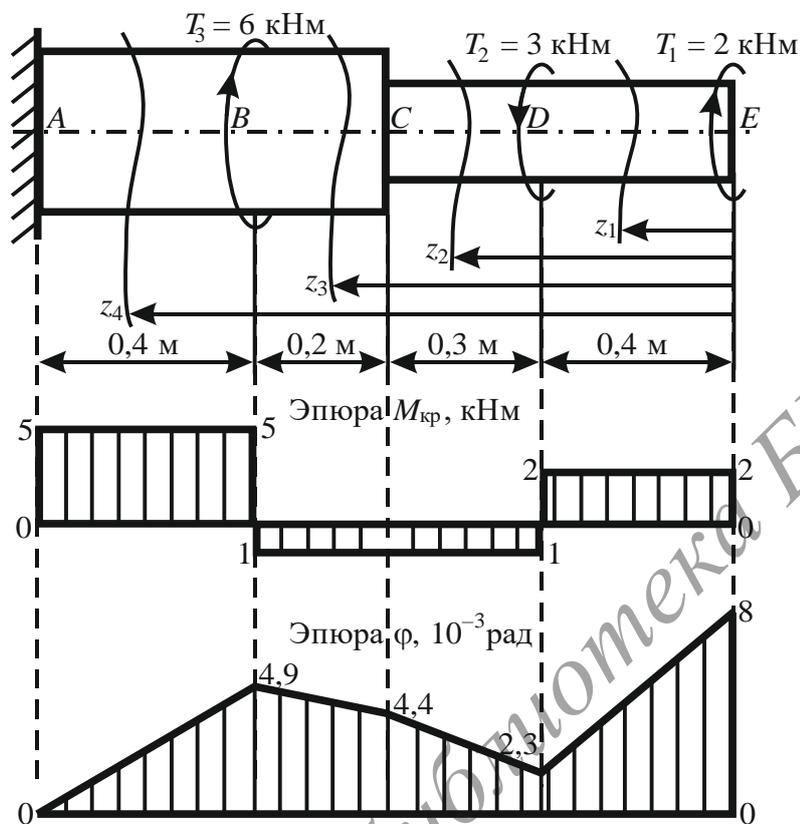
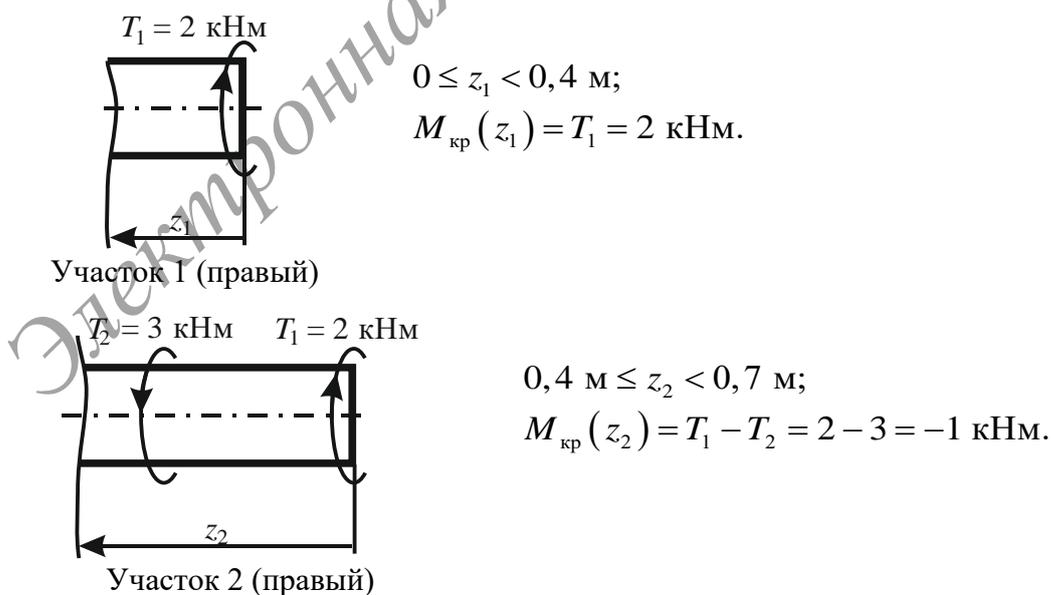
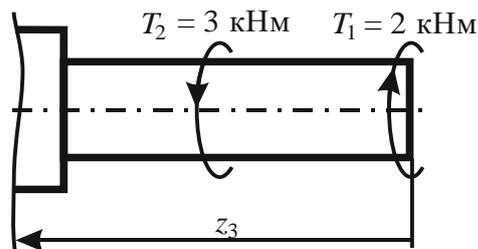


Рис. 32. Эпюры крутящих моментов $M_{кр}$ и углов закручивания φ



$$0,7 \text{ м} \leq z_2 < 0,9 \text{ м};$$

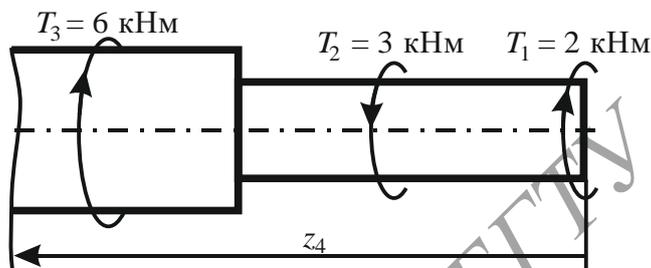
$$M_{\text{кр}}(z_2) = T_1 - T_2 = 2 - 3 = -1 \text{ кНм.}$$



Участок 3 (правый)

$$0,9 \text{ м} \leq z_3 < 1,3 \text{ м};$$

$$M_{\text{кр}}(z_3) = T_1 - T_2 + T_3 = \\ = 2 - 3 + 6 = 5 \text{ кНм.}$$



Участок 4 (правый)

По полученным значениям крутящих моментов строим эпюры на участках.

2. *Определение диаметров ступеней вала.* Ступень вала – это участок с постоянной геометрией (постоянный диаметр).

Диаметры ступеней определим из условия прочности при кручении по формуле (21g):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кр}}^{\text{max}}}{\pi \cdot [\tau]}}$$

Максимальное значение крутящего момента на каждой из ступеней определяем из эпюры крутящего момента (рис. 32). На первой ступени $M_{\text{кр}}^{\text{max(I)}} = 5 \text{ кНм}$, а на второй $M_{\text{кр}}^{\text{max(II)}} = 2 \text{ кНм}$.

Диаметры на ступенях, полученные в результате расчетов, необходимо округлить до ближайшего большего из стандартного ряда согласно прил. 4.

Диаметр первой ступени

$$d_{\text{I}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кр}}^{\text{max(I)}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} = 8,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} \Rightarrow 85 \text{ мм.}$$

Диаметр второй ступени

$$d_{\text{II}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кр}}^{\text{max(II)}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} = 6,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} \Rightarrow 63 \text{ мм.}$$

Изготовив вал по диаметрам d_I и d_{II} , полученным из условия прочности, можно гарантировать, что он *не разрушится* под действием указанной нагрузки.

3. Проверка жесткости вала. Жесткость вала будет обеспечена, если выполняется условие (21):

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\theta].$$

Множитель $180/\pi$ переводит значение относительного угла закручивания из радиан в градусы, так как допускаемое значение задано в градусах на метр. Согласно прил. 3, полярный момент инерции круга $I_p = \pi \cdot d^4 / 32$.

Для первой ступени

$$I_p^{(I)} = \frac{\pi \cdot d_I^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (85 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 512,2 \text{ см}^4;$$

для второй ступени

$$I_p^{(II)} = \frac{\pi \cdot d_{II}^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (63 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 154,6 \text{ см}^4.$$

Относительный угол закручивания первой ступени

$$\theta_{\max}^{(I)} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max(I)}}{G \cdot I_p^{(I)}} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 512,2 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,7 \text{ град/м.}$$

Условие жесткости для первой ступени $\theta_{\max}^{(I)} \leq [\theta]$ выполняется, $\theta_{\max}^{(I)} = 0,7 \leq [\theta] = 0,8$, т. е. деформации в первой ступени *не превысят* допускаемого значения.

Относительный угол закручивания второй ступени

$$\theta_{\max}^{(II)} = \frac{M_{\text{кр}}^{\max(II)}}{G \cdot I_p^{(II)}} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 154,6 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,93 \text{ град/м.}$$

Условие жесткости для второй ступени не выполняется, так как $\theta_{\max}^{(II)} = 0,93 > [\theta] = 0,8$, т. е. фактическая деформация во второй ступени превысит допускаемое значение.

Вторая ступень, имеющая диаметр $d_{II} = 63$ мм, будет прочной, но не жесткой.

Произведем перерасчет диаметра второй ступени из условия жесткости, при этом определяется геометрическая характеристика сечения – полярный момент инерции $I_p^{(II)}$.

$$I_p^{(II)} \geq \frac{M_{кр}^{\max(II)}}{G \cdot [\theta]} \cdot \frac{180}{\pi}.$$

Так как $I_p^{(II)} = \pi \cdot d_{II}^4 / 32$, то окончательно получаем расчетную формулу для определения диаметра второй ступени из условия жесткости:

$$d_{II}' \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^{\max(II)}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]} \cdot \frac{180}{\pi}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,8} \cdot \frac{180}{3,14}} = 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} \Rightarrow 65 \text{ мм}.$$

Диаметр, определенный из условия жесткости, всегда больше диаметра, определенного из условия прочности, иное указывает на ошибку вычисления.

4. Построение эпюры углов закручивания. Углы закручивания определяются на однородных участках (где постоянен крутящий момент и полярный момент инерции сечения) с помощью закона Гука при кручении (27):

$$\Delta\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p},$$

который определяет угол поворота между двумя сечениями, находящимися на расстоянии l друг от друга. Рассчитаем произведение $G \cdot I_p$ для каждой из ступеней:

$$G \cdot I_p^{(I)} = G \cdot \frac{\pi \cdot d_I^4}{32} = 80 \cdot 10^9 \cdot \frac{3,14 \cdot (85 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 4,1 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

$$G \cdot I_p^{(II)} = G \cdot \frac{\pi \cdot d_{II}'^4}{32} = 80 \cdot 10^9 \cdot \frac{3,14 \cdot (65 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Замечание. Обратите внимание, что если диаметр ступени пересчитан из условия жесткости, то и полярный момент инерции сечения этой ступени изменится.

В рассматриваемой задаче четыре однородных участка (AB , BC , CD и DE , рис. 32). Рассчитаем углы поворотов сечений A , B , C , D и E относительно заделки.

В заделке (точка A) угол поворота отсутствует:

$$\varphi_A = 0,$$

так как сечение A не имеет возможности поворачиваться (жесткая заделка). Угол поворота сечения B в *общем случае* равен сумме угла поворота сечения A и угла поворота сечения B относительно A :

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{BA} = \varphi_A + \frac{M_{\text{кр}}^{(AB)} \cdot l_{AB}}{G \cdot I_p^{(I)}},$$

где $M_{\text{кр}}^{(AB)} = 5$ кНм – крутящий момент на участке AB , определяется из эпюры крутящего момента с учетом знака (рис. 32); $l_{AB} = 0,4$ м – длина участка AB .

$$\varphi_B = 0 + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{4,1 \cdot 10^5} = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Аналогичным образом рассчитываются углы поворота сечений C , D и E .

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \varphi_B + \varphi_{CB} = \varphi_B + \frac{M_{\text{кр}}^{(BC)} \cdot l_{BC}}{G \cdot I_p^{(I)}} = \\ &= 4,9 \cdot 10^{-3} + \frac{-1 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{4,1 \cdot 10^5} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Замечание. Обратите внимание, что $M_{\text{кр}}^{(BC)} = -1$ кНм. При определении углов закручивания в формулы подставляются значения крутящих моментов со знаками, определяемыми из эпюры крутящих моментов.

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \varphi_C + \varphi_{DC} = \varphi_C + \frac{M_{\text{кр}}^{(CD)} \cdot l_{CD}}{G \cdot I_p^{(II)}} = \\ &= 4,4 \cdot 10^{-3} + \frac{-1 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{1,4 \cdot 10^5} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ рад;} \end{aligned}$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{ED} = \varphi_D + \frac{M_{кр}^{(DE)} \cdot l_{DE}}{G \cdot I_p^{(II)}} = 2,3 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{1,4 \cdot 10^5} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

По численным значениям углов поворота сечений A , B , C , D и E построена эпюра углов закручивания φ (см. рис. 32).

На участке эпюра φ представляет собой наклонную линию, при этом, если $M_{изг} > 0$, угол закручивания φ возрастает, если $M_{изг} < 0$ угол закручивания φ убывает.

Заключение. Окончательно принимаем к проекту диаметры ступеней вала, которые одновременно будут удовлетворять и условию прочности, и условию жесткости: $d_I = 85$ мм, $d_{II} = 65$ мм. Под действием приложенной нагрузки свободный конец вала повернется относительно неподвижной заделки на угол $\varphi = 8 \cdot 10^{-3}$ рад, или 0,46 град.

Электронная библиотека ВГУ

3. КИНЕМАТИКА

3.1. Основные теоретические сведения

Кинематика – это раздел механики, в котором изучается движение тел без учета причин, вызывающих это движение (без учета сил).

При этом под движением понимают происходящее во времени изменение положения одного тела относительно другого, с которым связана система координат, называемая *системой отсчета*, причем эта система может быть как движущейся, так и условно неподвижной.

Траектория точки – линия, которую описывает точка в процессе движения. Уравнение, которое определяет положение движущейся точки в зависимости от времени, называется *уравнением движения точки*.

В зависимости от известных величин и поставленной задачи могут быть использованы следующие способы задания движения точки: *векторный, координатный и естественный*.

При *векторном способе* положение точки M задают с помощью радиус-вектора \mathbf{r} (рис. 33), проведенного из центра O , с которым связана система отсчета, в данную точку.

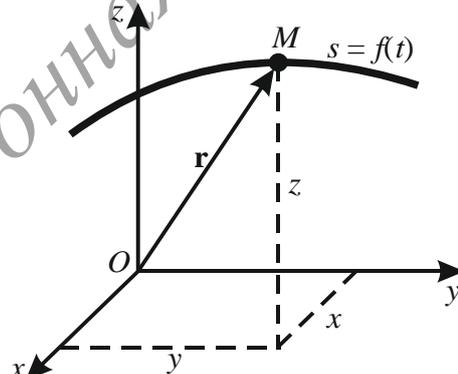


Рис. 33. Задание движения точки на плоскости

Для определения движения точки записывают закон изменения радиус-вектора во времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (30)$$

При *координатном способе задания движения* положение точки определяют, задав ее координаты как функцию времени (рис. 33), в случае движения на плоскости задаются два уравнения:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \quad (31)$$

Эти уравнения являются и уравнениями траектории в параметрической форме, в которых роль параметра играет время t . Чтобы записать уравнение траектории движения материальной точки в явной форме, надо исключить из них время.

Естественным методом задания движения удобно пользоваться, когда заранее известна траектория точки. При *естественном способе* положение точки в каждый момент времени можно определить по расстоянию, пройденному вдоль траектории от некоторой неподвижной точки, рассматриваемой как начало отсчета (рис. 34).

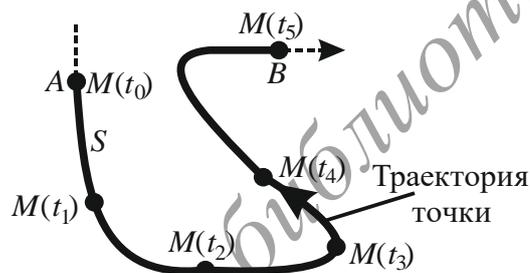


Рис. 34. Естественный способ задания движения точки

Уравнение движения можно представить в виде

$$S = f(t). \quad (32)$$

Одной из задач кинематики является определение кинематических характеристик точки, т. е. ее скорости и ускорения.

Скорость – векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки.

Скорость определяется как первая производная по времени от радиус-вектора этой точки в рассматриваемой системе отсчета:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (33)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Скорость точки при координатном способе задания движения определяется проекциями вектора скорости на оси координат (рис. 35).

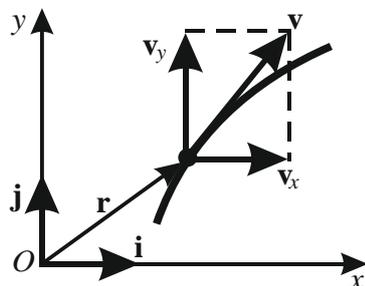


Рис. 35. Проекция скорости

Проекция скорости на координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей координаты этой точки. Для случая плоского движения составляющие скорости определяются выражениями:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}; \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}. \quad (34)$$

Модуль скорости в этом случае определяется по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}. \quad (35)$$

Для определения угла, под которым вектор скорости направлен к осям координат, записывают выражения для направляющих косинусов. Если вектор находится в плоскости, то у него определяют два угла – с осью абсцисс и осью ординат:

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{v_y}{v}, \quad (36)$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} – единичные векторы осей координат.

Ускорение – векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению.

Ускорение определяется первой производной по времени от скорости этой точки или второй производной от радиус-вектора точки по времени:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (37)$$

Величину полного ускорения в координатной форме по значениям его проекций на оси в плоскости можно найти по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (38)$$

При естественном способе задания траектории движения материальной точки ее вектор ускорения можно разложить по естественным осям координат на нормальную и касательную составляющие (рис. 36).

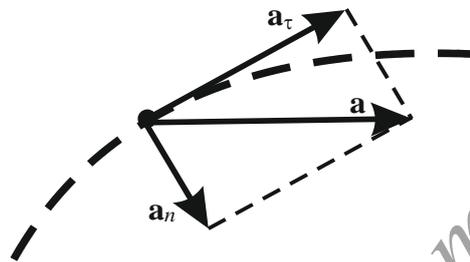


Рис. 36. Составляющие ускорения

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению и определяется как

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (39)$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.

Нормальное ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости в сторону центра кривизны траектории.

Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине и всегда направлено по касательной к траектории. Касательное ускорение существует только при *неравномерном движении*.

При ускоренном движении направление касательного ускорения совпадает с направлением вектора скорости; при замедленном – противоположно ему.

Касательная составляющая полного ускорения определяется первой производной от модуля скорости точки по времени:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \quad (40)$$

Полное ускорение направлено в сторону вогнутости траектории и определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (41)$$

Классификация видов движения в зависимости от ускорения.

В зависимости от величин скорости и ускорений различают:

– *равномерное движение*, при котором $v = \text{const}$. Для *равномерного прямолинейного движения* $a = 0$, для *равномерного криволинейного* $a = a_n$;

– *равнопеременное движение*, при котором касательное ускорение постоянно: $a_\tau = \text{const}$. Для *прямолинейного равнопеременного движения* полное ускорение равно касательному: $a = a_\tau$, для *криволинейного* – определяются двумя составляющими: касательным и нормальным ускорениями;

– *переменное движение* – численные значения и скорости, и ускорения меняются.

Простейшие виды движения. К простейшим видам движения твердого тела относятся: *поступательное* и *вращательное* движения.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, соединяющая две точки на теле, при движении остается параллельной своему начальному положению.

При этом все точки тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории (прямолинейные или криволинейные) и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Таким образом, изучение поступательного движения сводится к изучению кинематики точки.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором остаются неподвижными все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения. Все остальные точки при этом движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения, а радиусы равны кратчайшему расстоянию от точки до оси вращения (рис. 37).

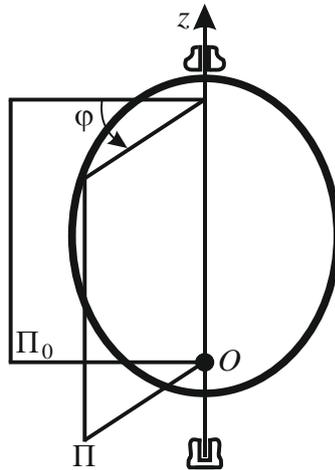


Рис. 37. Вращательное движение тела

Положение вращающегося тела в любой момент времени определяют углом поворота φ (рис. 38), откладываемым от некоторой неподвижной полуплоскости (Π_0), проходящей через ось вращения в направлении вращения до подвижной полуплоскости Π , жестко связанной с вращающимся телом.

За положительное направление отсчета принимается вращение против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу положительному направлению оси z (рис. 37).

Таким образом, закон вращательного движения можно записать в виде

$$\varphi = \varphi(t). \quad (42)$$

Для характеристики изменения угла поворота с течением времени вводится величина, называемая *угловой скоростью*.

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота с течением времени, называется *угловой скоростью тела*:

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (43)$$

Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, называется *угловым ускорением*:

$$\varepsilon = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}. \quad (44)$$

При описании вращательного движения рассматривают следующие случаи (рис. 38):

– если $\varepsilon > 0$ и $\omega > 0$ (рис. 38, а), то угловая скорость возрастает с течением времени и, следовательно, тело *вращается ускоренно* в рассматриваемый момент времени;

– если $\varepsilon < 0$ и $\omega > 0$ (рис. 38, б), то имеем *замедленное вращение в положительную сторону*;

– если угловая скорость $\omega = \text{const}$, то вращательное движение называется *равномерным*;

– если угловое ускорение $\varepsilon = \text{const}$, то вращательное движение называется *равнопеременным*.

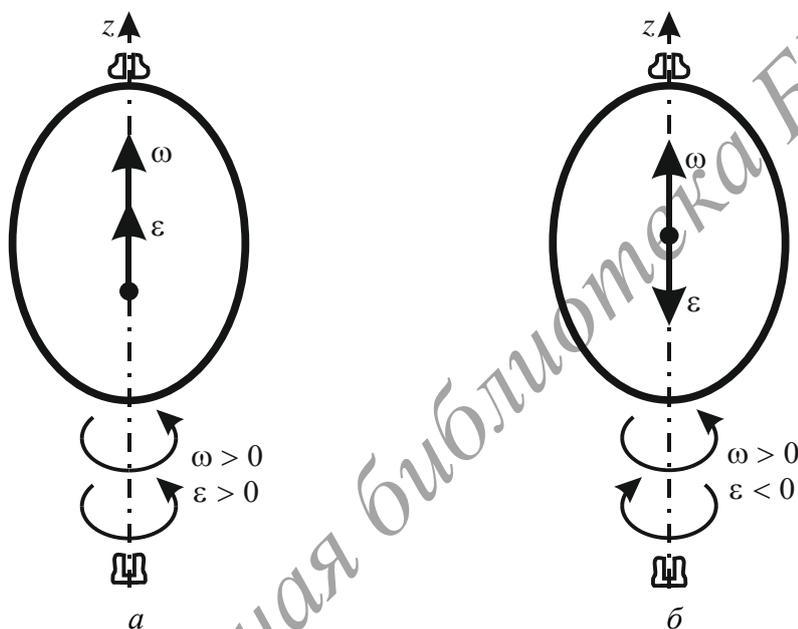


Рис. 38. Частные случаи вращательного движения (пояснения в тексте)

Скорость точки вращающегося тела определяется произведением угловой скорости на кратчайшее расстояние от точки до оси вращения и направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону устремления угловой скорости (рис. 39).

$$v_A = \omega \cdot OA. \quad (45)$$

Поскольку траектория движения точки криволинейная, то полное ускорение раскладывают на составляющие – нормальное и касательное.

Нормальное ускорение направляется (рис. 39) от точки к оси вращения и определяется выражением

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = \omega^2 \cdot r. \quad (46)$$

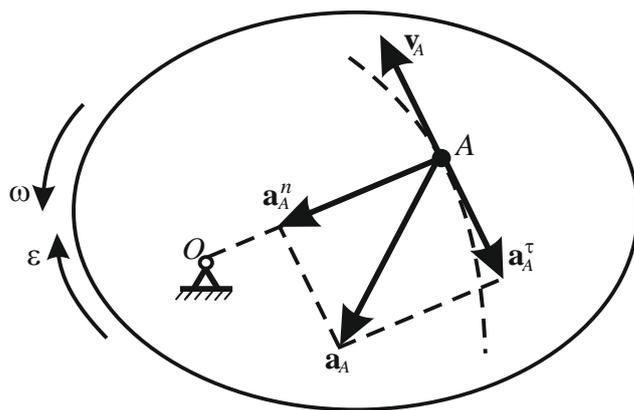


Рис. 39. Скорость и ускорения вращающегося тела

Касательное ускорение действует перпендикулярно отрезку от точки к оси вращения в сторону направления углового ускорения и определяется выражением

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = \varepsilon \cdot r. \quad (47)$$

Полное ускорение точки (ускорение точки) можно определить, как сумму касательного и нормального ускорений по теореме Пифагора:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2}. \quad (48)$$

3.2. Последовательность решения задач по определению параметров движения материальной точки

1. Записать уравнения движения для точки и избавиться от параметризации.
2. Задать направление осей и определить координаты точки в заданный момент времени.
3. Определить проекции скорости на оси, полный вектор скорости и ее направление.
4. Определить составляющие (проекции) ускорения, значение полного ускорения и его направление.
5. Выразить радиус кривизны траектории через нормальное ускорение точки.
6. Построить траекторию движения точки, показать на ней скорость, ускорение и их составляющие.
7. Сделать заключение о виде движения материальной точки.

3.3. Последовательность решения задач по простейшим видам движения механической системы

1. Разбить механизм на отдельные тела и установить вид движения для каждого тела механизма.
2. По заданному уравнению движения тела рассчитать его угловую скорость и угловое ускорение.
3. Определить направление движения тела.
4. Последовательно от тела, закон движения которого задан, найти скорости, ускорения и направления движения всех связанных тел механизма.
5. Определить полное ускорение и его составляющие для заданной точки механизма.

Индивидуальное задание № 5

Определение траектории, скорости и ускорения точки

Движение точки M задано уравнениями $x(t)$ и $y(t)$ (x и y в метрах, t в секундах). Исходные данные по уравнению $y(t)$ взять из табл. 7 в соответствии с вариантом и заданным рисунком (рис. 40), а для $x(t)$ – на соответствующих рисунках.

Требуется.

1. Найти уравнение траектории точки и определить в момент времени $t_1 = 1$ с скорость точки, ее ускорение и радиус кривизны траектории.
2. Показать на рисунке траекторию точки, векторы скорости и ускорения, а также их компоненты в момент времени t_1 .
3. Дать оценку характера движения точки.

Таблица 7

Движение материальной точки

Номер строки	$y = f(t)$			
	рис. 1–4	рис. 5–8	рис. 9–12	рис. 13–16
1	$12 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2 + 1$	$2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$6 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$
2	$2 - 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2 + t)^2$	$2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1$	$2 - 7t$
3	$-6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$3t^3$	$2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3 + 8 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

Номер строки	$y = f(t)$			
	рис. 1–4	рис. 5–8	рис. 9–12	рис. 13–16
4	$3 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$8 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$2 - 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2t+3)^2 - 2$
5	$9 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$(1+t)^3$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$1 - 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$
7	$10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t - 1$	$8 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	$(t+2)^3 - 1$
8	$-4 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$t^2 + 3t$	$1 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^3 + t^2$
9	$3 - 5 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2 + 7t$	$6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$
10	$-4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$10e^{-0,5t}$	$-2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$5t - 1$
11	$-8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - t^3$	$-2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$t^3 - t^2$
12	$2 + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$5 - 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$6 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2$
13	$5 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2 - 4t^2$	$8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - (3 + 2t)^2$
14	$3 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2$	$6t - t^3$	$-5 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$(t+1)^{-1}$
15	$6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1$	$2t - 2t^2 + 1$	$6 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4e^{-2t}$
16	$-2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 4$	$3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2$	$2t - t^2 + 1$
17	$6 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+2)^2 - 1$	$10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$t^3 - 6t$
18	$-4 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 3$	$(3+2t)^2 - 2$	$6 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2$	$(t+4)^{-1}$
19	$3 + 5 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 + 6 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$t^3 - 3$
20	$7 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$t^3 - 2t^2$	$5 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1$	$4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2$
21	$2 + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$5t + 1$	$-2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2 + 5t$

Номер строки	$y = f(t)$			
	рис. 1–4	рис. 5–8	рис. 9–12	рис. 13–16
22	$-3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-5 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2$	$t^2 - 4t$
23	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2t^3 + 2t^2$	$-5 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^{-1}$
24	$4 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+2)^3 - 4$	$-4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t-1)^3$
25	$2 + 5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 1$	$3 - 6 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$
26	$8 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$1 - 2t^2$
27	$2 + 8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2t+3)^2 + 2$	$7 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+5)^{-1}$
28	$-5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$	$3 - 8 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t-2)^2$
29	$7 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 + 7t$	$-8 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2t^3$
30	$9 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$5 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$	$(3+t)^{-1}$

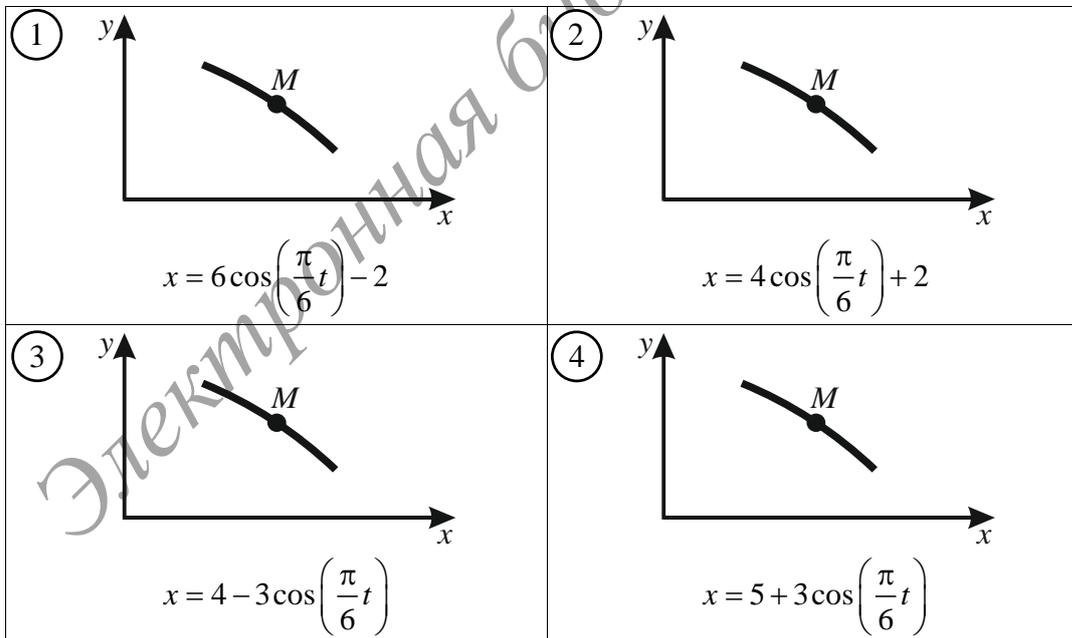


Рис. 40. Движение материальной точки (начало; окончание см. на с. 77)

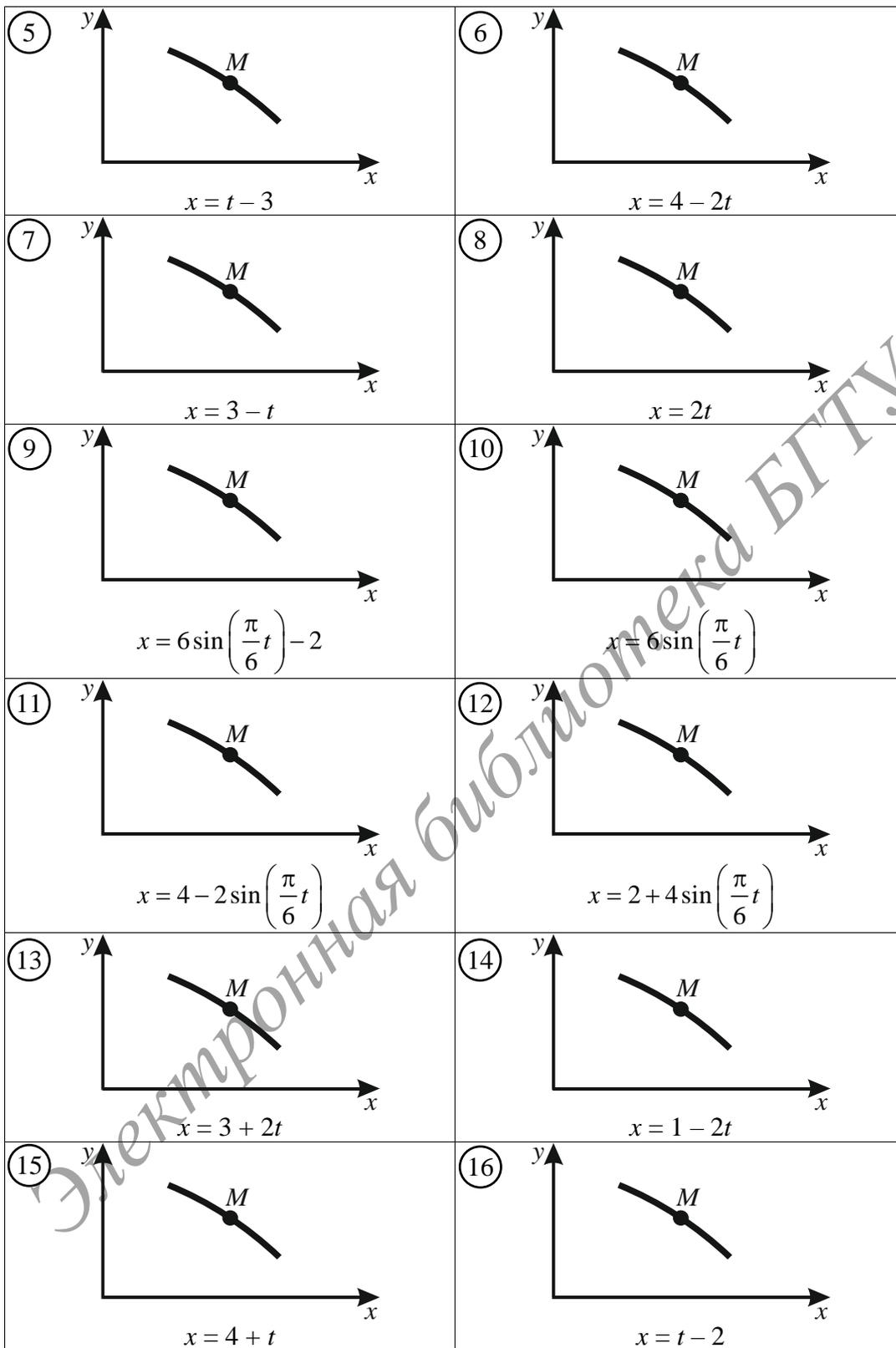


Рис. 40. Движение материальной точки (окончание; начало см. на с. 76)

Индивидуальное задание № 6
Определение скоростей и ускорений точек тела
при поступательном и вращательном движении

Геометрические размеры тел механизма для выполнения индивидуального задания приведены в табл. 8. Механизм состоит из груза 1 и колес 2, 3 и 4, находящихся в зацеплении (зубчатое зацепление) или связанных с помощью ремня (рис. 41). Задан закон движения одного из тел. При этом положительными считаются движение груза вниз и вращение тела против часовой стрелки.

Требуется.

Определить кинематические характеристики всех тел и указанной в табл. 8 точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

Установить вид движения указанной точки.

Таблица 8

Поступательное и вращательное движение

Номер строки	r_2 , см	R_2 , см	r_3 , см	R_3 , см	R_4 , см	Закон движения	Точка
1	14	23	14	19	19	$z_1 = 4t \sin(\pi t / 4)$	A
2	9	15	14	20	18	$\varphi_2 = 4e^{2t}$	B
3	14	18	10	14	28	$\varphi_3 = 6t^3 + 2t$	A
4	15	21	12	16	19	$\varphi_4 = t^3 \cos(4t)$	B
5	11	19	9	14	23	$z_1 = 5t - t^3$	A
6	15	25	14	21	27	$\varphi_2 = 3t + t^3$	B
7	13	19	11	15	25	$\varphi_3 = 2(t^2 - 3t)$	A
8	13	18	10	14	26	$\varphi_4 = (3 + 2t)^2$	B
9	8	17	14	21	23	$z_1 = 3t \sin(2t)$	A
10	14	22	11	19	20	$\varphi_2 = t \cdot e^{3t}$	B
11	15	20	11	17	21	$\varphi_3 = 3(t - 3t^2)$	A
12	14	20	10	16	19	$\varphi_4 = 2t^2 + 10e^{-0,5t}$	B
13	13	19	12	20	25	$z_1 = 8t - t^3$	A
14	14	23	13	18	27	$\varphi_2 = 4(3t + 1)^{-1}$	B
15	11	16	10	16	18	$\varphi_3 = 6t \cos(t)$	A
16	15	24	11	16	26	$\varphi_4 = 2 \sin(2t^2)$	B

Номер строки	r_2 , см	R_2 , см	r_3 , см	R_3 , см	R_4 , см	Закон движения	Точка
17	12	18	9	18	24	$z_1 = 0,8t + 0,2e^{-0,8t}$	A
18	8	12	11	18	21	$\varphi_2 = 2t^2 - t^3$	B
19	15	22	9	17	22	$\varphi_3 = 2 \cos(t^3)$	A
20	14	22	11	16	28	$\varphi_4 = (3t + 2)^3$	B
21	8	12	10	14	20	$z_1 = t^2 \cos(2t)$	A
22	14	22	12	16	26	$\varphi_2 = 4t^2 - 10t$	B
23	14	23	10	18	22	$\varphi_3 = 12 \sin(\pi t / 6)$	A
24	9	17	8	17	24	$\varphi_4 = 2t + 8 \cos(\pi t / 4)$	B
25	15	20	9	16	22	$z_1 = 6t \cdot e^{-t}$	A
26	11	20	11	17	18	$\varphi_2 = 2t^3 \sin(2t)$	B
27	9	14	13	20	28	$\varphi_3 = (t^2 - 3t)^2$	A
28	11	18	12	14	27	$\varphi_4 = 3t^3 + 2t$	B
29	10	15	10	16	24	$\varphi_2 = 10 \sin(t^2)$	A
30	11	18	13	17	19	$\varphi_3 = 3 \cos(t^2 - 3t)$	B

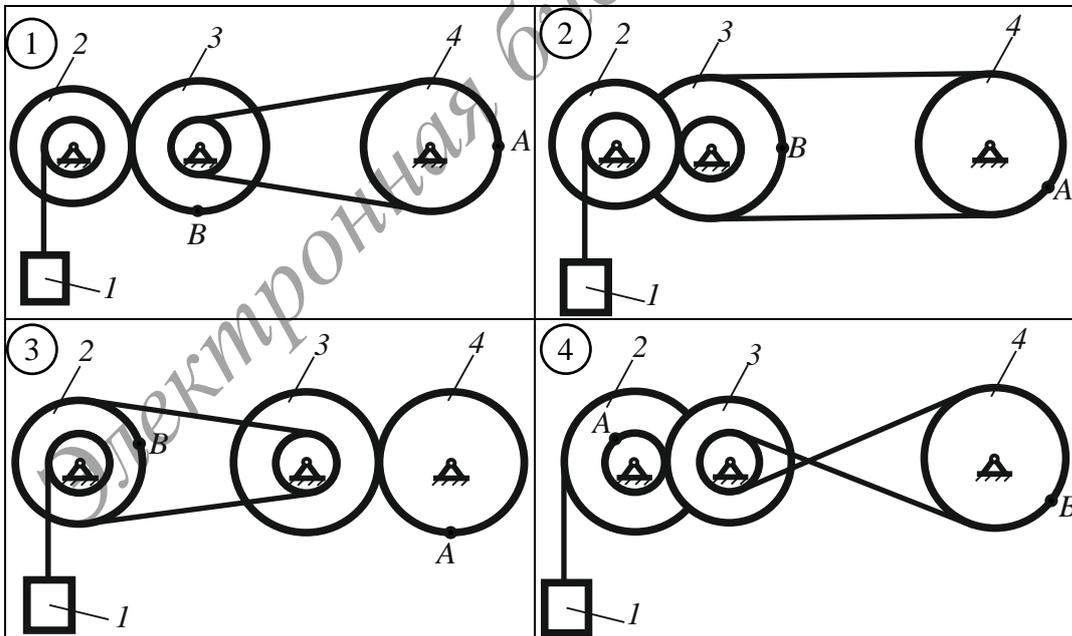


Рис. 41. Простейшие виды движения твердого тела
(начало; окончание см. на с. 80–81)

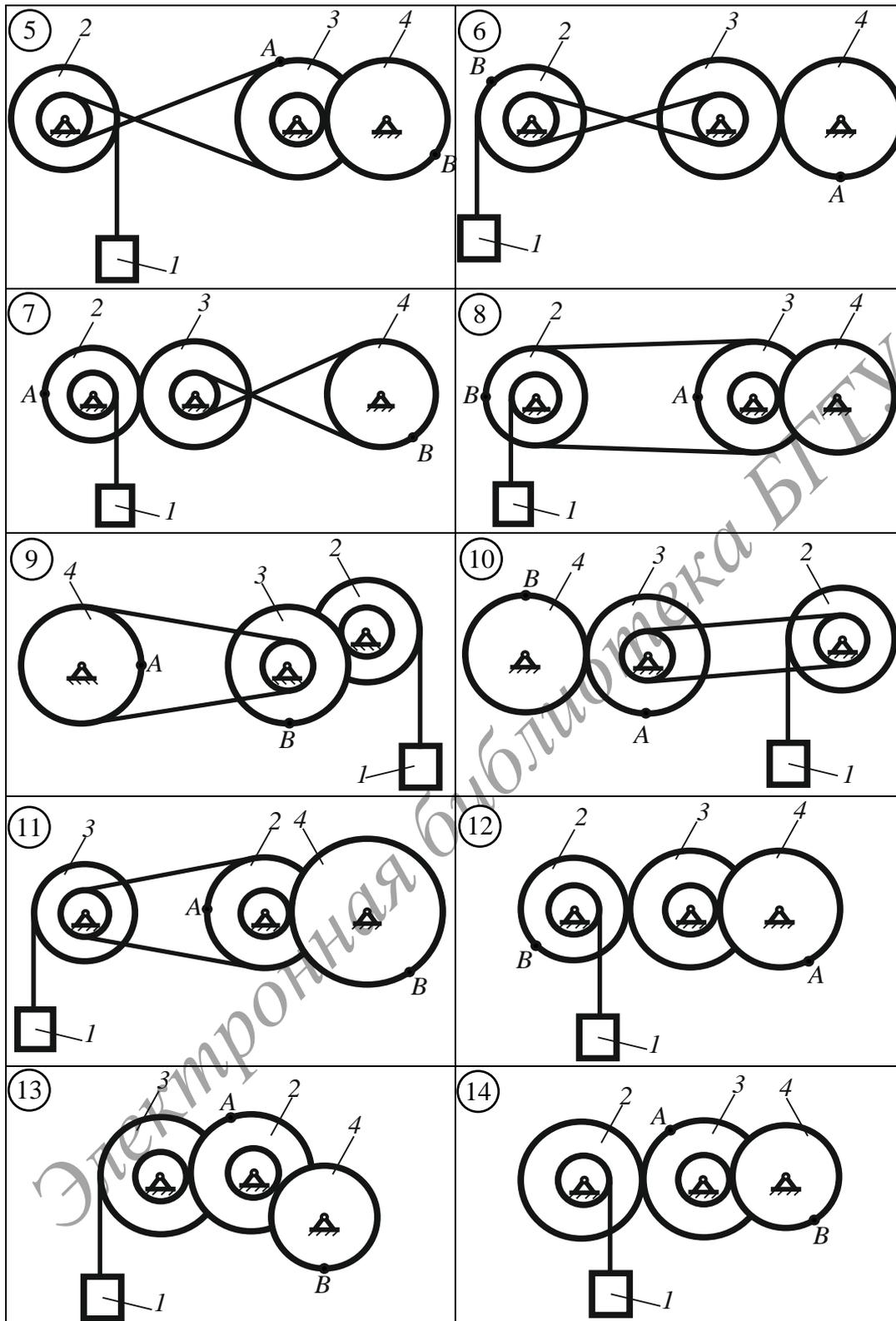


Рис. 41. Простейшие виды движения твердого тела
(продолжение; начало см. на с. 79, окончание на с. 81)

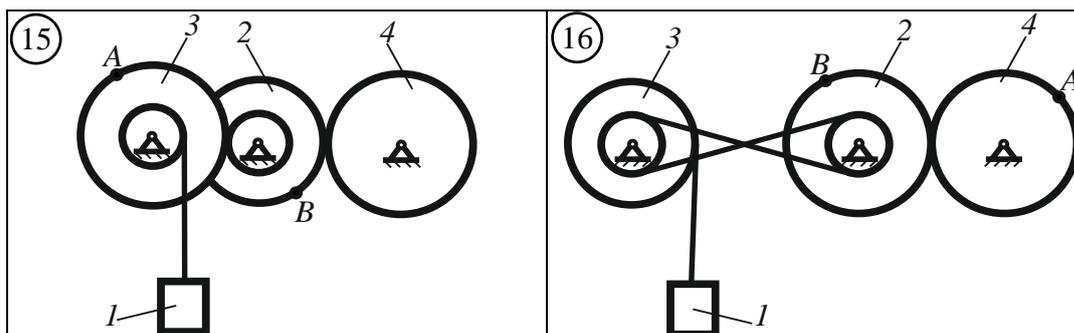


Рис. 41. Простейшие виды движения твердого тела
(окончание; начало см. на с. 79–80)

Пример решения индивидуального задания № 5

Движение точки задано уравнениями $x = 2 \cdot t$, $y = t^2$ (x и y в метрах, t в секундах). Определить уравнение траектории точки, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории в момент времени 1 с.

Решение.

Для определения траектории необходимо исключить из уравнений время. Для этого выразим его из уравнения для x и подставим в уравнение для y .

$$x = 2 \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{2};$$

$$y = t^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}.$$

Данное выражение является уравнением траектории. Тип траектории определяется полученной функцией, в этом случае – квадратичной зависимостью, следовательно, траектория движения – парабола.

Скорость точки определим по ее проекциям на оси координат. Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории, любое другое направление будет указывать на ошибки в расчетах.

Проекции вектора скорости получим, взяв первые производные по времени от соответствующих заданных уравнений движения точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \text{ м/с}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2 \cdot t.$$

В заданный момент времени, равный 1 с, $v_x = 2 \text{ м/с}$, $v_y = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с}$.

Рассчитаем модуль вектора скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,828 \text{ м/с.}$$

По проекциям на оси находим ускорение точки в соответствии с утверждением (36):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0;$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Касательное ускорение определим в момент времени $t = 1$ с по проекциям скорости и ускорения точки на оси координат:

$$a_\tau = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{2,828} = 1,414 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение определяется из равенства

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

откуда

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2^2 - 1,414^2} = 1,414 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории можно найти из выражения для нормального ускорения (см. формулу (38)):

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2,828^2}{1,414} = 5,657 \text{ м.}$$

Из уравнения траектории видно, что она является параболой с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вверх. Однако из исходных данных следует, что координаты x и y точки не могут быть отрицательными, поскольку время t – величина строго положительная. Поэтому траекторией точки является правая ветвь параболы, а левую ветвь покажем пунктирной линией (рис. 42).

Покажем на траектории точку в момент времени 1 с, координаты которой $x(1) = 2$ м, $y(1) = 1$ м. Скорость точки изобразим как векторную сумму ее компонент \mathbf{v}_x и \mathbf{v}_y .

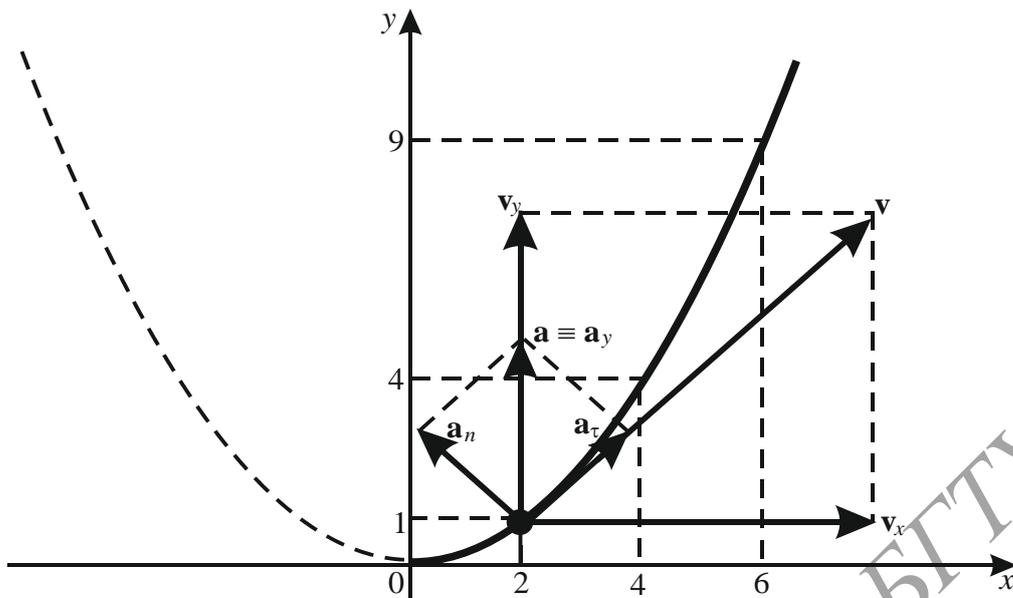


Рис. 42. Траектория движения точки

Здесь стоит напомнить, что вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории. Поскольку проекция ускорения на ось x равна нулю, то ускорение тождественно совпадает с его компонентой a_y . Касательное и нормальное ускорение точки покажем, разложив полное ускорение на касательную (вектор скорости) и нормаль (перпендикуляр к касательной).

Заключение. С учетом того, что v_y и v являются переменными величинами, то a_τ также будет переменной величиной. Кроме того, направления a_τ и v совпадают. Это означает, что точка движется переменным ускорением.

Пример решения задачи индивидуального задания № 6

Механизм состоит из груза 1 и колес $2, 3$ и 4 , находящихся в зацеплении или связанных с помощью ремня (рис. 43). Груз 1 опускается вниз по закону $z_1 = 6t - t^2$. Определить в момент времени $t_1 = 1$ с кинематические характеристики всех тел и точки A , если $r_2 = 10$ см, $R_2 = 15$ см, $r_3 = 12$ см, $R_3 = 20$ см, $r_4 = 10$ см, $R_4 = 25$ см.

Решение.

Груз 1 участвует в поступательном движении, а колеса – во вращательном.

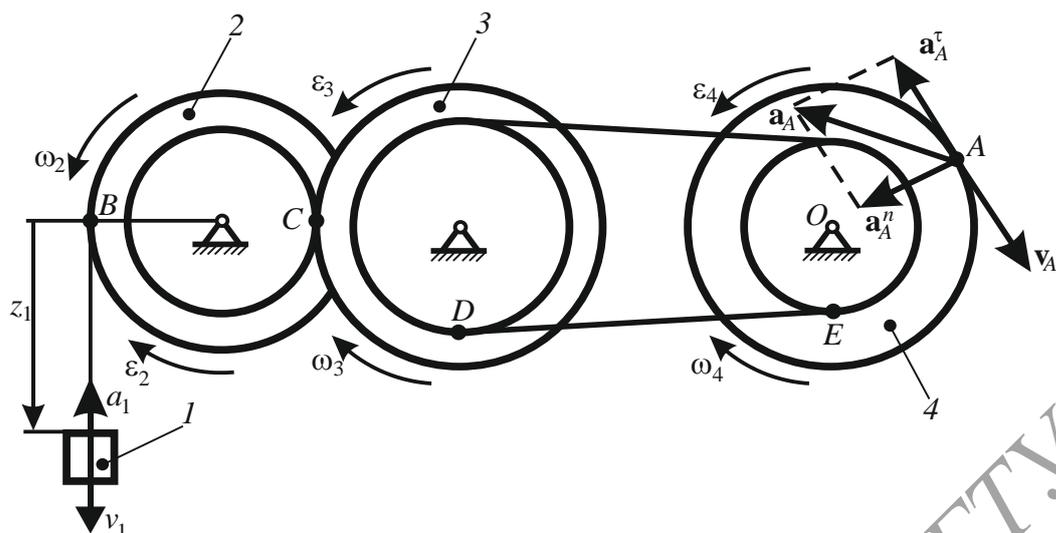


Рис. 43. Схема механизма

Для первого тела, уравнение движения которого задано, определим скорость и ускорение:

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = 6 - 2t; \quad v_1(1) = 6 - 2 \cdot 1 = 4 \text{ м/с};$$

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = -2 \text{ м/с}^2.$$

Значение скорости получили положительное, что говорит о том, что ее направление совпадает с направлением z_1 . Отрицательное значение ускорения означает, что его направление противоположно z_1 . В дальнейших расчетах эти знаки не учитываются.

Поскольку точка B общая для нити и колеса 2, то

$$v_B = v_1 = \omega_2 R_2;$$

$$a_B^r = a_1 = \varepsilon_2 R_2.$$

Тогда для вращательного движения колеса 2

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{4}{0,15} = 26,6 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2} = \frac{-2}{0,15} = -13,3 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ω_2 находим по направлению v_1 , а направление ε_2 по направлению a_1 (рис. 43).

Приравняв скорости и касательные ускорения точек контакта зубчатых колес 2 и 3 (точка C), запишем:

$$v_c \Rightarrow \omega_2 \cdot r_2 = \omega_3 \cdot R_3;$$

$$a_c^\tau \Rightarrow \varepsilon_2 \cdot r_2 = \varepsilon_3 \cdot R_3.$$

Из последних выражений находим:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{26,6 \cdot 0,1}{0,2} = 13,3 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{13,3 \cdot 0,1}{0,2} = 6,65 \text{ рад/с}^2.$$

Определить направления этих величин можно из правила, что зубчатые колеса с внешним зацеплением вращаются в противоположные стороны (рис. 42).

Из равенства скоростей и касательных ускорений точек D и E , связанных ремнем, получим:

$$v_D = v_E \Rightarrow \omega_3 \cdot r_3 = \omega_4 \cdot r_4;$$

$$a_D^\tau = a_E^\tau \Rightarrow \varepsilon_3 \cdot r_3 = \varepsilon_4 \cdot r_4.$$

Откуда

$$\omega_4 = \frac{\omega_3 \cdot r_3}{r_4} = \frac{13,3 \cdot 0,12}{0,1} = 15,96 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_3 \cdot r_3}{r_4} = \frac{6,65 \cdot 0,12}{0,1} = 7,98 \text{ рад/с}^2.$$

Точки D и E имеют одинаковое направление скоростей и касательных ускорений (рис. 43).

Находим скорость и ускорение точки A .

$$v_A = \omega_4 \cdot R_4 = 15,96 \cdot 0,25 = 3,99 \text{ м/с};$$

$$a_A^n = \omega_4^2 \cdot R_4 = 15,96^2 \cdot 0,25 = 63,7 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_4 \cdot R_4 = 7,98 \cdot 0,25 = 1,995 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{63,7^2 + 1,995^2} = 63,73 \text{ м/с}^2.$$

Заключение. Скорость и ускорение в точке A направлены в разные стороны, движение колеса 4 и, соответственно, точки A равнозамедленное.

4. ДИНАМИКА

4.1. Основные теоретические сведения

Динамика – раздел механики, который изучает движение материальных тел, объектов и механических систем под действием приложенных сил.

Силы, действующие на точки механической системы, можно разделить на *внешние*, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы, и *внутренние*, с которыми точки или тела одной системы действуют друг на друга.

Работа является мерой действия силы, приложенной к материальной точке при некотором ее перемещении.

Работа силы определяется произведением модуля вектора силы \mathbf{F} на модуль вектора перемещения \mathbf{S} и на косинус угла между этими векторами.

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = F \cdot S \cdot \cos(\mathbf{F}, \mathbf{S}) = F \cdot S \cdot \cos(\alpha). \quad (49)$$

Частные случаи расчета работы:

- если $\alpha = 0^\circ$, то $A = F \cdot s$;
- если $\alpha = 90^\circ$, то $A = 0$;
- если $\alpha = 180^\circ$, то $A = -F \cdot s$.

Итак, работа положительна, если направления силы и перемещения совпадают (или $\alpha < 90^\circ$); работа отрицательна, если направления силы и перемещения противоположны (или $\alpha > 90^\circ$); работа равна нулю, когда направления силы и перемещения взаимно перпендикулярны.

При вращательном движении работа определяется суммой элементарных работ сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равной произведению главного момента M внешних сил относительно оси вращения на приращение угла поворота φ . На рис. 44, а сила \mathbf{F} совершает работу на элементарном перемещении $d\mathbf{S}$, поворачивая тело на элементарный угол $d\varphi$. При заданных углах поворота вращение определяется их начальным и конечным значениями (рис. 44, б).

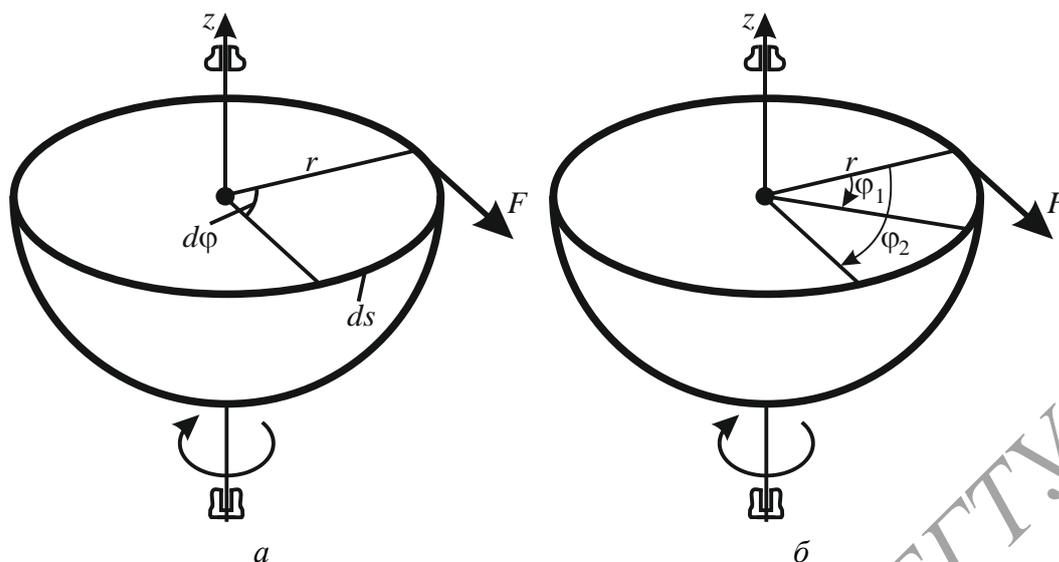


Рис. 44. Схема для определения работы при вращательном движении из состояния покоя (а) и от начального угла поворота (б)

Работа момента при этом определяется выражением:

$$A_{1,2} = \pm \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi, \quad (50)$$

где φ_1 и φ_2 – начальный и конечный угол поворота соответственно.

Знак «+» принимаем в случае, если направление момента совпадает с направлением вращения тела.

Если главный момент внешних сил M относительно оси z постоянный, то сумма работ на конечном угловом перемещении равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на конечное изменение угла поворота тела.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, а определяется только расстоянием по вертикали между начальной и конечной точками перемещения:

$$A_T = m \cdot g \cdot (z_2 - z_1), \quad (51)$$

где m – масса тела; g – ускорение свободного падения; z_1, z_2 – координаты начального и конечного вертикального положения центра тяжести (рис. 45).

Если точка перемещается сверху вниз, то работа силы тяжести положительная (рис. 45, а), если точка перемещается снизу вверх, то работа силы тяжести отрицательная (рис. 45, б).

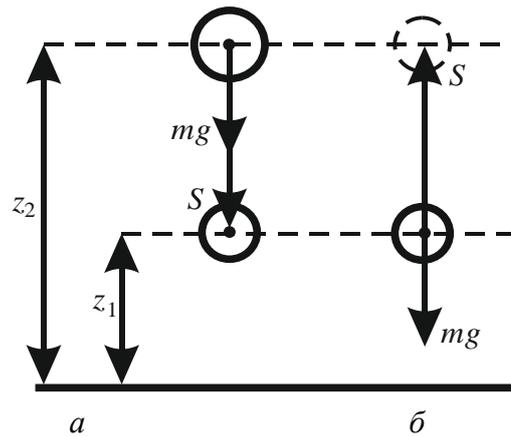


Рис. 45. Работа силы тяжести (пояснения по тексту)

Работа силы упругости равна половине произведения жесткости упругого тела на разность квадратов его начальной и конечной деформации:

$$A_{F_{\text{упр}}} = -\frac{c}{2} \cdot (\lambda_2^2 - \lambda_1^2), \quad (52)$$

где c – коэффициент жесткости пружины; λ_2 , λ_1 – конечная и начальная деформация упругого элемента (пружины) соответственно (рис. 46).

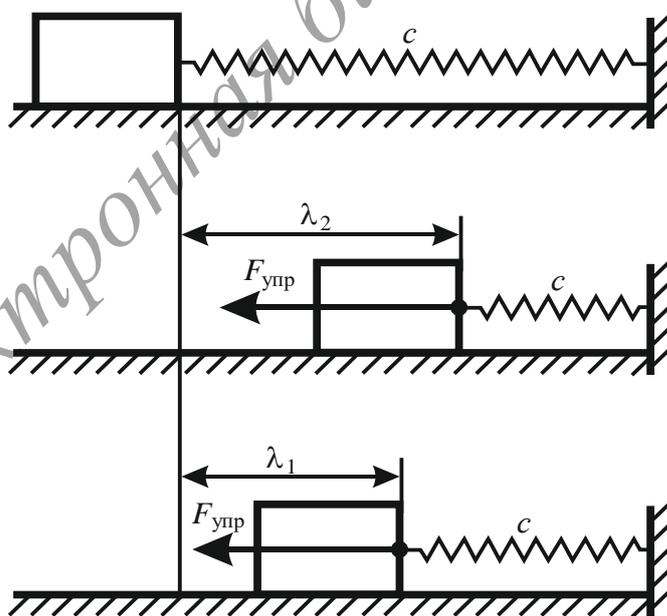


Рис. 46. Работа сил упругости

Работа силы тяжести и силы упругости не зависит от траектории движения, а только от начального и конечного положения центра тяжести тела и на замкнутом пути равна нулю. *Кинетической энергией*, или энергией движения, называется энергия, которой обладает всякая материальная точка при движении. Кинетическая энергия есть динамическая мера движения материальной точки.

Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}, \quad (53)$$

где m – масса точки; v – скорость точки.

Кинетическая энергия – величина скалярная и всегда положительная.

Кинетическая энергия *механической системы* определяется как сумма кинетических энергий всех точек системы.

$$T = \sum \frac{m_k \cdot v_k^2}{2}, \quad (54)$$

где m_k и v_k – масса и скорость k -й материальной точки, принадлежащей данной системе соответственно.

Для поступательного движения кинетическая энергия определяется выражением (53), с учетом того, что все точки тела имеют одинаковые скорости.

Для вращательного движения тела относительно неподвижной оси, проходящей через его центр масс, кинетическая энергия равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

$$T = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}, \quad (55)$$

где ω – угловая скорость вращения тела; J_z – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей в данный момент времени через центр масс.

Для произвольного движения, например плоскопараллельного, из кинематики известно, что плоскопараллельное движение твердого тела в каждый данный момент можно рассматривать как два одновременных движения: поступательное и вращательное вокруг оси, проходящей через центр масс. Тогда кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий в поступательном

движении вместе с центром масс и вращательном движении вокруг центральной оси, перпендикулярной плоскости, в которой движется тело:

$$T = \frac{m \cdot v_c^2}{2} + \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}. \quad (56)$$

Мерой инертности тела при вращательном движении является *осевой момент инерции* (J_z), а при поступательном – масса (m).

Момент инерции тела при вращении – величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до оси, относительно которой происходит вращение:

$$J_z = \sum (m_i \cdot r_i^2), \quad (57)$$

где m_i – масса i -той точки; r_i – расстояние от i -той точки до оси.

Моменты инерции однородных тел простейшей формы относительно некоторых осей вращения представлены в прил. 5.

Для составного тела вводят понятие радиуса инерции i_z – расстояние от оси z до точки, в которой нужно сосредоточить массу тела, чтобы момент инерции точки относительно этой оси равнялся моменту инерции тела. Тогда момент инерции составного тела определяется как

$$J_z = m \cdot i_z^2. \quad (58)$$

Связь между кинетической энергией и работой устанавливает *теорема об изменении кинетической энергии*, которая связывает кинетическую энергию механической системы с работой сил, действующих на тела, составляющие систему.

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ *внешних и внутренних* сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении:

$$T - T_0 = \sum A^e + \sum A^i, \quad (59)$$

где T, T_0 – кинетическая энергия системы в конечном и начальном ее положении соответственно; A^e, A^i – работа внешних и внутренних сил соответственно; $\sum A^i = 0$, если рассматриваются абсолютно твердые тела.

4.2. Последовательность решения задач на изучение движения механической системы

1. В механической системе определить вид движения каждого тела: поступательное, вращательное, плоскопараллельное.

2. Записать выражение для изменения кинетической энергии для механической системы в общем виде.

3. Записать и определить составляющие кинетической энергии для каждого тела, учитывая вид его движения. Определить общую кинетическую энергию системы.

4. Определить работу каждой силы при перемещении тел системы и суммарное значение работы сил системы.

5. Из теоремы об изменении кинетической энергии системы определить значение требуемой скорости.

Индивидуальное задание № 7

Изучение движения механической системы

Механическая система, показанная на рис. 47, движется из состояния покоя под действием силы F и момента M .

Блоки, показанные одним кругом, считать однородными дисками, показанные двумя concentric circles – составными блоками. Принять качение блоков без проскальзывания. Нити, связывающие тела, считать нерастяжимыми.

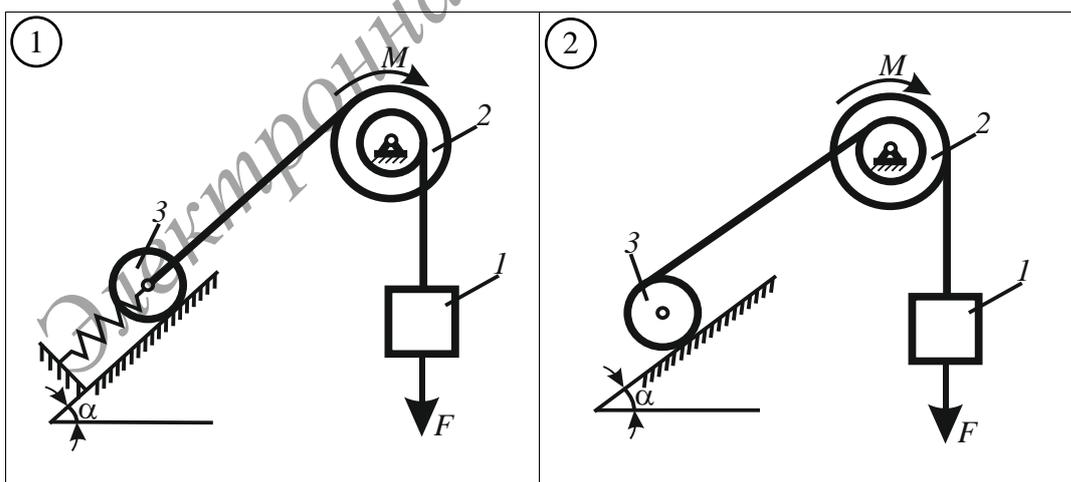


Рис. 47. Движение механической системы (начало, окончание см. на с. 92–93)

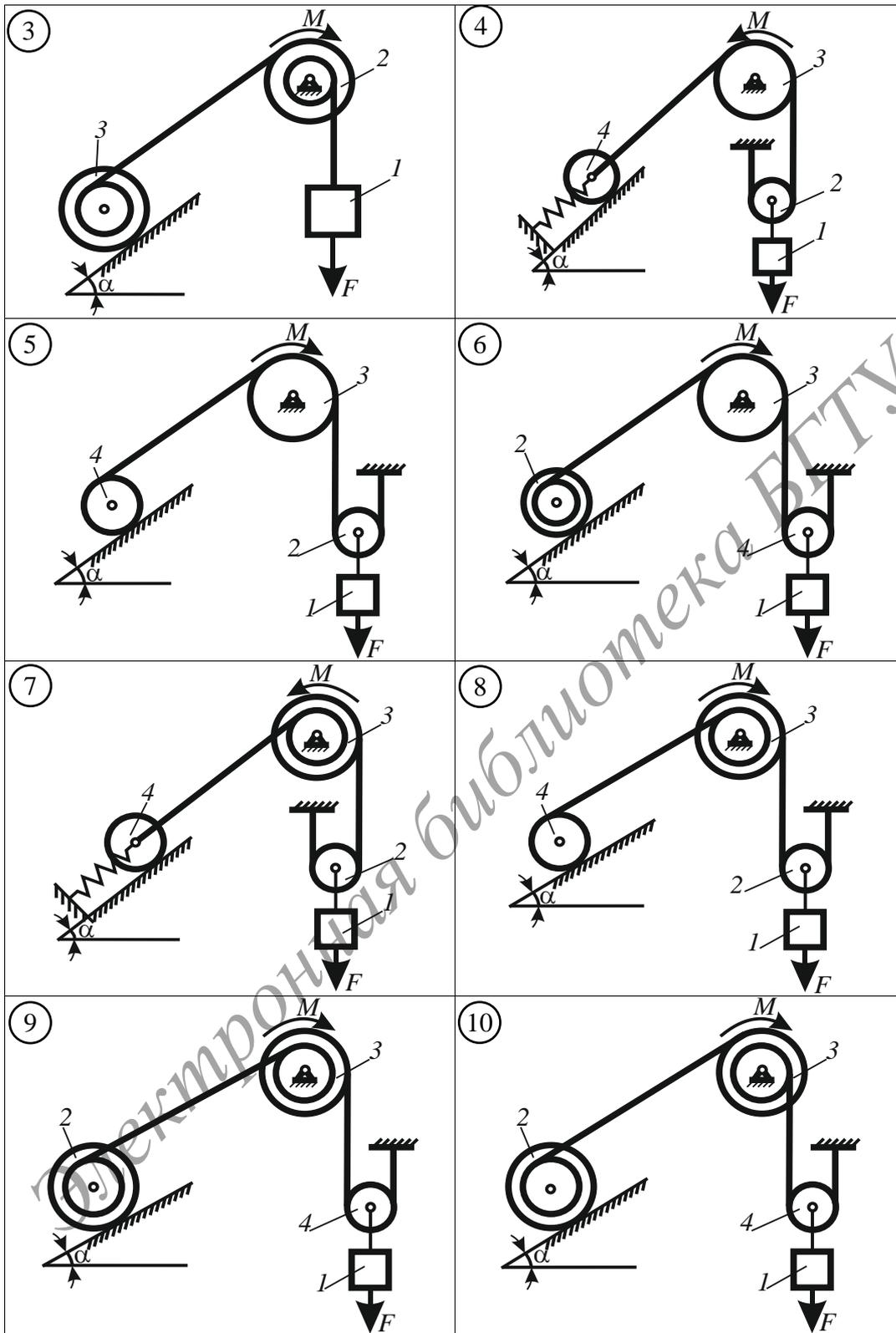


Рис. 47. Движение механической системы (продолжение; начало см. с. 91, окончание на с. 93)

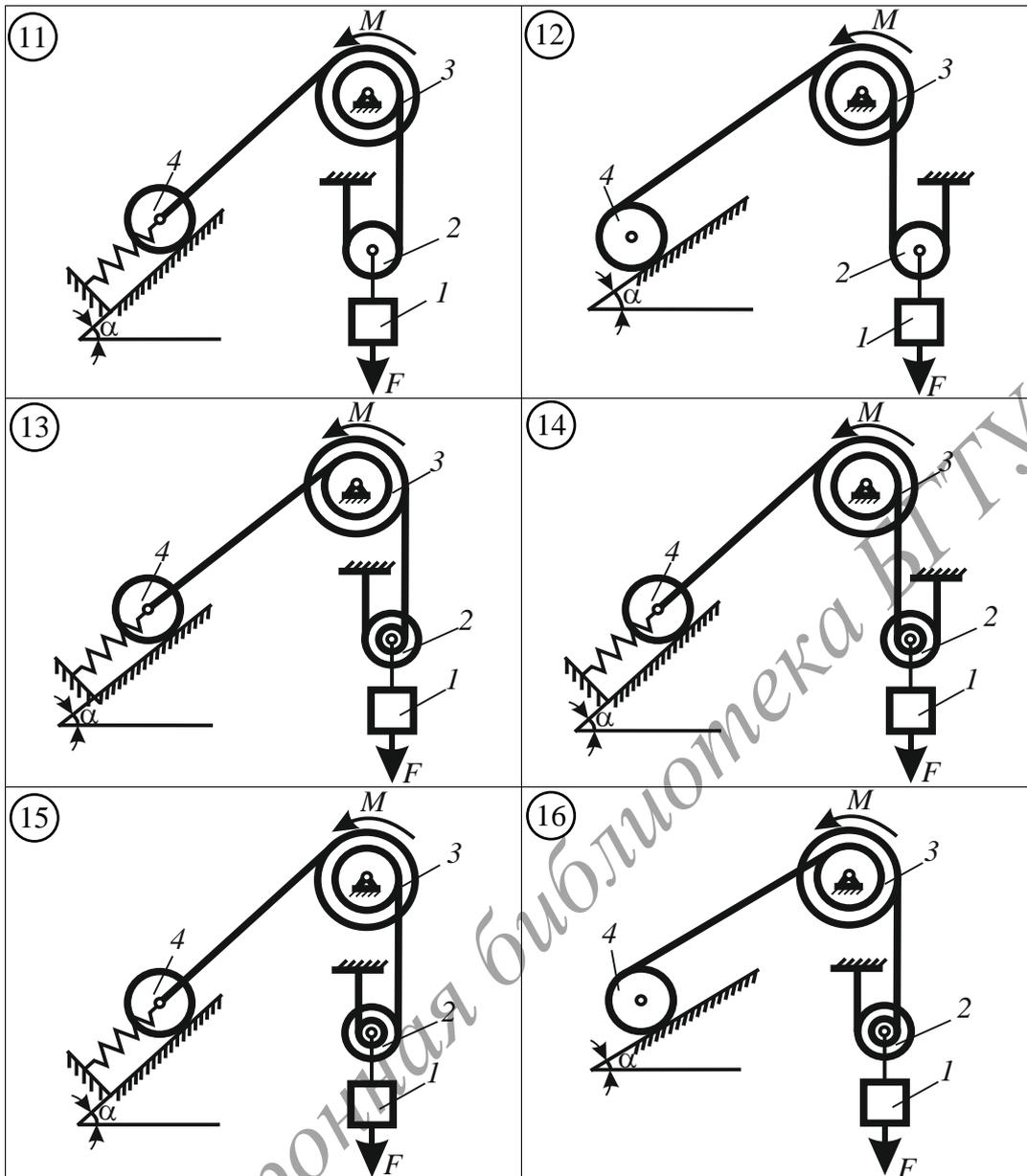


Рис. 47. Движение механической системы
(окончание, начало см. на с. 91–92)

$R_2, r_2, R_3, r_3, R_4, r_4$ – радиусы соответствующих блоков и дисков;
 i_{2x}, i_{3x} – радиусы инерции соответствующих составных блоков 2 и 3
 (для заданной схемы выбирают только те размеры, которые соответствуют используемым в системе телам); f – коэффициент трения скольжения груза 1 по наклонной поверхности; s_1 – расстояние, на которое перемещается груз 1 за время движения системы от состояния покоя; c – жесткость упругого элемента.

Требуется.

Определить скорость груза l после его перемещения на заданное расстояние. Исходные данные выбирают из табл. 9.

Таблица 9

Движение механической системы

Номер строки	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	r_2 , см	R_2 , см	r_3 , см	R_3 , см	r_4 , см	R_4 , см	$i_{2,3}$, см	$i_{3,3}$, см	F , Н	c , Н/м	M , Н·м	s_1 , см	α , град
1	3	2	1	1	10	14	12	14	14	16	12	13	100	61	10	20	20
2	4	3	2	2	12	15	16	18	10	14	14	17	150	65	4φ	15	30
3	1	2	3	4	16	18	14	17	12	15	17	15	180	73	2φ	20	25
4	2	4	4	1	14	17	10	14	15	18	15	12	200	66	12	25	40
5	5	7	2	3	13	16	11	15	18	20	15	13	110	64	3φ	20	60
6	6	5	3	5	11	15	13	16	13	16	13	15	130	72	6	25	55
7	3	1	4	2	15	18	15	17	14	16	16	16	140	61	8	15	35
8	2	6	4	7	18	20	10	14	15	18	19	12	120	78	5φ	20	25
9	8	4	2	6	13	16	12	16	16	20	15	14	100	69	6φ	25	55
10	4	3	3	1	12	14	16	18	12	15	13	17	190	80	1	15	45
11	5	5	6	3	10	13	15	19	10	13	12	17	170	62	4	15	45
12	7	6	1	4	11	17	10	16	11	14	14	13	160	75	7φ	20	50
13	1	2	5	5	16	18	14	18	13	17	17	16	120	74	5	25	20
14	3	8	4	2	12	16	13	16	14	17	14	14	130	72	4	20	30
15	5	7	7	6	18	20	15	18	16	18	16	16	100	67	2φ	15	45
16	6	1	4	8	14	16	12	16	10	14	15	14	150	60	4φ	25	50
17	2	5	3	1	13	17	11	15	11	13	15	13	110	63	10φ	10	20
18	9	6	6	3	15	19	14	17	12	15	17	15	140	72	5	15	35
19	7	8	4	7	17	20	13	16	14	16	18	15	170	67	2φ	25	40
20	4	2	2	8	10	14	17	19	13	15	12	18	180	78	4	20	60
21	6	3	1	2	12	16	18	20	15	17	14	19	190	65	5φ	15	50
22	5	7	5	4	11	13	15	18	16	18	12	17	200	69	3φ	20	55
23	3	9	7	6	14	18	12	16	17	19	16	14	100	74	2φ	25	35
24	8	1	2	5	18	20	13	15	12	17	19	14	130	71	7	15	45
25	1	2	9	3	15	17	10	13	14	16	16	12	140	79	4φ	10	25
26	7	5	4	5	14	19	11	14	13	15	16	13	170	80	9	15	50
27	4	7	1	7	18	20	14	16	15	17	19	15	150	60	5φ	25	30
28	2	9	6	2	17	19	17	19	10	14	18	18	110	65	6φ	20	25
29	1	8	8	1	12	16	15	20	11	16	14	17	120	62	2	10	50
30	4	2	3	8	10	13	10	14	13	20	12	12	100	74	8φ	15	35

 **Пример решения задачи индивидуального задания № 7**

Механическая система (рис. 48) движется из состояния покоя под действием сил тяжести G_1 , приложенной силы $F = 100$ Н, силы упругости пружины и момента $M = 4\varphi_2$.

Определить скорость груза I после его перемещения на $S_1 = 15$ см. Известно, что $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 1$ кг, $m_4 = 1$ кг, $r_2 = 15$ см, $r_3 = 10$ см, $R_3 = 20$ см, $\alpha = 30^\circ$, $c = 70$ Н/м, $i_{3x} = 12$ см, $f = 0,1$.

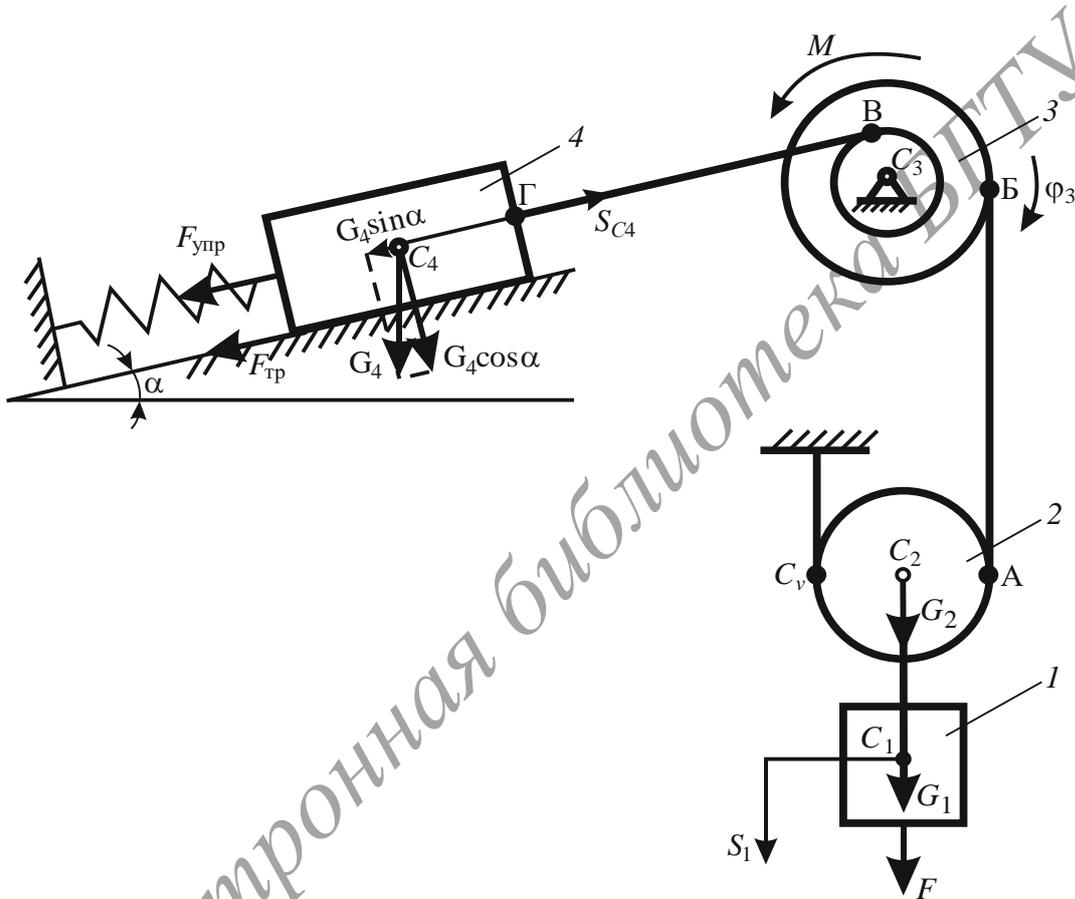


Рис. 48. Механическая система

Решение.

Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы (59):

$$T - T_0 = \sum A^e + \sum A^i.$$

В начальный момент система неподвижна, поэтому $T_0 = 0$. Считаем, что трос во время движения не растягивается, а все

материальные объекты – абсолютно твердые, тогда работа внутренних сил равна нулю:

$$\sum A^i = 0.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы после перемещения груза 1 на расстояние S_1 равна работе всех внешних сил системы:

$$T = \sum A^e.$$

Кинетическая энергия системы определяется суммой кинетических энергий всех тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Груз 1 движется поступательно. Скорость его центра тяжести C_1 равна v_1 , тогда кинетическая энергия тела 1 с учетом его массы:

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} = 3 \cdot \frac{v_1^2}{2}.$$

Блок 2 (однородный диск) участвует в плоскопараллельном движении. Груз 1 связан с помощью нерастяжимой нити с центром диска C_2 , поэтому любые изменения положения и скорости перемещения груза 1 передаются к центру колеса 2 :

$$v_{C2} = v_1,$$

где v_{C2} – скорость центра масс диска 2 .

Поворот тела 2 происходит относительно мгновенного центра скоростей C_v . Угловая скорость определяется по скорости центра колеса C_2 и кратчайшему расстоянию до точки C_v (радиус r_2).

$$\omega_2 = \frac{v_{C2}}{r_2} = \frac{v_1}{r_2}.$$

Тогда кинетическая энергия тела 2

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{I_{C2} \cdot \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{C2}^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 \cdot r_2^2}{2} \cdot \left(\frac{v_1}{r_2} \right)^2 + \frac{m_2 \cdot v_1^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot v_1^2}{2} + \frac{2 \cdot v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot v_1^2 + v_1^2 = \frac{3}{2} \cdot v_1^2, \end{aligned}$$

где I_{C2} – момент инерции тела 2 относительно центра диска.

Составной блок 3 участвует во вращательном движении. Скорость точки А (общая для диска 2 и нити) равна скорости точки Б (общая точка для составного блока 3 и нити). Точки Б и В составного блока 3 лежат на большем и меньшем радиусе соответственно. Скорость точки А определяется через угловую скорость тела 2:

$$\omega_2 = \frac{v_{c2}}{r_2} = \frac{v_1}{r_2} = \frac{v_A}{2 \cdot r_2},$$

тогда

$$v_A = 2 \cdot v_1.$$

Кинетическая энергия тела 3

$$T_3 = \frac{I_{c3} \cdot \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \cdot i_{3x}^2}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot v_1}{R_3} \right)^2 = \frac{1 \cdot 0,12^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot v_1^2}{0,2^2} = 1,44 \cdot \frac{v_1^2}{2}.$$

Груз 4, с одной стороны удерживаемый упругим элементом, с другой стороны связанный с малым колесом составного блока 3, движется поступательно. Скорость точки В определяется угловой скоростью тела 3:

$$v_A = v_B = 2 \cdot v_1;$$

$$\omega_3 = \frac{v_B}{R_3} = \frac{v_B}{r_3};$$

$$v_B = \frac{r_3 \cdot v_B}{R_3} = \frac{0,1 \cdot v_B}{0,2} = 0,5 \cdot v_B = 0,5 \cdot 2 \cdot v_1 = v_1;$$

$$v_{\Gamma} = v_B = v_1.$$

Так как тело 4 движется поступательно, скорости всех его точек равны и направлены в одну сторону. Тогда скорость точки равна скорости центра тяжести груза:

$$v_{\Gamma} = v_{C4} = v_1.$$

Кинетическая энергия тела 4

$$T_4 = \frac{m_4 \cdot v_{C4}^2}{2} = \frac{1 \cdot v_1^2}{2} = \frac{v_1^2}{2}.$$

Тогда кинетическая энергия системы

$$T = 3 \cdot \frac{v_1^2}{2} + 3 \cdot \frac{v_1^2}{2} + 1,44 \cdot \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} = 8,44 \cdot \frac{v_1^2}{2} = 4,22 \cdot v_1^2.$$

Из всех внешних сил, которые показаны на схеме механизма, при перемещении груза 1 на величину S_1 вниз по вертикали работу выполняют $G_1, G_2, G_4, F_{\text{тр}}, F_{\text{упр}}, F$ и момент M .

Направление вектора силы тяжести совпадает с положительным направлением перемещения S_1 , и поэтому работа положительна.

$$A_{G1} = m_1 \cdot g \cdot S_1 = 3 \cdot 9,81 \cdot 0,15 = 4,41 \text{ Дж.}$$

Центр тяжести C_2 тела 2 жестко связан с центром C_1 тела 1 , поэтому работа силы тяжести тела 2 также положительная и выполняется на перемещении S_1 :

$$A_{G2} = m_2 \cdot g \cdot S_1 = 2 \cdot 9,81 \cdot 0,15 = 2,94 \text{ Дж.}$$

Момент M направлен в сторону, обратную углу поворота φ_3 тела 3 , поэтому его работа будет отрицательной.

Работа момента зависит от угла поворота тела, к которому приложен момент и определяется в соответствии с (49).

$$A_{M3} = - \int_{\varphi}^{\varphi_3} M \cdot d\varphi_3 = - \int_0^{\varphi_3} 4 \cdot \varphi_3 \cdot d\varphi_3 = - \frac{4 \cdot \varphi_3^2}{2} = -2 \cdot \varphi_3^2.$$

Зависимость между углом поворота составного блока 3 φ_3 и перемещением S_1 аналогична зависимости между скоростью v_1 и угловой скоростью ω_3 согласно

$$\omega_3 = \frac{2 \cdot v_1}{R_3}; \quad \varphi_3 = \frac{2 \cdot S_1}{R_3}.$$

Тогда работа момента

$$A_{M3} = -2 \cdot \varphi_3^2 = -2 \cdot \left(\frac{2 \cdot S_1}{R_3} \right)^2 = - \frac{8 \cdot S_1^2}{R_3^2} = - \frac{8 \cdot 0,15^2}{0,2^2} = -4,5 \text{ Дж.}$$

Сила тяжести G_4 тела 4 направлена вертикально вниз от центра тяжести C_4 и имеет две составляющие, направленные вдоль опорной поверхности и перпендикулярно ей (рис. 48).

Составляющая силы тяжести, параллельная опорной плоскости, всегда выполняет работу при перемещении тела по наклонной поверхности и, в зависимости от направления S_1 , может быть положительной или отрицательной. В рассматриваемом случае угол между G_4 и S_{C4} тупой, поэтому работа G будет отрицательной.

Проекция на ось, перпендикулярную опорной поверхности, никогда не выполняет работу при перемещении тела по наклонной поверхности, в соответствии с (1) косинус угла между направлением проекции и силы и перемещением равен нулю.

Скорость центра тяжести C_4 тела v_{C_4} равна v_1 . Между перемещениями центров тяжести тел существует зависимость, аналогичная зависимости между скоростями:

$$v_{C_4} = v_1; S_{C_4} = S_1.$$

Тогда работа силы тяжести тела 4

$$\begin{aligned} A_{G_4} &= -m_3 \cdot g \cdot S_4 \cdot \sin \alpha = -m_3 \cdot g \cdot S_1 \cdot \sin \alpha = \\ &= -1 \cdot 9,81 \cdot 0,15 \cdot 0,5 = -0,74 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

В момент перемещения тела 1 вниз на расстояние S_1 тело на наклонной поверхности перемещается вверх, при этом возникает сила трения $F_{\text{тр}}$, направленная противоположно смещению, поэтому работа сил трения всегда величина отрицательная. Сила трения определяется произведением нормальной реакции опоры на коэффициент трения. Нормальная реакция определяется соответствующей составляющей силы G_4 (рис. 48).

Работа силы трения

$$\begin{aligned} A_{F_{\text{тр}}} &= -F_{\text{тр}} \cdot S_4 = -G_4 \cdot \cos \alpha \cdot f \cdot S_4 = -m_4 \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot f \cdot S_1 = \\ &= -1 \cdot 9,81 \cdot 0,866 \cdot 0,1 \cdot 0,15 = -0,13 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

При перемещении тела 1 на расстояние S_1 происходит деформация пружины на величину S_{C_4} , что вызывает возникновение силы упругости $F_{\text{упр}}$, которая стремится вернуть пружину в недеформированное состояние. Направление силы противоположно перемещению S_{C_4} , а деформация упругого элемента соответствует перемещению центра тяжести C_4 тела 4, равному S_1 :

$$A_{F_{\text{упр}}} = -\frac{c \cdot S_4^2}{2} = -\frac{c \cdot S_1^2}{2} = -\frac{70 \cdot 0,15^2}{2} = -0,79 \text{ Дж.}$$

Направление вектора силы F совпадает с положительным направлением перемещения S_1 , и поэтому работа положительна:

$$A_F = F \cdot S_1 = 100 \cdot 0,15 = 15 \text{ Дж.}$$

Полная работа всех внешних сил

$$\begin{aligned} A^e &= A_{G1} + A_{G2} + A_{M3} + A_{G4} + A_{F_{тр}} + A_{F_{упр}} + A_F = \\ &= 4,41 + 2,94 - 4,5 - 0,74 - 0,13 - 0,79 + 15 = 16,19 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Подставив все величины в исходное выражение, получим

$$4,22 \cdot v_1^2 = 16,19.$$

Скорость из полученного равенства

$$v_1 = \sqrt{\frac{16,19}{4,72}} = 1,96 \text{ м/с.}$$

Заключение. Тело 1 будет перемещаться со скоростью, равной $1,96 \text{ м/с}$, вниз после его перемещения на расстояние S_1 из состояния покоя под действием сил $G_1, G_2, G_4, F, F_{упр}, F_{тр}, F$ и момента M .

Электронная библиотека БГТУ

Приложение 1

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра механики и конструирования

РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА № _____

по дисциплине «Прикладная механика»

Шифр: рисунок _____, строка _____

Выполнил:

студент _____ курса _____ гр.

ф-та _____ спец. _____,

(Ф.И.О.)

Проверил:

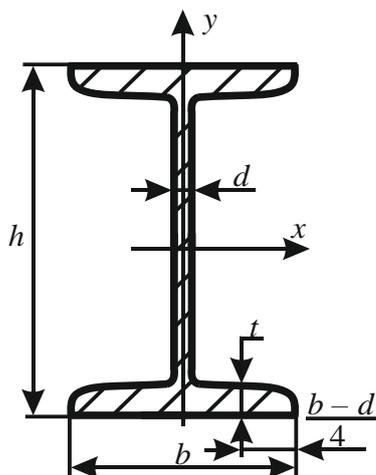
(должность, Ф.И.О.)

Минск (год)

Приложение 2

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)

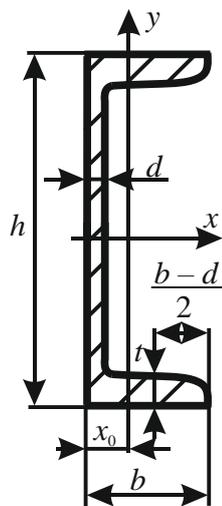


A – площадь поперечного сечения;
 W – момент сопротивления;
 I – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 m – масса одного погонного метра.

Таблица П2.1

№ П/П	h , м	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	m , кг	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1725,0	182,00	3,54

Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240–89)

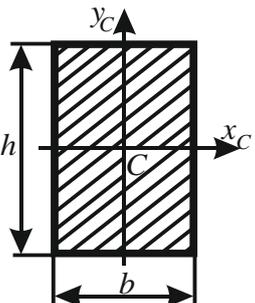
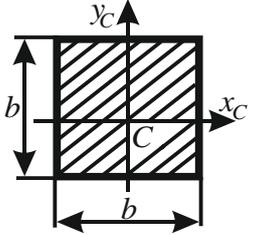
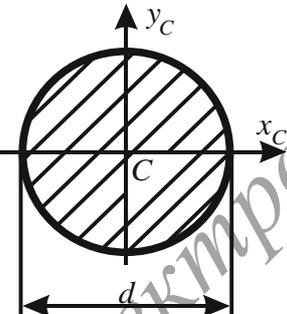


A – площадь поперечного сечения;
 W – момент сопротивления;
 I – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 m – масса одного погонного метра.

Таблица П2.2

№ П/П	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	m , кг	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,84	22,8	9,10	1,92	5,61	2,75	0,945	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,60	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	13,3	545	77,8	5,66	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	15,3	823	103	6,49	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,3	17,4	1190	132	7,32	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	139	21,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21,0	2110	192	8,89	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,90	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	245	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10200	601	14,2	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	642	73,4	3,23	2,75

Приложение 3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЫХ СЕЧЕНИЙ

Форма поперечного сечения	Площадь	Моменты инерции	Моменты сопротивления
	$A = b \cdot h$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12};$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6};$ $W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6}$
	$A = b^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$
	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$

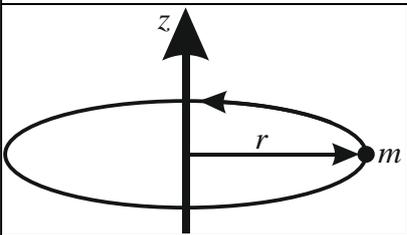
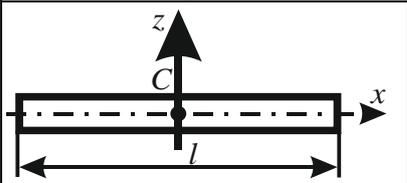
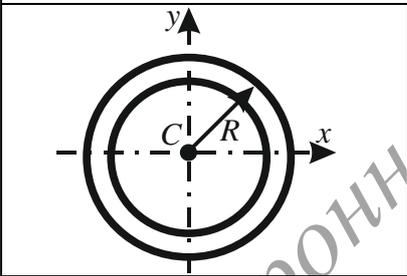
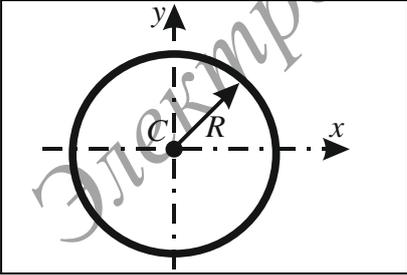
Приложение 4 СТАНДАРТНЫЙ РЯД ДИАМЕТРОВ ВАЛОВ

10; 10,5; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26;
28; 30; 32; 33; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80;
85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130 и далее через 10 мм.

Электронная библиотека БГТУ

Приложение 5

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЫХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ОСЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Тело	Описание	Положение оси вращения	Момент инерции
	Материальная точка массой m	На расстоянии r от точки	$J_z = m \cdot R^2$
	Прямой тонкий стержень длиной l и массой m	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его центр масс	$J_z = \frac{ml^2}{12}$
	Полый тонкостенный цилиндр или кольцо радиусом R и массой m	Ось цилиндра	$J_z = m \cdot R^2$
	Сплошной цилиндр или диск радиусом R и массой m	Ось цилиндра	$J_z = \frac{mR^2}{2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Хвясцько, Г. М. Курс тэарэтычнай механікі / Г. М. Хвясцько. – Мінск: БДТУ, 2000. – 353 с.
2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. – 2 т.
3. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для вузов / С. М. Тарг. – 15-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 416 с.
4. Мещерский, И. В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский. – 38-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с.
5. Аркуша, А. И. Руководство к решению задач по теоретической механике: учеб. пособие / А. И. Аркуша. – М.: Высш. шк., 2002. – 354 с.
6. Аркуша, А. И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов: учеб. пособие / А. И. Аркуша. – М.: Высш. шк., 2002. – 354 с.
7. Вереина, Л. И. Техническая механика: учебник / Л. И. Вереина, М. М. Краснов. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 288 с.
8. Ицкович, Г. М. Сопротивление материалов: учебник / Г. М. Ицкович. – М.: Высш. шк., 2001. – 386 с.
9. Вольмир, А. С. Сопротивление материалов / А. С. Вольмир, Ю. П. Григорьев, А. И. Станкевич. – М.: Дрофа, 2007. – 592 с.
10. Ицкович, Г. М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Винокуров. – М.: Высш. шк., 1999. – 592 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ.....	4
ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.....	5
1. СТАТИКА	7
1.1. Основные теоретические сведения	7
1.2. Последовательность решения задач на равновесие тела под действием системы сил	14
<i>Индивидуальное задание № 1. Определение реакций опор твердого тела при воздействии плоской произвольной системы сил</i>	14
Пример решения задачи индивидуального задания № 1	18
2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ	21
2.1. Основные теоретические сведения	21
2.2. Центральное растяжение (сжатие).....	23
2.2.1. Правила построения системы в деформированном состоянии	25
2.2.2. Последовательность решения задач на растяжение (сжатие).....	28
<i>Индивидуальное задание № 2. Расчет на прочность и жесткость при растяжении</i>	28
Пример решения задачи индивидуального задания № 2	31
2.3. Плоский изгиб	36
2.3.1. Правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	38
2.3.2. Последовательность решения задач с подбором сечений (проектный расчет)	41
<i>Индивидуальное задание № 3. Поперечный изгиб</i>	42
Пример решения задачи индивидуального задания № 3	45

2.4. Кручение	51
Последовательность решения задач на прочность и жесткость при кручении	55
<i>Индивидуальное задание № 4. Расчет на прочность и жесткость при кручении</i>	56
Пример решения задачи индивидуального задания № 4	59
3. КИНЕМАТИКА.....	66
3.1. Основные теоретические сведения	66
3.2. Последовательность решения задач по определению параметров движения материальной точки	73
3.3. Последовательность решения задач по простейшим видам движения механической системы.....	74
<i>Индивидуальное задание № 5. Определение траектории, скорости и ускорения точки</i>	74
<i>Индивидуальное задание № 6. Определение скоростей и ускорений точек тела при поступательном и вращательном движении</i>	78
Пример решения задачи индивидуального задания № 5	81
Пример решения задачи индивидуального задания № 6	83
4. ДИНАМИКА.....	86
4.1. Основные теоретические сведения	86
4.2. Последовательность решения задач на изучение движения механической системы	91
<i>Индивидуальное задание № 7. Изучение движения механической системы.....</i>	91
Пример решения задачи индивидуального задания № 7	95
Приложение 1. ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА	101
Приложение 2. СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ	102
Приложение 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЫХ СЕЧЕНИЙ.....	104
Приложение 4. СТАНДАРТНЫЙ РЯД ДИАМЕТРОВ ВАЛОВ	105
Приложение 5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЫХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ОСЕЙ ВРАЩЕНИЯ.....	106
ЛИТЕРАТУРА	107

Учебное издание

Кордикова Елена Ивановна
Хвесько Геннадий Михайлович
Ласовский Руслан Николаевич и др.

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Практикум

Учебно-методическое пособие

Редактор *Р. М. Рябая*
Компьютерная верстка *Е. В. Ильченко*
Дизайн обложки *П. М. Никитина*
Корректор *Р. М. Рябая*

Подписано в печать 20.09.2023. Формат 60×84¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 6,4. Уч.-изд. л. 6,6.
Тираж 300 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.