**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ**

**СЕЧЕНИЙ**

При некоторых деформациях прочность деталей зависит не только от площади поперечного сечения, но и от его формы. При растяжении и сжатии значения напряжений и перемещений, возникающих в сечениях, зависят не только от действующих нагрузок, но и от площади сечения.

При изучении кручения и изгиба нам предстоит встретиться с новыми геометрическими характеристиками – осевыми и полярными моментами инерции сечения.

**Статический момент сечения**

***Статическим моментом сечения*** *плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на расстояния их до этой оси.*

Рассмотрим произвольное сечение в системе координат *zy* (рис. 5.1).

*dA*

*y*

*y2*

*z*

*z2*

*C*

*y*

*yc*

*z*

*zc*

*O*

Рис. 5.1. К определению статического момента сечения

Статические моменты относительно произвольных осей *z* и *y* определяют интегралами вида:

; . 5.1

В теоретической механике выведены формулы для определения координат центра тяжести площади фигуры (теорема о моменте равнодействующей):

 и . 5.2

В формулах под *Ai* можно понимать площадь элементарной площадки *dA*, тогда в пределе при *dA* стремящемся к нулю, выражения в числителях представляют собой статические моменты площади фигуры относительно осей *y* и *z*, а  – есть площадь всей фигуры. Тогда

 и . 5.3

Если площадь всего сечения *А* и положение центра тяжести сечения относительно осей *z* и *y* известны (*zc*, *yc*), то:

 и . 5.4

***Статический момент площади*** *фигуры относительно оси, лежащей в этой же плоскости, равен произведению площади фигуры на расстояние ее центра тяжести до этой оси.*

***Центр тяжести*** *обладает тем свойством, что если тело опереть в этой точке, то оно будет находиться в равновесии.*

Статический момент площади имеет размерность .

В зависимости от знака координат (положения осей) статический момент площади фигуры может быть величиной положительной или отрицательной. В частном случае, если ось проходит через центр тяжести сечения (, ), статический момент равен нулю.

*Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются* ***центральными осями (проходят через центр тяжести сечения)****.*

Если фигуру можно представить в виде отдельных простых фигур (прямоугольников, треугольников и т.п.), для которых известны положения центров тяжести и площади, *статический момент площади всей фигуры относительно любой оси равен алгебраической сумме статических моментов составляющих фигур относительно той же оси* (это следует из свойств определенного интеграла)

, 5.5

где *Si* – статический момент площади каждой части фигуры.

Для стандартных профилей (двутавр, швеллер и др.) значения статических моментов приведены в справочниках.

Если фигура имеет ось симметрии, то она обязательно проходит через центр тяжести фигуры, поэтому *статический момент фигуры относительно оси симметрии всегда равен нулю*.

Понятие о статическом моменте площади понадобится в дальнейшем для определения положения центров тяжести сечений и при определении касательных напряжений при изгибе.

**Моменты инерции сечения**

***Осевым моментом инерции*** *плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат их расстояний до этой оси (рис. 5.2).*

*dA*

*y*

*z*

*y*

*z*

*O*

*ρ*

Рис. 5.2. К определению моментов инерции сечения

Осевой момент инерции обозначается с индексом соответствующей оси:

, . 5.6

***Полярным моментом инерции*** *плоской фигуры относительно точки пересечения двух взаимно перпендикулярных осей (полюса), лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса (рис. 5.2).*

Полярный момент инерции обозначим:

. 5.7

Полярный и осевые моменты инерции площади имеют размерность:

,

,

.

Полярный и осевые моменты инерции могут принимать только *положительные значения*, т.к. их подинтегральные выражения содержат квадраты координат.

Для упрощения некоторых видов расчетов для *простых* *симметричных фигур* вводят понятие осевых и полярных моментов сопротивления:

, , . 5.8

Для стандартных профилей (двутавр, швеллер и др.) значения осевых моментов инерции и осевых моментов сопротивления приведены в справочниках.

*Полярный и осевые моменты* *инерции* фигуры *связаны* между собой. Зная, что , сложим моменты инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей *z* и *y* и получим

, 5.9

. 5.9`

*Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат.*

**Момент инерции при параллельном переносе осей.**

Выведем формулы преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей. Пусть дана произвольная плоская фигура площадью *A* с центром тяжести в т. *C* (рис. 5.3). Оси *y* и *z* являются центральными (проходят через центр тяжести сечения). Центральные моменты инерции *Iz* и *Iy* известны. Определим моменты инерции относительно новых осей *z*1 и *y*1, параллельных центральным и отстоящих от них на расстояния *a* и *b* соответственно.

Из рис. 5.3 легко установить зависимость между новыми и старыми координатами элементарной площадки *dA*:

, . 5.10

Пользуясь общим выражением для записи осевых моментов инерции, находим

*dA*

*y1*

*y*

*z1*

*z*

*C*

*y1*

*yc*

*z1*

*z*

*O1*

*b*

*a*

*A*

Рис. 5.3. Переход к параллельным осям координат

, 5.11

. 5.11`

Для  преобразования выполняются аналогично и в результате получаем

. 5.12

*Таким образом, момент инерции плоского сечения относительно произвольной оси, параллельной центральной, равен моменту инерции относительно этой центральной оси плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между указанными осями.*

Анализируя формулы, можно прийти к выводу, что наименьшее значение осевые моменты инерции сечения принимают относительно центральных осей.

**Моменты инерции сложных фигур.**

Для сложных фигур моменты инерции относительно центральных осей всего сечения рассчитывают как сумму осевых моментов каждой из простейших фигур с учетом их смещения относительно центра тяжести всего сечения:

, . 5.13

Выражение упрощается, если центр***а*** тяжести простых фигур и всего сечения совпадают, тогда момент инерции такой фигуры равен алгебраической сумме моментов инерции простых фигур.

**К геометрическим характеристикам плоских сечений относят:**

1. Площадь *A*, м2;

2. Статический момент сечений *Sz*, м3 – необходим для определения центра тяжести сечения;

3. Осевой момент инерции сечения *Iz*, м4 (осевой момент сопротивления *Wz*, м3 – используют при расчете балок на изгиб;

4. Полярный момент инерции *Ip*, м4 (полярный момент сопротивления *Wp,* м*3*) – используют при расчетах стержней на кручение;

**Моменты инерции и моменты сопротивления простых фигур.**

Все геометрические характеристики сечений (площадь, моменты инерции и др.) простых фигур (прямоугольник, треугольник, круг и др.) приведены в справочной литературе. Выводы расчетных формул в программу курса не входят, но они достаточно просты и могут быть рассмотрены самостоятельно, на основе приведенных выше понятий.

Помимо выше перечисленных простых форм поперечного сечения (круг, прямоугольник и др.) в строительстве и машиностроении широко используют при конструировании балок стандартные ГОСТированные профили. Значения основных геометрических характеристик таких сечений представлены в соответствующих таблицах. Если сечение повернуто на угол 90°, то индекс оси в данных из справочной литературы нужно изменить с учетом обозначения осей на расчетной схеме.

**Алгоритм определения центральных осей (центра тяжести сечения) и вычисления моментов инерции сложных сечений.**

1. Разбиваем сложное сечение на ряд простых фигур (чем меньше фигур, тем лучше);

2. Определяем геометрические характеристики простых фигур (положение центров тяжести, площади поперечных сечений и моменты инерции), указываем центральные оси для каждой из фигур;

3. Обозначаем (или выбираем из ранее обозначенных) начальную координатную систему;

4.Определяем положение центров тяжести каждой из простейших фигур относительно начальных осей: ;

5. Рассчитываем координаты центра тяжести относительно начальных осей.

6. Если простейшая фигура не содержит материала (является пустотой) то в формулах значение площади этой фигуры подставляют со знаком «–».

7. Определяем моменты инерции составного сечения относительно его центральных осей с учетом параллельного переноса осей.