**Список использованных источников**

1. Государственная программа «Цифровое развитие Беларуси» на 2021–2025 годы утвержденное постановлением Совета Министров Республики Беларусь 02.02.2021 № 66.
2. Яковлева Н.А. Многофункциональный центр: новая модель взаимодействия государства и граждан при предоставлении государственных и муниципальных услуг // Финансовая газета. Региональный выпуск. – 2015. – № 2. – С. 136-139.
3. Хабриева Т.Я. Административная реформа в России. – М.: ИНФРА-М, 2014.

УДК 004.021

**Д.И. Волчек, В.В. Смелова, Д.В. Шиман, В.В. Смелов**
Белорусский государственный технологический университет
Минск, Беларусь

# МЕТОД И АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПО ВРЕМЕНИ ПЛАНА ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ ПРОМЫШЛЕННОГО КЛАСТЕРА

***Аннотация***. *Для планирования валового объема продукции промышленного кластера применяется метод, основанный на балансовой модели В. В. Леонтьева. Формулируется метод декомпозиции по времени плана производства продукции и описывается алгоритм построения такого плана.*

**D.I. Volchek, V.V. Smelova, D.V. Shiman, V.V. Smelov**
Belarusian State Technological University
Minsk, Belarus

# METHOD AND ALGORITHM FOR TIME DECOMPOSITION OF THE PRODUCTION PLAN OF AN INDUSTRIAL CLUSTER

***Abstract.*** *We use a method based on the balance model of V.V. Leontiev to plan the gross output of an industrial cluster. We formulate a method of time decomposition of a production plan and describe the algorithm for constructing this plan.*

**Введение.** Децентрализованное объединение, связанных на договорной основе в устойчивые производственные цепочки субъектов хозяйствования с целью совместного эффективного развития, будем называть промышленным кластером (ПК). В [1] предложена концепция цифровой платформы ПК, предназначенной для поддержки деятельности кластера. В [2-4] описывается метод планирования валового объема продукции ПК на основе балансовой модели В.В. Леонтьева. В [5] формулируются понятия корректного балансового уравнения и плана, рассматриваются способы решения такого класса уравнений, формулируется и доказывается необходимое условие существования корректного плана.

Следуя [2-4] будем рассматривать ПК как систему $S \equiv < C, P, R, A, Y >$, где $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ – перечень участников ПК; $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ – номенклатура продукции, производимой участниками ПК; $R = \{r_i\}_{\mathrm{h}}$ – бинарное отношение $R \subseteq C \times P$, элементы которого $r_i =< \mathrm{c_k}, \mathrm{p_s} >$, $i = \overline{1, h}$, $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}$, $1 \le \mathrm{s} \le \mathrm{m}$ соответствуют продукции $p_s \in P$, выпускаемой участниками $\mathrm{c_k} \in \mathrm{C}$; $A = \{a_{i,j}\}_{h \times h}$ – матрица размерности $h$, каждый элемент $a_{i,j}$ которой отражает количество продукта $r_{\mathrm{j}}$, необходимого для производства продукта $r_i$; $Y = (y_1 \dots y_h)^T$ – матрица-столбец с элементами $y_i$, $i = \overline{1, h}$, равными величине планируемого объема продукта $\mathrm{r}_i$ для внешних потребителей продукции ПК.

В предположении, что зависимость между продуктами кластера остается линейной, система $S$ статичной в течение планового периода $[t_1, t_2]$ и балансовое уравнение корректно, вычисление плана $X = (x_1 \dots x_h)^T$ сводится к решению матричного балансового уравнения $X - AX = Y$. Элементы $x_i, i = \overline{1, h}$ матрицы-столбца $X$ – значения планируемых объемов продуктов $r_i$ в течение отрезка времени $[t_1, t_2]$.

**Система планирования**. Будем предполагать далее время дискретным $t = t_1,\ t_1 + 1, \dots, t_2$. В общем случае заданная величина $Y$ распределена на отрезке времени $[t_1, t_2]$ не равномерно и может быть задана дискретной функцией $Y(t)$ – объем продукции, который должен быть произведен для внешних потребителей за отрезок времени $[t - 1, t]$. Матричное балансовое уравнение примет вид: $X(t) - AX(t) = Y(t), t = t_1,\ t_1 + 1, \dots, t_2$, где значения функции $Y(t)$ заданы на отрезке $[t_1, t_2]$, а решением уравнения является дискретная функция $X(t)$. При этом, для каждого значения $t = t'$, элементы $x_i(t')$, $i = \overline{1, h}$ столбца $X(t')$ равны запланированным валовым объемам продуктов $r_i$ за отрезок времени $[t' - 1, t']$.

Ввиду линейности верно утверждение: $Y = \sum_{t=t_1}^{t_2} Y(t) \Leftrightarrow X = \sum_{t=t_1}^{t_2} X(t)$. Пусть $D_n = \{d_1, d_1, \dots, d_n\}$, $d_i \in \mathbb{N}$, $d_i > 1$, $(t_2 - t_1 + 1) \vdots \prod_{i=1}^{n} d_i$ – конечная последовательность $n$ натуральных чисел с элементами $d_i > 1$ такая, что количество интервалов $t_2 - t_1 + 1$ на отрезке $[t_1, t_2]$ кратно произведению всех элементов этой последовательности.

Если все компоненты системы $S$ известны, балансовое уравнение и его решение корректны [5], то система планирования $H_S$, реализующая метод декомпозиции по времени плана продукции ПК (МДВП), в общем виде может быть задана четверкой:
$H_S \equiv \langle t_1, t_2, D_n, NSF \rangle$, где величины $t_1 < t_2$ – задают период планирования, $D_n$ – последовательность $k$ коэффициентов декомпозиции плана по времени; $NSF$ – процедура перераспределения планируемых объемов производства продуктов на каждом шаге декомпозиции плана; предполагается, что перераспределение осуществляется при согласовании плана участниками ПК, производящими продукты из собственных соображений.

Конечным результатом алгоритма, реализующего МДВП, является пара дискретных функций $\pi(t) = \langle X(t), Y(t) \rangle$, отражающих план выпуска продукции для внешних потребителей и валовой план производства продукции кластера $S$ на отрезке времени $[t_1, t_2]$. $Y(t)$ и $X(t)$ представляют собой два ансамбля функций $y_i(t)$ и $x_i(t)$ , $i = \overline{1, h}$ , для которых на отрезке $t \in [t_1, t_2]$ уравнения $(a_{i,i} - 1)x_i(t) - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j(t) = y_i(t)$ , $i, j = \overline{1, h}$ обращаются в тождества.

Исходным значением для построения производственного плана $\pi(t) = \langle X(t), Y(t) \rangle$ кластера $S$ является матрица-столбец $Y$, содержащая целевые плановые значения $y_i$ ,$i = \overline{1, h}$ суммарных объемов продуктов, предназначенных для внешних потребителей. Предположим, что с помощью процедуры получены все функции ансамбля $Y(t)$, то функции $x_i(t)$ ансамбля $X(t)$ могут быть найдены решением $t_2$ систем линейных уравнений $X(t) - AX(t) = Y(t)$ размерностью $h$. Такой способ решения задачи планирования возможен, если вычисленный валовый план может быть осуществимым. Заметим, что коэффициенты декомпозиции $D_k$ при такой постановке задачи не применялись. Очевидно, что система планирования при таком подходе может быть описана проще: $H_S \equiv \langle t_1, t_2, NSF \rangle$. Построение плана в этом случае сводится к циклу, включающему выполнение процедуры $NSF$ для подбора и согласования с участниками ПК функций ансамбля $Y(t)$, вычислению и согласованию с участниками ПК функций ансамбля $X(t)$. У такого способа построения плана есть недостаток: с ростом величины $ht_2$ процесс согласований плана становится сложным, а цикл подбора пары $\pi(t) = \langle X(t), Y(t) \rangle$ может быть бесконечным.

**Алгоритм построения плана.** Предполагаются известными все компоненты описывающей кластер системы $S \equiv \langle C, P, R, A, Y \rangle$ и задана система планирования $H_S \equiv \langle t_1, t_2, D_n, NSF \rangle)$. Построение плана в системе $H_S$ осуществляется за $n+1$ шагов.

*Шаг 0.* Вычисляется решение уравнения $X - AX = Y$. Уравнение может быть переписано в следующем виде $\bar{X}(\tau) - A\bar{X}(\tau) = \bar{Y}(\tau)$, где $\tau = [t_1, t_2]$. Результатом решения будет ансамбль функций $\bar{X}(\tau)$, заданной в одной точке $\tau$.

*Шаг 1.* Вычисляется решение разностного матричного уравнения

$$(E - A)\sum_{i=1}^{d_1} \bar{X}\left(t_1 + (i-1)\frac{t_2 - t_1 + 1}{d_1}, t_1 + i\frac{t_2 - t_1 + 1}{d_1} - 1\right) = \bar{Y}(t_1, t_2).$$

Уравнение можно записать в виде системы $hd_1$ уравнений:

$$(1 - a_{i,i})\sum_{k=1}^{d_1} \bar{x}_i(\tau_j) \ldots - a_{i,h}\sum_{k=1}^{d_1} \bar{x}_h(\tau_j) = \bar{y}_i(\tau_j),\ \ i = \overline{1,h}\,, j = \overline{1, d_1}$$

В системе уравнений элементы $\bar{y}_i(\tau_j)$, $i = \overline{1,h}$, $j = \overline{1, d_k}$ неизвестны, но для них справедливо утверждение $\bar{y}_i(\tau) = \sum_{j=1}^{d_k} \bar{y}_i(\tau_j)$, $i = \overline{1,h}$. Предполагается, что элементы $\bar{y}_i(\tau_j)$ определяются заданным процедурой $NSF$ правилом, представляющим собой отображение

$$\varphi : \bar{y}_i(\tau) \to \{\bar{y}_i(\tau_1), \bar{y}_i(\tau_2), \ldots, \bar{y}_i(\tau_{d_k})\}, i = \overline{1,h},$$

где $\bar{y}_i(\tau) = \sum_{j=1}^{d_k} \bar{y}_i(\tau_j)$. Отображение $\varphi$ может быть задано матрицей $M = (m_{i,j})_{h \times d_1}$, такой, что $\forall\left(i = \overline{1,h}\right): \sum_{j=1}^{d_1} m_{i,j,} = 1$.

Результатом выполнения шага множество $\mathrm{P}_1 = \{\langle \bar{X}(\tau_i), \bar{Y}(\tau_i) \rangle, i = 1,2, \ldots, d_1\}$.

*Шаг s,* $2 \leq s \leq n$. Исходными данными для вычислений на этих шагах являются множество $\mathrm{P}_{s-1} = \{\langle \bar{X}(\tau_i), \bar{Y}(\tau_i) \rangle, i = 1,2, \ldots, d_1 d_{s-1}\}$, – результат выполнения предыдущего шага алгоритма.

По аналогии с шагом 1 строится множество $\mathrm{P}_s$. Если $s = d_k$, то $\mathrm{P}_s$ – окончательный результат работы МДВП-алгоритма. Если при этом значение глубины $\omega = 1$, то план имеет полную детализацию и $\mathrm{P}_s = \{\langle \bar{X}(\tau_i), \bar{Y}(\tau_i) \rangle, i = 1,2, \ldots, d_1 d_2 \ldots d_k\}$, задает значения для пары функций $\pi(t) = \langle X(t), Y(t) \rangle$ во всех точках отрезка $[t_1, t_2]$.

**Заключение**

1. Основой метода декомпозиции плана продукции по времени является балансовая модель В.В. Леонтьева. При классическом применении метода В.В. Леонтьева вычисление валового плана $X$ осуществляется путем решения матричного уравнения $X - AX = Y$. Предлагаемый в статье метод предполагает решение уравнения $X(t) - AX(t) = Y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, при тех же исходных

данных (задано суммарное значение $Y$ на отрезке $[t_1, t_2]$), но позволяющего получить детальный план $\langle X(t), Y(t)\rangle$, $t \in [t_1, t_2]$ .

2. Алгоритм выполняется за $n+1$ шагов, где $n$ – количество коэффициентов $d_k$, заданных последовательностью $D_n$. На каждом шаге решается одно или несколько матричных разностных уравнений, результатом решения которых является уточненный план, полученный на предыдущем шаге алгоритма.

В качестве оценки асимптотической сложности алгоритма можно принять величину $O((d_1 d_2 \dots d_n h)^3)$.

## Список использованных источников


1. И.В. Новикова, В.В. Смелова, Ю.А. Тимофеева, Д.В. Шиман. Концепция цифровой платформы инновационно-промышленного кластера. Импортозамещение, научно-техническая и экономическая безопасность: сб. ст. V Междунар. науч.-техн. конф. «Минские научные чтения – 2022», Минск, 7–9 декабря 2022 г.: в 3 т. – Минск: БГТУ, 2022. – Т. 2. С. 3-7.
2. И.В. Новикова, В.В. Смелова. Планирование валового объема продукции инновационно-промышленного кластера. Цифровизация: экономика и управление производством. Материалы 87-й научно-технической конференция профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов, 31 января-17 февраля 2023 г.
3. В.В. Смелова, Д.В. Шиман. Алгоритм планирования валового объема продукции инновационно-промышленного кластера. Алгоритмизация и программирование. Актуальные проблемы программной инженерии. Материалы 87-й научно-технической конференция профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов, 31 января-17 февраля 2023 г.
4. Новикова И.В., Смелова В.В., Шиман Д.В. Планирование валового объема продукции инновационно-промышленного кластера. Управление информационными ресурсами: материалы XIX Международной научно-практической конференции, Минск, 23 марта 2023 г./Академия управления при Президенте Республики Беларусь. – Минск, 2023. –С. 368-370
5. Смелова В.В., Шиман Д.В. Необходимое условие существования корректного решения балансового уравнения при вычислении плана валового объема продукции инновационно-промышленного кластера // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (242). С. 7–11.