

ISSN 1561-8358 (Print)
ISSN 2524-244X (Online)

ЭНЕРГЕТИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕН
POWER ENGINEERING, HEAT AND MASS TRANSFER

<https://doi.org/10.29235/1561-8358-2023-68-4-303-317>
УДК 532.54;532.55



Оригинальная статья

А. П. Ахрамович¹, И. В. Войтов², В. П. Колос¹

¹*Институт энергетики Национальной академии наук Беларуси,
ул. Академическая, 65, корп. 2, 220072, Минск, Республика Беларусь*

²*Белорусский государственный технологический университет,
ул. Свердлова, 13а, 220030, Минск, Республика Беларусь*

**НОВОЕ В ГИДРАВЛИКЕ КАНАЛОВ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ:
ПОКАЗАТЕЛЬ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ДИССИПАЦИИ**

Аннотация. Указаны факторы возникновения научного направления по изучению закономерностей движения жидкости в каналах с проницаемыми стенками, получившего название «гидравлика переменной массы». Приведены результаты применения положений динамики точки переменной массы для описания течения жидкости в подобного рода магистральных. Отмечена неоправданность обобщения второго закона Ньютона на случай движения точки переменной массы для задач гидродинамики. Охарактеризована функциональность одномерных и многомерных моделей течения в проницаемых каналах, основанных на классических уравнениях механики жидкостей и газов. Обосновано доминирование одномерных моделей в инженерной расчетной практике и показан (с привлечением визуализации течения) ряд противоречий в описании динамики потока. На основе нового кинематического образа (взамен общепринятого – «твердой струи», от которой отделяются или к которой присоединяются частицы жидкости) получено одномерное уравнение движения жидкости в проницаемом канале, в котором коэффициент сопротивления трения является показателем относительной величины диссипации энергии потока. Построена зависимость вошедшего в уравнение коэффициента Кориолиса от режима течения. Исследована структура коэффициента сопротивления трения проницаемого канала с привлечением векторной размерности длины. Показано, что диссипация энергии потока в проницаемом канале как при оттоке, так и при притоке жидкости выше, чем в каналах со сплошными стенками при одинаковых ее расходах. Полученные результаты востребованы при разработке аппаратов химической технологии, ядерных реакторов с микротрещинами, фильтров и теплообменных аппаратов, содержащих каналы с проницаемыми стенками.

Ключевые слова: проницаемый канал, гидравлика, визуализация течения, аномалии описания, кинематический образ, коэффициент Кориолиса, векторная размерность, сопротивление трения, диссипация

Благодарности: работа выполнена по заданию «Разработать концепцию компактного газоохлаждаемого ядерного реактора для наземной передвижной (транспортабельной) атомной станции малой мощности» Государственной программы «Наукоёмкие технологии и техника» на 2021–2025 годы, подпрограмма 3 «Научное обеспечение эффективной и безопасной работы Белорусской атомной электростанции и перспективных направлений развития атомной энергетики».

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторах: *Ахрамович Александр Павлович* – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Института энергетики Национальной академии наук Беларуси. E-mail: ahral2012@mail.ru; *Войтов Игорь Витальевич* – доктор технических наук, ректор Белорусского государственного технологического университета. <https://orcid.org/0000-0001-8851-6834>. E-mail: rektor@belstu.by; *Колос Валерий Павлович* – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института энергетики Национальной академии наук Беларуси. E-mail: vpkolos@mail.ru

Вклад авторов: *Ахрамович Александр Павлович* – сбор и систематизация литературных данных, математические выкладки, редактирование и оформление текста рукописи; *Войтов Игорь Витальевич* – постановка исследова-

тельских целей и задач, формулировка выводов, редактирование текста рукописи; Колос Валерий Павлович – обоснование концепции исследований, математические выкладки, формулировка выводов, написание текста рукописи.

Для цитирования: Ахрамович, А. П. Новое в гидравлике каналов с проницаемыми стенками: показатель относительной величины диссипации / А. П. Ахрамович, И. В. Войтов, В. П. Колос // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2023. – Т. 68, № 4. – С. 303–317. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2023-68-4-303-317>

Поступила в редакцию: 05.06.2023

Утверждена к публикации: 30.11.2023

Подписана в печать: 15.12.2023

Original article

Aliaksandr P. Akhramovich^{1*}, Igor V. Voitov², Valery P. Kolos¹

¹*Institute of Power Engineering of National Academy of Sciences of Belarus,*

15, building 2, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus

²*Belarusian State Technological University,*

13a, Sverdlov Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus

NEW IN THE HYDRAULICS OF CHANNELS WITH PERMEABLE WALLS: INDICATOR OF THE RELATIVE VALUE OF THE DISSIPATION

Abstract. The factors that have led to the creation of the scientific direction “hydraulics of variable mass” to study the fluid movement laws in channels with permeable walls are indicated. The results of applying the dynamics of a variable mass point for describing the flow in such pipelines are presented. It is noted unjustifiability of the second Newton’s law generalization to the case of motion of a variable mass point for hydrodynamics problems. The functionality of one-dimensional and multidimensional models of fluid motion in permeable channels based on the classical equations of fluid and gas mechanics is characterized. It is substantiated the dominance of one-dimensional models in engineering computational practice, and a number of contradictions in the description of fluid dynamics are shown (with the flow visualization). On the base of the new kinematic image (instead of the generally accepted “solid jet”, when fluid particles are separated or joined), it has been obtained a one-dimensional equation of fluid motion in a permeable channel in which the friction coefficient is an indicator of the relative magnitude of the energy dissipation of the flow. The dependence of the Coriolis coefficient on the flow regime is constructed. The structure of the friction drag coefficient of a permeable channel has been studied using the vector dimension of length. It is shown that the dissipation of the flow energy in a permeable channel is higher both during outflow and inflow of liquid than in channels with solid walls at the same flow rates. The results are in demand in the development of chemical technology devices, nuclear reactors with microfuel elements, filters and heat exchangers containing channels with permeable walls.

Keywords: permeable channel, hydraulics, flow visualization, description anomalies, kinematic image, Coriolis coefficient, vector dimension, friction resistance, dissipation

Acknowledgments: the work was carried out according to the assignment “Develop the concept of a compact gas-cooled nuclear reactor for a ground-based mobile (transportable) low-power nuclear power plant” of the State Program “Knowledge-intensive technologies and equipment” for 2021–2025, subprogram 3 “Scientific support for the efficient and safe operation of the Belarusian nuclear power plant and promising directions for the development of nuclear energy”.

Conflict of interest: the authors declare that there is no conflict of interest.

Information about the authors: *Aliaksandr P. Akhramovich** – Cand. Sci. (Engineering), Leading Researcher at Institute of Power Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus. E-mail: ahral2012@mail.ru; *Igor V. Voitov* – Dr. Sci. (Engineering), Rector at Belarusian State Technological University. <https://orcid.org/0000-0001-8851-6834>. E-mail: rector@belstu.by; *Valery P. Kolos* – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Main Researcher at Institute of Power Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus. E-mail: vpkolos@mail.ru

Contribution of the authors: *Aliaksandr P. Akhramovich* – collection and systematization of literary data, mathematical calculations, editing and design of the manuscript text; *Igor V. Voitov* – setting research goals and objectives, formulating conclusions, editing the text of the manuscript; *Valery P. Kolos* – substantiation of the research concept, mathematical calculations, formulation of conclusions, writing the text of the manuscript.

For citation: Akhramovich A. P., Voitov I. V., Kolos V. P. New in the hydraulics of channels with permeable walls: indicator of the relative value of the dissipation. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-tekhnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2023, vol. 68, no. 4, pp. 303–317 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2023-68-4-303-317>

Received: 05.06.2023

Approved for publication: 30.11.2023

Signed to the press: 15.12.2023

Введение. Фактор возникновения научного направления «Гидравлика переменной массы». Вторая половина XIX в. ознаменовалась началом становления эпохи электричества. Энергия направленного движения заряженных частиц, обладая уникальными потребительскими свойствами,

выходит за стены научных лабораторий и становится стратегическим потенциалом развития производства, приобретающего уже современные черты; она сыграла роль основного ресурса третьего технологического уклада (1880–1930-е годы). Использование электричества привело к развитию тяжелого машиностроения, к прогрессу в области кораблестроения (в том числе и подводного), созданию электротехнической промышленности, авиационной, автомобильной и тракторной отраслей, совершенствование затрагивает легкую промышленность, особенно текстильное производство. Проектируются и строятся крупные предприятия с инженерными коммуникациями, отвечающими передовым тенденциям развития техники и технологии. Растут города, совершенствуется их инфраструктура. И уже не обойтись без гидросооружений, сетей водоснабжения, канализации, дренажа, систем воздушного отопления, вентиляции, орошения, содержащих каналы с перфорированными стенками.

Поначалу распределение потока в подобного рода трактах рассчитывалось на основании обычного уравнения Бернулли для магистралей со сплошными стенками. Однако вскоре выяснилось, что такой подход приводит к серьезным неточностям. Интеграл Бернулли имеет смысл закона сохранения механической энергии и справедлив только для каналов, не обменивающихся потоками с другими объектами. Игнорирование эффекта изменения расхода приводило к ошибке в расчетах, которая составляла 100 % и выше от фактического перепада давления. Возникла необходимость в более совершенных, продуманных методических построениях.

Использование положений динамики точки переменной массы. На рубеже XIX–XX вв. научной общественности были представлены работы профессора Санкт-Петербургского политехнического института И. В. Мещерского «Динамика точки переменной массы» (1897 г.) и «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае» (1904 г.). Они привлекли внимание гидромехаников и были положены в основу так называемой гидравлики переменной массы (неудачное название – результат искаженного восприятия физической сути; тем не менее авторы данной статьи в отдельных случаях употребляют терминологию, используемую в цитируемой литературе) – науке о закономерностях движения потока в перфорированных каналах.

Весомый вклад в развитие этого научного направления внесли советские ученые в 1920–1940-е годы. Востребованность в подобного рода исследованиях, обусловленная масштабностью и инновационностью проектно-строительных работ в СССР того времени, содействовала этому. Так, в 1928 г. В. М. Маккавеев получил уравнение движения жидкости переменной массы, с помощью которого решил задачу о гидравлическом прыжке [1]. В 1937 г. Я. Т. Ненько вывел аналогичное по сути уравнение, используя связь между производной импульса частицы жидкости по времени и силой, действующей на нее [2]; он применил полученное равенство для расчета перфорированных трубопроводов. Среди подобного рода публикаций особое место занимает статья А. Н. Патрашева [3], в которой впервые была сделана попытка исходя из закона сохранения механической энергии (а не импульса) описать движение жидкости в проницаемом канале.

Пожалуй, во всех научных работах по гидравлике переменной массы того периода (не исключением являются и перечисленные выше) явно или неявно использовалось уравнение Мещерского. На основании полученных результатов были разработаны и реализованы масштабные гидротехнические проекты как в СССР, так и в других странах. Знания в области гидравлики переменной массы систематизировались, опыт обобщался, на эту тему печатались монографии и научные статьи, достойное место среди которых отводилось публикациям советских специалистов. Завершающими, как бы подводными итогом первого этапа развития гидравлики переменной массы (этапа, основанного на уравнении Мещерского), можно считать работы Г. А. Петрова [4] и Х. А. Навояна [5], в которых приведены не только методы и примеры решения практических задач в области проектирования сложных гидросооружений, но и дан подробный вывод уравнения изменения давления потока по длине проницаемой магистрали:

$$\frac{dP}{\rho} + {}_2\beta w dw + w^2 d_2\beta + {}_2\beta v(w - V_x^*) \frac{dG}{G} + \lambda \frac{w^2}{2D} dx = 0, \quad (1)$$

где $\langle \cdot \rangle = S^{-1} \iint_S (\cdot) dS$; $w = \langle V_x \rangle$; ${}_2\beta = \frac{\langle V_x^2 \rangle}{w^2}$ – коэффициент потока импульса; $G = \rho w S$ – расход жидкости в канале; D – эквивалентный диаметр канала; P – давление, $P: = \langle P \rangle$; V_x – продольная

(осевая) компонента вектора скорости; S – площадь проходного сечения канала; ρ – плотность жидкости; $x \in [0; L]$ – продольная координата; L – длина канала; λ – коэффициент сопротивления трения проницаемого канала; символом * отмечены параметры потока на проницаемой стенке.

Необходимость повышения точности моделирования. В настоящее время четвертый и пятый технологические уклады, основными ресурсами которых являются энергия углеводородов (ключевой фактор – нефтехимия) и атомная энергетика выдвигают повышенные требования к адекватности математического моделирования физических процессов в инновационных установках. В соответствии с этим пересматриваются многие теоретические схемы, уточняются расчетные методики. Данный процесс обновления затронул и гидравлику переменной массы.

Аппараты химической технологии радиального типа с их высокой эффективностью, перспективные ядерные реакторы с микротрещинами, многие конструкции теплообменников и фильтров содержат каналы с проницаемыми стенками (зачастую все эти устройства проходят в научной литературе под общим названием «радиальные аппараты»). Потребовались уравнения для расчета геометрических параметров проницаемых каналов, обеспечивающих с высокой точностью заданное распределение потока внутри указанных устройств. И здесь оказалось, что не все допущения И. В. Мещерского, положенные в основу так называемой гидравлики переменной массы, применимы в гидромеханике.

Неадекватность обобщения второго закона Ньютона; допущения И. В. Мещерского. Отметим, что второй закон Ньютона определяет движение материальной точки, масса которой постоянна во времени [6]. Согласно этому закону в инерциальных системах отсчета производная импульса по времени равна действующей на нее силе:

$$\frac{dp}{dt} = f, \quad p = mV. \quad (2)$$

В современной формулировке, из которой следует скалярная аддитивность масс, $a = f/m$ [8]. Здесь соответственно p – импульс; m – масса; V – скорость; f – сила; a – ускорение материальной точки; t – текущее время.

В классической механике, основанной на законах Ньютона (частью которой является и динамика жидкости), масса материальной точки также считается постоянной и не зависящей от каких-либо особенностей движения [7–11]. Обобщение второго закона Ньютона (2) на случай движения точки переменной массы ($am + Vdm/dt = F$) требует особого рассмотрения [8]. В отдельных моментах оно искажает суть уже устоявшихся основных фундаментальных понятий, таких как количество движения (импульс), сила, масса, центр масс, и требует их переосмысления.

В своих теоретических выкладках И. В. Мещерский использовал ряд допущений, ограничив этим область использования полученных им результатов. Так, движение тела переменной массы считалось поступательным и полностью определялось движением одной из точек, принадлежащей данному объекту [12]. В связи с этим уравнение И. В. Мещерского является математической моделью, пригодной для решения только определенного класса задач (например, для описания динамики ракет, движения небесных тел). В механике же жидкостей и газов, в основу которой положена гипотеза сплошной среды, отклонение от традиционной трактовки второго закона Ньютона и использования в нем понятия «материальная точка переменной массы» не совместимо с содержанием уравнения сплошности (неразрывности) и с такими понятиями, как линия тока, трубка тока с ее главным свойством – непроницаемостью стенок, тензор напряжений, сила трения, сумма равновесного и вязкого давлений как мера сжатия. При этом вращательное и деформационное движения элемента сплошной среды, согласно допущениям И. В. Мещерского [12], вообще исключаются из рассмотрения.

Таким образом, стала очевидной теоретическая грубость данной модели применительно к описанию течения сплошной среды. Это обстоятельство послужило толчком к построению одномерных и многомерных математических моделей движения потока в проницаемых каналах исключительно на основе уравнений классической механики жидкостей и газов.

О функциональности одномерных и многомерных моделей. К настоящему времени накоплен обширный теоретический и экспериментальный материал, позволяющий сделать вывод, что с практической точки зрения одномерные модели выгодно отличаются от многомерных. Последние имеют сложную математическую структуру, проблемы моделирования турбулентности вблизи проницаемой стенки окончательно не решены. Нуждаются в уточнении и формулировки граничных условий (так называемых условий сопряжения), где требуется связать между собой истинные параметры потока со стороны канала и осредненные со стороны пористой стенки.

Из класса многомерных моделей наиболее совершенной на данный момент является, пожалуй, модель Кинни и Спэрроу [13], но и ее можно признать приближенной лишь условно. Уравнение энергии предельно упрощено, используются интуитивные (субъективного характера) допущения о локальной автомодельности профилей скорости и температуры, демпфирующее влияние пористой стенки на поток описывается малоприменимой для данного случая моделью Ван-Дрифта. Участвуя в обсуждении этой модели, известные специалисты в области гидравлики проницаемых каналов доктор Себеси и профессор Уоллис отметили ее немаловажное теоретическое значение и в то же время ограниченную пригодность для решения практических инженерных задач [13]. Добавим, что на данный момент этот вывод остается справедливым относительно всех известных нам многомерных моделей динамики потока в проницаемом канале.

При конструировании инженерам зачастую приходится решать обратную гидромеханическую задачу повышенной сложности – взаимозависимо определять размеры и формы других элементов устройства совместно с профилями проницаемых каналов, обеспечивающих по своей длине заданную массовую скорость фильтрации сквозь стенки. Перестановка неизвестной величины ρV_r^* в группу известных, а задаваемой $S(x)$ в группу искоемых – главный источник изменений в математической структуре системы многомерных уравнений динамики потока, происходящих при переходе от прямой задачи к обратной, – не облегчает решение последней. Причем допущения, которые оправданы для прямой задачи, в отдельных случаях становятся проблемными для обратной, например автомодельность профилей скоростей и температуры.

Естественно, одномерные модели обладают меньшим диапазоном описательных возможностей, чем многомерные. Однако простота их математической структуры, наглядность взаимосвязи гидродинамических величин и геометрических параметров канала, наличие коэффициентов интегрального характера, определяемых из одномерного эксперимента, позволяют им доминировать в инженерной расчетной практике. Активное создание таких моделей началось в 1960-е годы для расчетов формы проницаемых каналов ядерных и химических реакторов [15–17]. Хотя с этого момента прошло достаточно времени, по сей день одномерное описание динамики потока в проницаемых каналах содержит ряд нестыковок, усложняющих и ограничивающих его использование.

Осреднение уравнения движения. Изоморфизм, гносеологическая неопределенность, визуализация течения. Многомерное дифференциальное уравнение количества движения было спроектировано на ось канала; проекция записана в интегральной форме и посредством теоремы о среднем значении определенного интеграла (в данном случае по проходному сечению) приведена к выражению с инерционными членами, зависящими, казалось бы, только от продольной координаты. Слагаемое, содержащее проекцию дивергенции девиатора напряжений, как и при описании изменения давления жидкости, движущейся в обычной (с непроницаемыми стенками) трубе, представлено величиной, пропорциональной аксиальному скоростному напору. Полученное таким образом уравнение [14] большинство считают одномерным; оно оказалось идентичным равенству (1), которое было выведено на основании динамики точки переменной массы. На самом деле такие уравнения являются псевдоодномерными; они содержат величину $\langle V_x^2 \rangle$ с неявно выраженной многомерностью. Обнаружившийся изоморфизм обусловлен гносеологической неопределенностью данного выражения, поскольку при переходе к интегральной форме записи была расширена область существования исходного дифференциального уравнения: полученное в результате осреднения равенство справедливо как для непрерывных функций, вошедших

под интеграл, так и имеющих конечное число разрывов. Таким образом, разрывы линий тока математически не исключены из рассмотрения и тем самым течение вязкой жидкости отождествлено с движением твердого тела переменной массы. Насколько это согласуется с законами природы, ответить может визуализация течения в проницаемых каналах.

На рис. 1 показана работа макета входного устройства в виде улитки монокассетного ядерного реактора с микротвэлами. Данное устройство обеспечивает в широком интервале изменения (регулируемого) величины расхода теплоносителя равномерную его раздачу по окружности топливного слоя и устойчивую фильтрацию (теплосъем) при случайных локальных возмущениях энерговыделения. Устойчивость здесь обеспечивается одновременно тремя взаимозависимыми особенностями течения жидкости – фильтрацией с одинаковой скоростью через однородное пористое кольцо, специальной тороидальной завихренностью и идеальным слиянием потоков в районе замыкания начала-конца улиточного канала (здесь турбулизация жидкости отсутствует). Такое течение в улиточном проницаемом канале возможно только при непрерывных линиях тока, не замыкающихся сами на себя. (Проходное сечение «улитки» рассчитывалось с учетом изложенной далее методики определения диссипативных потерь давления.)

На рис. 2 показан фрагмент устройства, содержащего два плоских канала: распределительный и отводной (каждый с одной проницаемой стенкой), по которым течет жидкость. Отчетливо видны плавные трубки тока. Движение по ним (не по каналу в целом, как ошибочно принималось в начале расчетной практики), бесспорно, подчиняется закону Бернулли, что, так же как

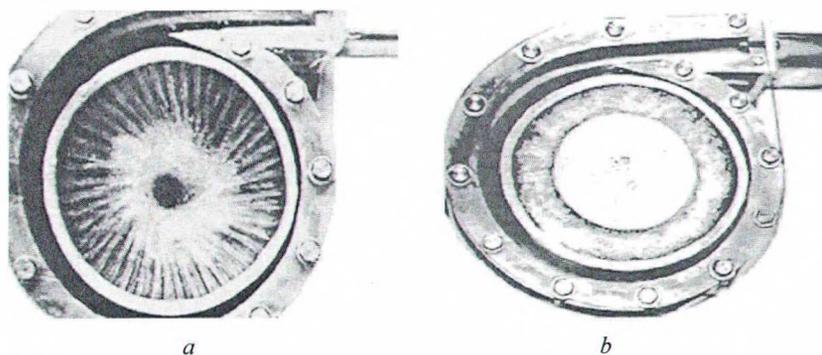


Рис. 1. Макет входного улиточного устройства: *a* – визуализация равномерной раздачи воды по окружности пористого кольца малого гидравлического сопротивления и идеального слияния потоков в районе замыкания начала – конца канала; *b* – визуализация тороидальной завихренности

Fig. 1. The model of the inlet snail device: *a* – visualization of the water uniform distribution around the low hydraulic resistance porous ring and the flow ideal confluence at the closure of the channel beginning – end; *b* – visualization of the toroidal vorticity

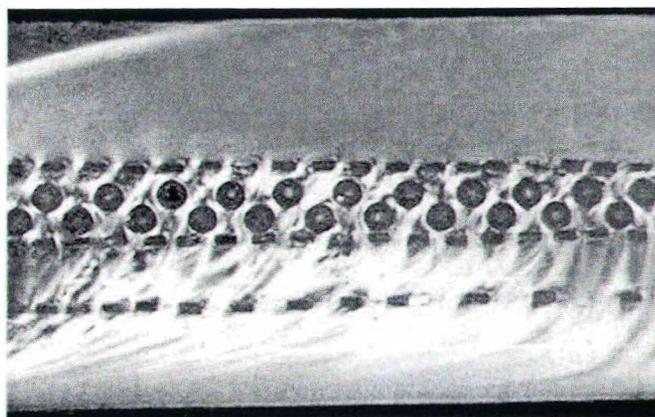


Рис. 2. Визуализация потока жидкости в каналах с проницаемыми стенками

Fig. 2. Visualization of fluid flow in channels with permeable walls

и при течении жидкости в улиточном канале, не согласуется с уравнением (1) и ставит под сомнение его описательные возможности.

Коэффициент потока импульса. Аномалии в описании сопротивления трения. От визуализации течения перейдем к характеристике величин β и λ , входящих в выражение (1). Приведенные в научной литературе теоретические и эмпирические данные по многомерному полю скоростей, как правило, невысокой точности, а в отдельных случаях даже противоречивы. Это относится и к коэффициентам потока импульса; с достоверностью можно утверждать лишь то, что в случае отсутствия отрыва «погранслоя» ($dP/dx < 0$) при развитом турбулентном течении и невысокой интенсивности оттока (притока) ($|K_{\perp}| < 0,15$; $K_{\perp} = V_r^* / w$; V_r^* – радиальная составляющая вектора скорости на проницаемой стенке) $\beta \approx 1$, при ламинарном течении с такими же ограничениями на изменение расхода $\beta \approx 1,4$ (см. обзорную часть [17]).

Для более детального определения коэффициента потока импульса необходимы либо многомерные математические модели движения жидкости в проницаемом канале с алгоритмами решения (на данный момент это проблема), либо точные замеры поля скорости, что также является непростой задачей (криволинейные линии тока, дискретность, вносимая пористой стенкой). Поэтому, считая коэффициент β близким к единице, уравнение (1) было сведено к безразмерному равенству

$$\frac{d\bar{P}}{dX} - 16K_{\perp} = 16K_{\perp}(\beta - 1) + 8K_{\perp} \operatorname{Re} \frac{d\beta}{d\operatorname{Re}} - \lambda := \zeta \quad (3)$$

с одним одномерным экспериментальным коэффициентом ζ и отмечено, что при оттоке $\zeta \approx \lambda$, при притоке $\zeta \wedge \lambda \ll 1$ [18] (здесь: $X = x / D$; $\bar{P} = 2P / \rho w^2$; Re – число Рейнольдса). Это позволило при анализе литературных данных, приведенном ниже, не заострять внимание на несущественных различиях между λ и ζ , а использовать единые термин «коэффициент сопротивления трения» и его обозначение λ .

Нахождение закономерностей для коэффициентов сопротивления трения проницаемых каналов сложнее и, естественно, более затратное, чем для коэффициентов сопротивления обычных магистралей. Поэтому на первом этапе исследований учеными выдвигалось множество гипотез, порой чисто интуитивных, согласно которым величина λ не зависела от локального числа Рейнольдса [19, 20], была равна нулю [21] или коэффициенту гидравлического сопротивления обычного канала, при этом применялись формула Блаузиса [22, 23], линейный и квадратичный законы [24, 25], формула Альтшуля [26]. В это время А. И. Егоровым была разработана серия поправок, которые учитывали эффекты дискретности оттока (притока) жидкости [27, 28].

С таким разнообразием можно было мириться, пока перфорированные магистрали использовались главным образом в сантехническом оборудовании и гидротехнических сооружениях. С появлением возможности их применения в особо ответственных узлах радиальных химических и ядерных реакторов возникла острая необходимость в серьезном экспериментальном изучении гидравлики проницаемых каналов и определении коэффициента λ . На объем и характер этих исследований большое влияние оказали данные, полученные в [29]. Было установлено, что при течении жидкости с относительно плавным изменением расхода по длине канала коэффициент потока импульса β , а, следовательно, и величина λ не зависят от вида функции $G(x)$. Это позволило заметно сузить диапазон исследований – опыты проводились, как правило, при равномерном оттоке (притоке), а результаты затем распространялись на другие законы изменения расхода. К настоящему времени предложен ряд эмпирических зависимостей для определения λ ; в большинстве случаев они были представлены в следующем виде:

$$\lambda = \lambda_0 + \alpha K_{\perp}^b, \quad (4)$$

где λ_0 – коэффициент сопротивления трения при постоянном расходе.

Приведем часто используемые формулы [30, 31]:

для несимметричного оттока

$$\lambda = \lambda_0 + 8K_{\perp}, \quad (5)$$

для симметричного оттока

$$\lambda = \lambda_0 + 5,54K_{\perp}, \quad (6)$$

для симметричного притока

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 + K_{\perp}; & K_{\perp} \leq \lambda_0; \\ \lambda = 0; & K_{\perp} > \lambda_0 \end{cases} \quad (7)$$

и для всех случаев притока при перепаде давления на пористой стенке меньше перепада в канале

$$\lambda = 1,5K_{\perp}. \quad (8)$$

Прежде всего хотелось бы обратить внимание на отсутствие предельного перехода ($V_r^* \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow \lambda_0$) в выражении (8) и гладкой зависимости в системе (7). К тому же при β , близком к единице, λ притока, согласно (7), может быть равно нулю, а это свидетельствует о том, что коэффициент гидравлического сопротивления не является показателем диссипации, каковым он был при течении в обычных каналах.

Поскольку эксперименты Е. С. Коченова и О. Ю. Новосельского [18] были выполнены тщательно, то следует считать, что уравнение (1), используемое для обработки замеров, не способно описывать посредством четвертого слагаемого закономерности реакции потока на изменение расхода вдоль проницаемого канала. В связи с этим пятое слагаемое, содержащее величину λ , найденную расчетно-экспериментальным путем с использованием того же равенства (1), наравне с силой сопротивления трения включает и часть силы инерции, компенсируя неточности, вносимые неадекватным четвертым слагаемым. Следовательно, работоспособность этого выражения, полученного двумя способами (на основании положений Мещерского и путем осреднения проекции уравнения количества движения), для чисто гидродинамических задач обеспечивает не «точный» аналитический учет инерционных эффектов, а величина λ , рассчитанная по результатам досконально выверенных замеров давления в проницаемых каналах и названная по аналогии с гидравликой обычных труб (хотя подобия здесь нет) коэффициентом сопротивления трения. Вид самого уравнения, по которому производится обработка экспериментальных результатов, играет здесь второстепенную роль; отдельными специалистами, в частности известным ученым И. Е. Идельчиком, было предложено в расчетной практике принять, что суммарные потери давления в проницаемом канале пропорциональны скоростному напору, и на основании этого положения обрабатывать эмпирические данные.

О диссипации энергии потока в проницаемом канале и новом кинематическом образе.

Расчет размеров и форм конструктивных элементов инновационных радиальных аппаратов, свойства реагентов или теплоносителей которых зависят от температуры, моделирование происходящих в аппаратах термогазодинамических процессов требуют учета тепловых эффектов, вызванных диссипацией механической энергии потока в проницаемых каналах. Особенно досконально ее следует учитывать при определении зоны устойчивой работы реакторов с микротрещинами при случайных возмущениях нейтронного потока.

Движение сплошной среды подчиняется законам сохранения массы, импульса и энергии и описывается соответствующей системой уравнений. Вязкие напряжения (как результат молекулярного и турбулентного переноса импульса) входят в уравнение движения в виде поверхностных сил сопротивления, а в общий закон сохранения энергии – в виде удельной диссипированной мощности. Данное обстоятельство указывает путь решения задачи диссипативного нагрева потока в проницаемом канале: необходимо записать выражение изменения давления таким образом, чтобы рассчитанный с его помощью (по результатам замеров скорости потока и давления) коэффициент сопротивления трения позволял оценивать (наподобие течения в обычных трубах) удельную рассеянную механическую энергию потока в перфорированных магистралях.

Приведенные выше экспериментальные данные и визуализация течения, свидетельствующие о крайней ограниченности возможностей достоверного описания термогазодинамических процессов с помощью существующего кинематического образа течения жидкости в проницаемых каналах, инспирировали необходимость замены этого образа. Было предложено вместо «твердой

струи», от которой отделяются или к которой присоединяются частицы жидкости, представить поток (для случая безотрывного течения) в виде множества концентрических, коаксиальных элементарных трубок тока, каждая из которых, не пересекая друг друга, проходит через пористую поверхность [17]. Непроницаемость трубок тока (расход по ним постоянен) исключает при построении расчетной модели необходимость использования уязвимого в гидромеханике понятия «материальная точка переменной массы».

На основании такого кинематического образа получено одномерное уравнение изменения давления жидкости в проницаемом канале:

$$dP + {}_3\beta \rho w dw + \frac{1}{2} \rho w^2 d{}_3\beta + \frac{\rho}{2G} ({}_3\beta w^2 - V_x^{*2}) dG + \xi \rho \frac{w^2}{2D} dx = 0, \quad (9)$$

где ${}_3\beta$ – коэффициент Кориолиса (${}_3\beta := \langle V_x^3 \rangle / w^3$).

В [18] это уравнение приводится в приближении

$${}_2\beta \approx {}_3\beta \wedge \frac{d{}_2\beta}{dx} \approx \frac{1}{2} \frac{d{}_3\beta}{dx}, \quad (10)$$

которое соответствует турбулентному режиму течения и начальной стадии его перехода в ламинарный. Такая аппроксимация позволила для наиболее распространенного характера движения жидкости в проницаемых каналах радиальных аппаратов выявить существенную разницу между слагаемыми уравнений (9) и (1), отвечающими за инерционные эффекты, которые вызваны изменением расхода.

Моделирование зависимости коэффициента Кориолиса от режима течения. Коэффициенты Кориолиса и потока импульса рассчитываются на основании одного и того же поля скоростей и поэтому должны иметь близкий характер поведения при различных режимах течения (для ${}_2\beta$ он приведен выше). Учитывая это обстоятельство, построим зависимость ${}_3\beta(x)$ от числа Рейнольдса и K_{\perp} , перейдя к которой исключим объект неоднородности ($\langle V_x^3 \rangle$) из уравнения (9).

Примем, что значения ${}_3\beta$ при ламинарном и развитом турбулентном потоках постоянны, и обозначим их, соответственно литерами A и B . Будем полагать, что турбулентный режим течения в проницаемом канале реализуется в том случае, когда число Рейнольдса превышает некое значение Re_T , а ламинарный режим – когда Re меньше Re_L . Переходный режим имеет место при $Re \in [Re_L; Re_T]$. Примем в качестве приближения, что в этом интервале значение коэффициента Кориолиса линейно зависит от числа Рейнольдса, а сами границы интервала таким же образом связаны с величиной K_{\perp} .

Данные допущения позволяют представить ${}_3\beta(x)$ и его производную по оси канала в виде кусочно-непрерывных функций:

$${}_3\beta = \begin{cases} A; & Re < Re_L; \\ B + \frac{Re_T - Re(x)}{Re_T - Re_L} (A - B); & Re \in [Re_L; Re_T]; \\ B; & Re > Re_T; \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{{}_3\beta}{dx} = \begin{cases} 0; & Re < Re_L; \\ \frac{B - A}{Re_T - Re_L} \frac{dRe}{dx}; & Re \in [Re_L; Re_T]; \\ 0; & Re > Re_T; \end{cases} \quad (12)$$

$$Re_L = Re_{0L} (1 + \delta |K_{\perp}|); \quad Re_T = Re_{0T} (1 + \varepsilon |K_{\perp}|), \quad (13)$$

где Re_{0L} (Re_{0T}) – число Рейнольдса, соответствующее начальной (конечной) стадии перехода ламинарного течения в турбулентное в каналах с непроницаемыми стенками. Величины A, B ,

δ , ε имеют различные значения при оттоке и притоке; при записи выражения (12) исключена производная величины $[K_{\perp}]$ по координате x , поскольку учет ее выходит за рамки точности модели.

Зарекомендовавшая себя наиболее работоспособной при практических расчетах аппроксимация разрывных функций (11), (12) непрерывными имеет вид

$$\begin{aligned} {}_3\beta &= A + \frac{B-A}{2(\text{Re}_T - \text{Re}_L)} (\text{Re} - \text{Re}_L) \left[\text{erf} \left(\frac{\text{Re} - \text{Re}_L}{100} \right) + 1 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[B - A - \frac{B-A}{\text{Re}_T - \text{Re}_L} (\text{Re} - \text{Re}_L) \right] \left[\text{erf} \left(\frac{\text{Re} - \text{Re}_T}{100} \right) + 1 \right]; \\ \frac{d{}_3\beta}{dx} &= \frac{B-A}{2(\text{Re}_T - \text{Re}_L)} \left[\text{erf} \left(\frac{\text{Re} - \text{Re}_T}{100} \right) - \text{erf} \left(\frac{\text{Re} - \text{Re}_L}{100} \right) \right] \frac{d\text{Re}}{dx}. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициент трения как показатель относительной величины диссипации. Поскольку девиатор напряжений равен удвоенному произведению вязкости жидкости μ и неизотропной части тензора скоростей деформации, то с математической точки зрения каждое слагаемое величины λ должно зависеть от μ . На практике же экспериментальные данные, обработанные на основании уравнения (1), описываются выражением (4), второе слагаемое которого не зависит от вязкости. Это еще раз подчеркивает несостоятельность уравнения (1) и необходимость поиска новой критериальной формы записи коэффициента ξ , входящего в равенство (9), вместо ныне используемой (4).

Рассмотрим движение жидкости в осесимметричном канале с анизотропной квазигомогенной пористой стенкой, чья структура и относительный размер пор $d/D \ll 1$ обуславливают поворот потока, при котором $V_x^*/V_r^* \ll 1$. Также считаем, что профиль канала обеспечивает плавное изменение расхода по длине и монотонное падение давления ($dP/dx < 0$) как при оттоке, так и при притоке. При таких ограничениях исключен отрыв потока от стенок канала, а работа вязких сил по формированию профиля скорости оказывается пренебрежимо малой по сравнению с диссипацией. Отсюда следует, что диссипация механической энергии потока в проницаемом канале определяется через коэффициент ξ в уравнении (9):

$$q_l / \frac{\pi D}{8} \rho w^3 = \xi, \quad (15)$$

где q_l – погонная мощность тепловыделения в результате диссипации.

Здесь имеет место физическое подобие между коэффициентом сопротивления трения для обычной трубы ξ_0 и ξ для канала с проницаемой стенкой – они оба являются показателями относительной величины диссипации. Это обстоятельство позволяет распространить известные эмпирические закономерности падения давления при движении жидкости в трубах на течение в перфорированных магистралях.

Структура коэффициента трения проницаемого канала. Выпишем группу величин, от которых зависит скорость диссипации в трубах: динамическая вязкость μ и плотность жидкости ρ , эквивалентный диаметр канала D и модуль определяющей скорости U $\left(U := \frac{1}{S} \int_S \sqrt{V_x^2 + V_r^2} dS \right)$. Поскольку течение в проницаемом симметричном канале двумерное, следует добавить к этим величинам еще один параметр – среднюю по сечению осевую составляющую вектора скорости потока w , и представить изменение давления вдоль канала в результате диссипации (dP/dx) с учетом принципа однородности по размерностям [32, 33] в виде произведения

$$\frac{dP}{dx} = \chi D^0 \rho^\sigma \mu^\gamma U^\eta w^\theta, \quad (16)$$

где χ – числовой коэффициент.

Предполагая такой вид записи, в число влияющих параметров намеренно не была включена радиальная скорость на проницаемой стенке. Ее наличие привело бы к явной некорректности ($dP_{\varphi}/dx \rightarrow 0$ при $V_r^* \rightarrow 0$) – нарушению плавного перехода от диссипации при оттоке (притоке) к диссипации потока в непроницаемом канале, поэтому вместо проекции V_r^* и была введена величина U .

Анализ структуры ξ с привлечением векторной размерности длины. Для исследования коэффициента трения как показателя относительной величины диссипации воспользуемся декартовой и цилиндрической системами координат, оси X которых совпадают между собой и осью канала, и применим метод размерностей, увеличив его эффективность за счет ввода векторной единицы длины [34, 35]. Размерности основных единиц измерения: массы, времени, компонент длины по направлениям соответственно обозначим $l_m, l_t, l_x, l_y, l_z, l_r$. Осевая симметрия задачи позволяет выразить радиальную составляющую размерности длины через l_y, l_z следующим образом:

$$l_r = l_y^{1/2} l_z^{1/2}. \quad (17)$$

Определим размерности величин, вошедших в выражение (16). Не составляет сложности установить их для эквивалентного диаметра и осевой составляющей вектора скорости:

$$D \triangleq l_r; w \triangleq l_x l_t^{-1}. \quad (18)$$

Поскольку размерность любой физической величины может быть только произведением возведенных в степень размерностей, принятых за основные, а U зависит от осевой и радиальной компонент скорости потока в канале, то

$$U = U(V_x; V_r) \triangleq l_x^a l_y^b l_z^c l_t^{-1} = (l_{\parallel} \triangleq l_x^a l_r^{1-a}) l_t^{-1}; \quad a + b + c = 1. \quad (19)$$

Используя последовательную перестановку по часовой стрелке показателей степеней в l_{\parallel} , определим размерности длины в двух ортогональных направлениях, перпендикулярных U :

$$l_{\parallel} = l_x^a l_y^b l_z^c \Rightarrow l_{1\perp} = l_x^c l_y^a l_z^b \Rightarrow l_{2\perp} = l_x^b l_y^c l_z^a, \quad (20)$$

и на основании $l_{\parallel}, l_{1\perp}, l_{2\perp}$ найдем размерности площадей поверхностей, перпендикулярной и параллельной U , а также размерности силы f , объема v и плотности ρ :

$$\begin{aligned} S_{\perp} &\triangleq l_{1\perp} l_{2\perp} = l_x^{1-a} l_r^{1+a}; \\ S_{\parallel} &\triangleq l_{\parallel}^{1/2} l_{2\perp}; \\ f &\triangleq l_m l_{\parallel} l_t^{-2} = l_m l_x^a l_r^{1-a} l_t^{-2}; \\ v &\triangleq l_{s\perp} l_{\parallel} = l_x^{1-a} l_r^{1+a} l_x^a l_r^{1-a} = l_x l_r^2; \\ \rho &\triangleq l_m l_v^{-1} = l_m l_x^{-1} l_r^{-2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Размерность динамической вязкости жидкости с учетом векторности единицы длины найдем, опираясь на ее определение: динамическая вязкость – это сила, действующая на единицу площади поверхности, образованной линиями тока, и деленная на градиент скорости в направлении, перпендикулярном данной поверхности. Отсюда следует, что

$$\mu = \frac{f}{S_{\parallel}} \left/ \frac{\partial U}{\partial n} \right. \triangleq \frac{l_m l_{\parallel} l_t^{-2}}{l_{\parallel}^{1/2} l_{2\perp}^{1/2}} \cdot \frac{l_{1\perp}^{1/2} l_{2\perp}^{1/2} l_t}{l_{\parallel}} = l_m l_{\parallel}^{-1} l_t^{-1} = l_m l_x^{-a} l_r^{a-1} l_t^{-1}. \quad (22)$$

Из тех же соображений установим размерность dP_{φ}/dx :

$$\frac{dP_{\varphi}}{dx} \triangleq \frac{l_f}{l_x l_{s\perp}} = \frac{l_m l_x^a l_r^{1-a} l_t^{-2}}{l_x l_x^{1-a} l_r^{1+a}} = l_m l_x^{2(a-1)} l_r^{-2a} l_t^{-2}. \quad (23)$$

Полученные выражения (18)–(23) позволяют записать формулу размерности для предиката (16). Приравняв показатели степеней при одинаковых размерностях основных единиц измерения в (16), приходим к системе

$$\begin{cases} l_m : 1 = \sigma + \gamma; \\ l_t : 2 = \varphi + \gamma + \eta; \\ l_x : 2(a-1) = \varphi - \sigma - a\gamma + a\eta; \\ l_r : 2a = 2\sigma - \theta + (1-a)(\gamma - \eta). \end{cases} \quad (24)$$

Динамическая вязкость является единственной величиной из группы влияющих переменных, не характеризующая инерционные эффекты. Разрешим (24) относительно показателей степеней, считая γ известным, что позволит установить функциональную связь между коэффициентами сопротивления трения обычного канала и проникаемого.

Из системы линейных уравнений (24) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma &= 1 - \gamma; & \eta &= \frac{3 - 2a - a\gamma}{1 - a}; \\ \varphi &= \frac{-1 + \gamma(2a - 1)}{1 - a}; & \theta &= -1 - \gamma. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив выражения (25) в (16), получим

$$\frac{dP_\partial}{dx} = 2\chi \left(\frac{w\rho D}{\mu} \right)^{-\gamma} \cdot \left(\frac{U}{w} \right)^{\frac{3-2a-a\gamma}{1-a}} \frac{\rho w^2}{2D}. \quad (26)$$

Показатель степени a выразим через компоненты определяющей скорости U ; для этого, считая V_x, V_r известными величинами, решим уравнение

$$U := \frac{2}{R^2} \int_0^R \sqrt{V_x^2(r) + V_r^2(r)} r dr = \sqrt{V_x^2(r) + V_r^2(r)} \quad (27)$$

относительно r , что позволит установить место в проходном сечении канала (радиус r^+), где вектор скорости потока имеет модуль U , а затем найдем и его компоненты $V_x^+ = V_x(r^+)$ и $V_r^+ = V_r(r^+)$. Поскольку размерность U равна $l_x^a l_r^{1-a} l_t^{-1}$, то очевидно, что

$$\frac{V_r^+}{V_x^+} = 0 \Rightarrow a = 1; \quad \frac{V_r^+}{V_x^+} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}; \quad \frac{V_r^+}{V_x^+} = \infty \Rightarrow a = 0. \quad (28)$$

Аппроксимационное уравнение, удовлетворяющее условиям (28), имеет вид

$$a = \frac{1}{1 + V_r^+ / V_x^+}. \quad (29)$$

Данную зависимость следует принять как определение a , поскольку она отражает одинаковую степень влияния величины угла между осью X или R и вектором U на размерности l_x и l_r и тем самым не выделяет ни одного из них при описании физических процессов, соответствуя условию однородности пространства.

Поля скорости в проникаемых каналах многократно определялись теоретически и экспериментально, о чем уже упоминалось. На основании этих результатов было сформировано множество Z , элементами которого являются пары $V_r(r), V_x(r)$. Численные исследования показали, что для $\forall [(V_x; V_r) \in Z] \wedge \forall \chi \in [0; 1]$ (несмотря на то, что при $V_r \rightarrow 0$ величина $a \rightarrow 1$, и потому

показатель степени $(3 - 2a - \alpha\gamma)/(1 - a)$ в случае $\gamma \neq 1$ стремится к бесконечности) существует предел

$$\lim_{V_r \rightarrow 0} \left(\frac{U}{w} \right)^{\frac{3-2a-\alpha\gamma}{1-a}} = 1. \quad (30)$$

Его наличие дает возможность выстроить логическую цепочку

$$\xi_0 = 2\chi \left(\frac{w\rho D}{\mu} \right)^{-\gamma} = 2\chi \text{Re}^{-\gamma} \Rightarrow \xi = \xi_0 \Psi; \quad \Psi := \left(\frac{U}{w} \right)^{\frac{3-2a-\alpha\gamma}{1-a}} \Rightarrow \Psi > 1 \Rightarrow \xi > \xi_0 \quad (31)$$

и установить значения величин γ и χ на основании экспериментальных зависимостей для обычных каналов. Так, при ламинарном течении ($\xi_0 = 64\text{Re}^{-1}$) следует принять $\chi = 32$, $\gamma = 1$, при турбулентном ($\xi_0 = 0,316\text{Re}^{-0,25}$) – $\chi = 0,158$, $\gamma = 0,25$.

Заключение. Изложенный способ определения коэффициента гидравлического сопротивления ξ справедлив как при оттоке жидкости из канала, так и при притоке. Естественно, для этих случаев пары функций $V_r(r)$ и $V_x(r)$ будут отличаться между собой. Различными будут и значения величины Ψ , но при $dP/dx < 0$ и $K_{\perp} < 0,15$ (что имеет место в большинстве аппаратов радиального типа) они близки к единице. Так, при оттоке и ламинарном течении в канале значение Ψ не превышает 1,04, при турбулентном – 1,08; при притоке – соответственно 1,12 и 1,16. На практике удовлетворительные результаты получены при следующих приближениях: равенство продольных составляющих вектора скорости в проницаемом и обычном каналах, линейный закон изменения $V_r(r)$ по радиусу при $K_{\perp} \leq 0,15$, переход линейной зависимости в асимптотическую в случае $K_{\perp} > 0,15$.

Как объяснение этого отметим, что значения производных $V_r^* \frac{\partial \Psi}{\partial V_r}$ и $\frac{G}{\rho F} \frac{\partial \Psi}{\partial V_x}$ невелики, поэтому имеет место незначительное приращение Ψ в результате вариаций $V_r(r)$, $V_x(r)$ (отклонения истинных компонент скорости от приближенных). Для расчетов, не требующих высокой точности, например, для определения затрат материалов на изготовление устройств, содержащих каналы с проницаемыми стенками, определения типа и мощности насосов для прокачки в них рабочей жидкости, для оценки массогабаритных характеристик аппаратов радиального типа и т. п., можно пользоваться приближением $A = 2$; $B = 1$; $\delta \wedge \varepsilon = 0$ (см. выражения (13)).

С помощью описанных здесь расчетно-теоретических приемов, не составит особого труда определить коэффициент гидравлического сопротивления кольцевого канала с одной или двумя проницаемыми стенками, представив его также в виде произведения $\xi = \xi_0 \Psi$. Таким же образом можно найти и величину нагрева теплоносителя в распределительном и отводном каналах реактора радиального типа в результате диссипации механической энергии потока, оценить устойчивость фильтрации в топливном слое, уточнить область конструкционных и термогазодинамических параметров, отвечающих автомоделному теплосъему в активной зоне при работе ядерной установки на частичных нагрузках.

Список использованных источников

1. Маккавеев, В. М. Теория гидродинамических процессов с большим гашением энергии / В. М. Маккавеев // Труды II всесоюзного гидрологического съезда в Ленинграде, 20–27 апреля 1928 г. – Л.: Гос. гидрол. ин-т, 1930. – С. 49–60.
2. Ненько, Я. Т. О движении жидкости с переменной вдоль потока массой / Я. Т. Ненько // Тр. Харьков. гидрометеорол. ин-та. – Харьков, 1938. – С. 3–50.
3. Патрашев, А. Н. Движение жидкости в каналах с переменным расходом по пути / А. Н. Патрашев // Изв. НИИ гидротехники. – 1940. – Т. 28. – С. 5–30.
4. Петров, Г. А. Гидравлика переменной массы / Г. А. Петров. – Харьков: Харьков. ун-т, 1964. – 224 с.
5. Навоян, Х. А. Примеры гидравлических расчетов водопропускных сооружений / Х. А. Навоян. – Киев: Будівельник, 1975. – 148 с.
6. Ньютон, И. Математические начала натуральной философии / И. Ньютон. – М.: Наука, 1989. – 688 с.
7. Орир, Дж. Физика: в 2 т. / Дж. Орир. – М.: Мир, 1981. – Т. 1. – 336 с.
8. Маркеев, А. П. Теоретическая механика / А. П. Маркеев. – М.: ЧеРо, 1999. – 572 с.

9. Голубев, Ю. Ф. Основы теоретической механики / Ю. Ф. Голубев. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 719 с.
10. Бэтчелор, Дж. Введение в динамику жидкости / Дж. Бэтчелор. – М.: Мир, 1973. – 758 с.
11. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
12. Мещерский, И. В. Работы по механике тел переменной массы / И. В. Мещерский. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 280 с.
13. Кинни, Р. Б. Турбулентное течение, теплообмен и массообмен в трубе с поверхностным отсосом / Р. Б. Кинни, Е. М. Спэрроу // Теплопередача. – 1970. – Т. 92, № 2. – С. 121–131.
14. Коченов, И. С. О гидравлическом сопротивлении системы охлаждения ядерного реактора / И. С. Коченов, О. Ю. Новосельский // Атом. энергия. – 1967. – Т. 23, вып. 2. – С. 113–120.
15. Каган, А. М. Распределение газового потока в плоском аппарате с развернутым зернистым слоем / А. М. Каган, А. С. Шушнов, И. И. Гальперин // Хим. пром-сть. – 1980. – № 1. – С. 42–44.
16. Горелик, А. Г. Исследование гидродинамики радиальных реакторов для каталитического дожигания отходящих газов / А. Г. Горелик, Л. Н. Меламед, А. В. Анитин // Теор. основы хим. технологии. – 1980. – Т. 14, № 3. – С. 378–385.
17. Войтов, В. И. Реакторы с микротвэлами: гидродинамика проницаемых каналов насыпной сборки / В. И. Войтов, В. П. Колос // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2019. – Т. 64, № 2. – С. 182–196. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-1-182-196>
18. Коченов, И. С. Гидравлическое сопротивление каналов с проницаемой стенкой / И. С. Коченов, О. Ю. Новосельский // Инженер.-физ. журнал. – 1969. – Т. 16, № 3. – С. 405–412.
19. Кузнецкий, Р. С. Распределение скорости и давления жидкости вдоль трубы с отверстиями / Р. С. Кузнецкий // Инженер.-физ. журн. – 1971. – Т. 20, № 1. – С. 129–133.
20. Смыслов, В. В. Анализ уравнения движения жидкости в трубопроводах с переменной раздачей вдоль пути / В. В. Смыслов, Н. О. Езерский // Гидравлика и гидротехника. – 1974. – № 18. – С. 132–139.
21. Грикевич, Э. А. Распределение скоростей движения жидкости и потерь напора в скважине / Э. А. Грикевич // Водоснабжение и канализация. – 1974. – Вып. 4. – С. 77–81.
22. Смыслов, В. В. Гидравлический расчет трубопроводов с переменной раздачей вдоль пути / В. В. Смыслов, Ю. М. Константинов // Гидравлика и гидротехника. – 1972. – № 14. – С. 24–31.
23. Анофриев, Г. И. Гидравлические характеристики однорядных коллекторных систем / Г. И. Анофриев, П. И. Быстров // Теплоэнергетика. – 1971. – № 9. – С. 32–35.
24. Рейзис, Э. А. Гидравлический расчет контактных радиальных аппаратов / Э. А. Рейзис // Теор. основы хим. технологии. – 1967. – Т. 1, № 3. – С. 380–382.
25. Дильман, В. В. Описание движения потока в каналах с проницаемыми стенками на основе уравнения энергии / В. В. Дильман, С. П. Сергеев, В. С. Генкин // Теор. основы хим. технологии. – 1971. – Т. 5, № 4. – С. 564–572.
26. Шимко, К. И. Уравнение движения жидкости в перфорированных трубопроводах постоянного поперечного сечения с учетом закона раздачи расходов вдоль пути / К. И. Шимко, А. Е. Елисеев // Вод. хоз-во Белоруссии. – 1975. – Вып. 5. – С. 138–144.
27. Егоров, А. И. Исследование закономерностей движения жидкости в трубчатых распределителях и сборниках водоочистных сооружений / А. И. Егоров // Труды ВНИИ ВОДГЕО. – 1970. – № 27. – С. 22–30.
28. Егоров, А. И. Распределение воды дырчатыми трубами с постоянным шагом отверстий / А. И. Егоров // Труды ВНИИ ВОДГЕО. – 1972. – № 36. – С. 142–159.
29. Быстров, П. И. Гидродинамика коллекторных теплообменных аппаратов / П. И. Быстров, В. С. Михайлов. – М.: Энергоиздат, 1982. – 224 с.
30. Меерович, И. Г. Гидродинамика коллекторных систем / И. Г. Меерович, Г. Ф. Мучник. – М.: Наука, 1986. – 144 с.
31. Идельчик, И. Е. Метод расчета раздачи потока вдоль контактных, фильтрующих и других подобных аппаратов цилиндрической формы / И. Е. Идельчик // Инженер.-физ. журн. – 1965. – Т. 8, № 5. – С. 635–638.
32. Хантли, Г. Е. Анализ размерностей / Г. Е. Хантли. – М.: Мир, 1970. – 175 с.
33. Трубецков, Д. И. Две лекции. Анализ размерностей или райская жизнь в физике / Д. И. Трубецков // Изв. вузов. Приклад. нелинейная динамика. – 2012. – Т. 20, № 1. – С. 16–32. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2012-20-1-16-32>
34. Siano, D. B. Orientational Analysis – a Supplement to Dimensional Analysis – I / D. B. Siano // J. Franklin Inst. – 1985. – Vol. 320, iss. 6. – P. 267–283. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(85\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0016-0032(85)90031-6)
35. Siano, D. B. Orientational Analysis, Tensor Analysis and Group Properties of the SI Supplementary Units – II / D. B. Siano // J. Franklin Inst. – 1985. – Vol. 320, iss 6. – P. 285–302. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(85\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0016-0032(85)90032-8)

References

1. Makkaveev V. M. Theory of hydrodynamic processes with large energy dissipation. *Trudy II vsesoyuznogo gidrologicheskogo s'ezda v Leningrade, 20–27 aprelya 1928 g.* [Proceedings of the II All-Union Hydrological Congress in Leningrad, April 20–27, 1928]. Leningrad, State Hydrological Institute, 1930, pp. 49–60 (in Russian).
2. Nenioko J. T. About the fluid motion with variable mass along the way. *Trudy Khar'kovskogo gidrometeorologicheskogo instituta* [Proceedings of the Kharkiv Hydrometeorological Institute]. Kharkiv, 1938, pp. 3–50 (in Russian).
3. Patrashev A. N. The movement of fluid in channels with variable flow rate along the way. *Izvestiya NII gidrotekhniki* [News of the Research Institute of Hydraulic Engineering], 1940, vol. 28, pp. 5–30 (in Russian).

4. Petrov G. A. *Hydraulics of Variable Mass*. Kharkiv, Kharkiv University, 1964. 224 p. (in Russian).
5. Navoian H. A. *Examples of Hydraulic Calculations of Culverts*. Kyiv, Budivilnic Publ., 1975. 149 p. (in Russian).
6. Newton I. *Adventurer in Thought. Chapter 8 – Natural Principles of Mathematics*. Cambridge University Press, 2010, pp. 202–224. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511622403.010>
7. Orear J. *Physics*. New York, Macmillan, 1979. xvi, 752 p.
8. Markeev A. P. *The Theoretical Mechanics*. Moscow, ChePo Publ., 1999. 572 p. (in Russian).
9. Golubev Yu. F. *Fundamentals of Theoretical Mechanics*. Moscow, MSU Publ., 2000. 719 p. (in Russian).
10. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000. xviii, 615 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955>
11. Loitsyanskii L. G. *Mechanics of Fluid and Gas*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 736 p. (in Russian).
12. Mescherskii I. V. *Equations of the Movement of a Point with Variable Mass in Total Case*. Moscow, State Publ. House on Construction and Architecture, 1952. 318 p. (in Russian).
13. Kinney R. B., Sparrow E. M. Turbulent Flow, Heat Transfer, and Mass Transfer in a Tube With Surface Suction. *ASME Journal Heat Transfer*, 1970, vol. 92, no. 1, pp. 117–124. <https://doi.org/10.1115/1.3449600>
14. Kochenov I. S., Novosel'skii O. Yu. On the hydraulic resistance of the nuclear reactor cooling system. *Atomnaya energiya* [Atomic Energy], 1967, vol. 23, no. 2, pp. 113–120 (in Russian).
15. Kagan A. M., Pushnov A. S., Gal'perin I. I. Gas flow distribution in a flat apparatus with an expanded granular layer. *Khimicheskaya promyshlennost'* = *Industry & Chemistry*, 1980, no. 1, pp. 42–44 (in Russian).
16. Gorelik A. G., Melamed L. N., Anitin A. V. Investigation of radial reactors the hydrodynamics for catalytic afterburning of exhaust gases. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoi tekhnologii = Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 1980, vol. 14, no. 3, pp. 378–385 (in Russian).
17. Voitov I. V., Kolos V. P. Reactors with micro fuel particles: hydrodynamics of permeable channels of the bulk assembly. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-tekhnichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2019, vol. 64, no. 2, pp. 182–196 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2019-64-1-182-196>.
18. Kochenov I. S., Novosel'skii O. Yu. Hydraulic resistance of channels with permeable walls. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1969, vol. 16, no. 3, pp. 275–281. <https://doi.org/10.1007/BF01840621>
19. Kuznetskii R. S. Fluid velocity and pressure distributions along a pipe with holes. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1971, vol. 20, no. 1, pp. 96–99. <https://doi.org/10.1007/BF00868595>
20. Smyslov V. V., Ezerskii N. J. Analysis of the equation of fluid motion in pipelines with variable distribution along the path. *Gidravlika i gidrotekhnika* [Hydraulics and Hydraulic Engineering]. Kyiv, 1974, no. 18, pp. 132–130 (in Russian).
21. Grikevich E. A. Distribution of fluid velocity and pressure losses in a well. *Vodospabzhenie i kanalizatsiya* [Water Supply and Sewerage], 1974, iss. 4, pp. 77–81 (in Russian).
22. Smyslov V. V., Konstantinov Yu. M. Hydraulic calculation of pipelines with variable distribution along the path. *Gidravlika i gidrotekhnika* [Hydraulics and Hydraulic Engineering]. Kyiv, 1972, no. 14, pp. 24–31 (in Russian).
23. Anofriev G. I., Bystrov P. I. Hydraulic characteristics of single-row collector systems. *Teploenergetika = Thermal Engineering*, 1971, no. 9, pp. 32–35 (in Russian).
24. Reizis E. A. Hydraulic calculation of contact radial devices. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoi tekhnologii = Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 1967, vol. 1, no. 3, pp. 380–382 (in Russian).
25. Dilman V. V., Sergeev S. P., Genkin V. S. The description of the stream movement with permeable walls on the basis of the energy equation. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoi tekhnologii = Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 1971, vol. 5, no. 4, pp. 564–572 (in Russian).
26. Shimko K. I., Eliseev K. E. Equation of fluid motion in constant cross section perforated pipelines taking into account the low of consumption distribution along the path. *Vodnoe khozyaistvo Belorussii* [Water Management of Belarus]. Minsk, 1975, iss. 5, pp. 138–144 (in Russian).
27. Egorov A. I. Investigation of the laws of fluid movement in tubular distributors and collectors of water treatment facilities. *Trudy VNII VODGEO* [Proceedings of the All-Union Scientific Research Institute of Water Supply, Sewerage, Hydraulic Structures and Engineering Hydrogeology]. Moscow, 1970, no. 27, pp. 22–30 (in Russian).
28. Egorov A. I. Distribution of water by perforated pipes with a constant hole. *Trudy VNII VODGEO* [Proceedings of the All-Union Scientific Research Institute of Water Supply, Sewerage, Hydraulic Structures and Engineering Hydrogeology]. Moscow, 1972, no. 36, pp. 142–159 (in Russian).
29. Bystrov P. I., Mikhailov V. S. *Hydrodynamics of Collector Heatexchange Devices*. Moscow, Energoizdat Publ., 1982. 224 p. (in Russian).
30. Meerovich I. G., Muchnik G. F. *The Hydrodynamics of Collector Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1986. 144 p. (in Russian).
31. Idel'chik I. E. Method of calculating flow distribution along contact, filter, and similar apparatus of cylindrical shape. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1965, vol. 8, no. 5, pp. 433–435. <https://doi.org/10.1007/BF00830324>
32. Huntley H. E. *Dimensional Analysis*. London, Macdonald, 1952. 158 p.
33. Trubetskoy D. I. Two lectures. Dimensional analysis or paradise life in physics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20, no. 1, pp. 16–32 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2012-20-1-16-32>
34. Siano D. B. Orientational Analysis – a Supplement to Dimensional Analysis – I. *Journal of the Franklin Institute*, 1985, vol. 320, iss. 6, pp. 267–283. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(85\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0016-0032(85)90031-6)
35. Siano D. B. Orientational Analysis, Tensor Analysis and Group Properties of the SI Supplementary Units – II. *Journal of the Franklin Institute*, 1985, vol. 320, iss. 6, pp. 285–302. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(85\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0016-0032(85)90032-8)