Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Высшая математика

Учебно-методическое пособие для студентов заочного факультета

В 4-х частях

Часть 1

Минск 2005

УДК 51(075.8)
ББК 22.11
В 93

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

Составители:
Ж.Н. Горбатович, А.С. Семенкова, Е.А. Шинкевич

Рецензенты:
доцент кафедры высшей математики БГЭУ,
кандидат физ.-мат. наук *С.Я. Гороховик*;
доцент кафедры информационных систем и технологий БГТУ
Н.Н. Пустовалова;

Высшая математика : учеб.-метод. пособие для студентов
В 93 первого курса заочного факультета : в 4-х частях. Ч. 1 / сост. Ж.Н. Горбатович [и др.]. — Мн. : БГТУ, 2005. — 88 с.

ISBN 985-434-486-X

Приведены основные теоретические сведения по изучаемому курсу, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения.
Предназначено для студентов первого курса заочного факультета.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11

ISBN 985-434-486-X(Ч. 1)
ISBN 985-434-485-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам заочной формы обучения при самостоятельном изучении следующих тем курса «Высшая математика», «Линейная и векторная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», «Введение в математический анализ», «Производная функции», «Исследование функций и построение графиков».

Указанный материал расположен в главах, разбитых на параграфы и пункты. В каждом параграфе приводятся соответствующие теоретические сведения (определения основных понятий, уравнения, формулы, правила, методы). Затем следуют примеры решения типовых задач. После них предлагаются задачи для самостоятельного решения, представленные, как правило, в двух уровнях сложности. Нумерация задач дана самостоятельно в каждом параграфе. В конце каждого параграфа приводятся ответы на все вычислительные задачи.

При изложении материала применяются традиционные обозначения и терминология.

Пособие содержит справочный материал, схемы и графики.

Данное пособие может быть использовано при проведении практических занятий по перечисленным выше темам, подготовке к зачетам и экзаменам, выполнении контрольных работ.

Глава 1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1 1.1. Матрицы, определители

1.1.1. Матрицы. Основные определения

Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел (или других математических величин, объектов) из m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, образующие матрицу, называются элементами матрицы: a_{ik} – элемент, принадлежащий i-й строке и k-му столбцу матрицы, числа i, k называются **индексами** элемента.

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами $A, B, C, \dots$.

Например, матрица A размера 3×2 и матрица B размера 3×1 имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}.$$

Иногда размер матрицы пишут внизу: $A_{3\times 2}$, $B_{3\times 1}$ или $A=(a_{ij})_{3\times 2}$, $B=(b_{ij})_{3\times 1}$.

Матрицы A и B одинаковых размеров называются **равными**, если равны их соответствующие элементы:

$$a_{ik}=b_{ik},\quad i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n}.$$

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется **нулевой**. Она обозначается $O_{m\times n}$.

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n\times n$.

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ**.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix},\ C=(a_{11})$$ – матрицы соответственно второго, третьего и первого порядков.

Квадратная матрица называется **диагональной**, если ее элементы на главной диагонали не все равны нулю, а все остальные элементы равны нулю.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется **единичной матрицей**. Обозначается E_n. Например,

$$E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица 3-го порядка.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** относительно данной. Матрицу, транспонированную относительно матрицы A, обозначают A^T. Например, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix},\ \text{то}\ A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

К линейным операциям над матрицами относятся сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число.

Складывать и вычитать можно только матрицы **одинаковых** размеров.

Суммой (разностью) двух матриц $A=(a_{ik})_{m\times n}$ и $B=(b_{ik})_{m\times n}$ называется такая матрица $C=(c_{ik})_{m\times n}$, что $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$ $(c_{ik}=a_{ik}-b_{ik})$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$, т. е. матрица, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B.

Произведением матрицы $A=(a_{ik})_{m\times n}$ на число α (или числа α на матрицу A) называется матрица $B=(b_{ik})_{m\times n}$, для которой $b_{ik}=\alpha\cdot a_{ik}$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$, т. е. матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число α. Обозначение $\alpha A=A\alpha=B$.

Выражение $\alpha A+\beta B$ называется линейной комбинацией матриц A и B. Например, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & 7 & 8\end{pmatrix},$$

$$\text{то } 2A+B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 5\\ 8 & 7 & 18\end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 4 & -7 & -3\end{pmatrix}.$$

Произведением $A\cdot B$ **матриц** $A_{m\times n}$ и $B_{n\times r}$ называется матрица C размера $m\times r$ такая, что $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$, т. е. элемент i-й строки и j-го столбца матрицы произведения c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Операция умножения двух матриц вводится только для **случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.**

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ всегда существуют, но не обязательно равны.

1.1.2. Определители второго и третьего порядков и их свойства

Любой квадратной матрице n-го порядка A можно поставить в соответствие число, которое называется определителем матрицы A и обозначается $\det A$, $|A|$, ΔA (дельта).

Определителем 1-го порядка квадратной матрицы $A=(a_{11})$ называется значение a_{11}: $\det A=a_{11}$.

Определителем квадратной матрицы 2-го порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ называется число, равное $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, обозначаемое символом $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, т. е. $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определителем квадратной матрицы 3-го порядка

$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ называется число

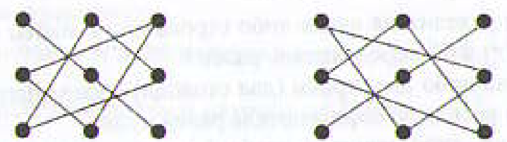
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}- \qquad (1.1)$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}.$$

1.2 Методы вычисления определителей

Правило «треугольников» или правило Саррюса вычисления определителей третьего порядка: первое из трех слагаемых, входящих в формулу (1.1) со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье – произведения элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (1.1) со знаком «–», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали.

Правило «треугольников» для вычисления определителя третьего порядка схематически можно изобразить следующим образом:



\+ –

Рис. 1

Разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки (можно получить из (1.1)):

$$\det A=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ называется произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ij}$.

Например, в матрице $A=\begin{pmatrix}2&1&5\\-1&4&2\\0&2&1\end{pmatrix}$ минором элемента a_{22} является $M_{22}=\begin{vmatrix}2&5\\0&1\end{vmatrix}=2$, минором элемента a_{32} – $M_{32}=\begin{vmatrix}2&5\\-1&2\end{vmatrix}=9$. Алгебраическое дополнение элемента a_{22} – $A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix}2&5\\0&1\end{vmatrix}=2$, а элемента a_{32} – $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-9$. Тогда $\det A=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$. **Определитель равен сумме произведений элементов строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.**

Разложение определителя n-го порядка по i-й строке:

$$\det A=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\dots+a_{in}\cdot A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{ij},\ \forall\, i=\overline{1,n}.$$

1.2 **Свойства определителей**

1. Если у определителя какая-либо строка или столбец состоит только из нулей, то такой определитель равен 0.
2. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя пропорциональны или равны, то определитель равен нулю.
3. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то весь определитель умножится на это число (т. е. из строки (столбца) можно выносить общий множитель).
4. Если две строки (два столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.
5. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить какую-либо другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.
6. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.
7. Если в определителе ниже главной диагонали стоят нули, то определитель равен произведению элементов главной диагонали.

1.1.4 **1.1.3. Обратная матрица. Матричные уравнения**

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка.

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если определитель $\det A$ не равен нулю: $\det A\neq 0$. В противном случае ($\det A=0$) матрица A называется **вырожденной**.

Матрицей, **присоединенной к матрице** $A=(a_{ij})_{n\times n}$, называется матрица $\widetilde{A}=(A_{ij})^T$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A.

Матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A, если выполняется условие $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Алгоритм нахождения обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы.
   Если $\det A=0$, то матрица A вырожденная и обратной матрицы не существует. Если $\det A\neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица существует.
2. Составляем присоединенную матрицу $\widetilde{A}=(A_{ij})^T$.
3. Находим обратную матрицу по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}$.
4. Проверяем правильность вычислений: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом:

$$AX=B \text{ или } XA=B.$$

В этих уравнениях A, B, X – матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения возможны и с обеих сторон от знака равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Если в уравнениях $AX=B$, $XA=B$ матрица A невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$$X=A^{-1}B \text{ или } X=BA^{-1}.$$

1.1.4. Примеры решения задач

Пример 1А. Найти произведения матриц AB и BA (если это возможно):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}\boxed{1\quad 2\quad 3}\\ -1\quad 0\quad 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}3\\6\\7\end{matrix}} & \begin{matrix}4\\0\\1\end{matrix} & \begin{matrix}5\\-2\\8\end{matrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{первая строка матрицы A прикладывается}\\ \text{к первому столбцу матрицы B, соответствующие}\\ \text{элементы перемножаются, а произведения складываются}\end{matrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}\boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ -1\cdot3+0\cdot6+1\cdot7 & -1\cdot4+0\cdot0+1\cdot1 & -1\cdot5+0\cdot(-2)+1\cdot8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ 4 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A ($3\neq2$).

Пример 2А. Вычислить определители 2-го порядка:

$$\text{а) }\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix};\ \text{б) }\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{vmatrix}.$$

Решение.

а) $\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)\cdot3-3\cdot2=-9$;

б) $\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{vmatrix}=(a+b)(a+b)-(a-b)(a-b)=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

Пример 3А. Вычислить определители 3-го порядка:

$$\text{а) }\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix};\ \text{б) }\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 7\end{vmatrix}.$$

Решение.

а) Вычислим по правилу треугольника:

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=2\cdot(-5)\cdot9+3\cdot4\cdot8+2\cdot6\cdot7-3\cdot(-5)\cdot7-2\cdot6\cdot8-4\cdot2\cdot9=27;$$

б) Для вычисления второго определителя воспользуемся свойством 7:

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 7\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot7+(4\cdot5\cdot0+0\cdot0\cdot3-3\cdot5\cdot0-4\cdot0\cdot7-5\cdot0\cdot1)=35.$$

Пример 4А. Вычислить определитель, используя свойства

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 7 & 8 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}\cdot(-4)\\ +\\ \ \end{matrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -2\\ 7 & 8 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}\cdot(-7)\\ \ \\ +\end{matrix}=$$

$$=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -4\end{vmatrix}=3\cdot2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & -3 & -2\end{vmatrix}=0.$$

При вычислении использованы свойство 3 (множитель 3 из третьего столбца вынесен за знак определителя), свойство 5 (получены в первом столбце два нуля), свойство 3 (из третьей строки вынесен множитель 2), свойство 2 (определитель с двумя равными строками равен нулю).

Пример 5А. Вычислить определители, разлагая их по элементам первого столбца:

а) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 6 & 3 & 7\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-4\cdot(-16)+$

$+6\cdot(-11)=-2+64-66=-4$;

б) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-2.$

Пример 6Б. Вычислить определитель Δ, получив предварительно нули ниже главной диагонали:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&2&5\\6&3&7\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&2&5\\3&3&7\end{vmatrix}\cdot(-2)=2\cdot\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&4&-1\\3&3&7\end{vmatrix}\cdot(-3)=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&4&-1\\0&6&-2\end{vmatrix}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=2\cdot\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&4&-1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-4.$$

Из решений последних двух примеров видно, что чем больше в строке (столбце) нулей, тем легче вычислить определитель, разлагая его по элементам этой строки (столбца). Нули в строке (столбце) можно получить, используя свойство 5.

Пример 7Б. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}-1&1\\2&-3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-4\end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем данное матричное уравнение в виде $AX=B$. Его решением является матрица $X=A^{-1}B$ (если существует матрица A^{-1}).

Найдем обратную матрицу.

1. Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}-1&1\\2&-3\end{vmatrix}=1\neq0.$$

Значит, обратная матрица A^{-1} существует и исходное уравнение имеет единственное решение.

2. Транспонируем матрицу A:

$$A^T=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-3\end{pmatrix}.$$

Составим присоединенную матрицу. Для этого найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A^T:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-3)=-3,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot1=-1,$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot2=-2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot(-1)=-1.$$

Присоединенная матрица имеет вид

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-3&-1\\-2&-1\end{pmatrix}.$$

3. Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-3&-1\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1\\-2&-1\end{pmatrix}.$$

4. Запишем решение уравнения:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-3&-1\\-2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&3\\1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-5\\3&-2\end{pmatrix}.$$

1.1.5. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Найти матрицу, транспонированную матрице A:

а) $A=\begin{pmatrix}2&5&4\\1&3&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}a&a&a\end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&3\\5&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\\7&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\5&6\\-2&3\end{pmatrix}$.

Найти: а) $2A$; б) $2A+3B-C$; в) $-2C^T$.

3. Найти $3A+2E$, если $A=\begin{pmatrix}2&5&-4\\-1&-3&1\\2&1&-2\end{pmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

4. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix}2&-5\\3&-1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}a&1\\a^2&-a\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}\cos x&\sin x\\-\cos x&\sin x\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}\sqrt[4]{a}&a\\-1&\sqrt[4]{a^3}\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}\ln x&\ln y\\2&5\end{vmatrix}$.

5. Вычислить определители третьего порядка различными способами:

а) $\begin{vmatrix}-1&5&2\\3&-2&7\\5&-6&3\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}0&-a&-b\\a&0&-c\\b&c&0\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\1&1&0\\0&\cos\alpha&\sin\alpha\end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Найти обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$.

Б

7. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

8. Построить график функции $y = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

9. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.6. Ответы

А

1. а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A^T = (1 \;\; 2 \;\; 3)$; в) $A^T = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$. **2.** а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 3 \\ 33 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -6 & -12 & -6 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -12 \\ -3 & -7 & 3 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. **4.** а) 13;

б) $-2a^2$; в) $\sin 2x$; г) $2a$; д) $\lg \frac{x^5}{y^2}$. **5.** а) 78; б) 0; в) $\sin 2\alpha$; г) 78;

д) 100; е) –6. **6.** а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) не существует.

Б

7. $x = -3$. **8.** прямая $y = 2x - 2$. **9.** а) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.3

1.2. Системы линейных уравнений

1.2.1. Основные понятия

Система m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется **линейной**, если она имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

где a_{ik} – коэффициенты при неизвестных, b_i – свободные члены $(i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,n})$.

Упорядоченное множество чисел $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$ называется **решением системы** (1.2), если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной**.

Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Система уравнений, у которой все свободные члены равны нулю, называется **однородной**. Однородная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Однородная система всегда совместна, так как она имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, хотя оно не обязательно единственно.

Две системы уравнений называются **эквивалентными** или **равносильными**, если любое решение одной из них является также решением другой и наоборот.

Эквивалентные системы уравнений получаются в результате следующих преобразований:

1) умножения уравнения системы на число, отличное от нуля;
2) прибавления к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на любое число;
3) перестановки местами двух уравнений системы.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называется **определителем системы** (1.4).

Если определитель системы отличен от нуля, то система (1.4) имеет единственное решение, которое может быть найдено по **формулам Крамера**

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},} \qquad (1.5)$$

где Δ_k $(k = \overline{1,n})$ – определитель, полученный из Δ заменой k-го столбца столбцом из свободных членов системы.

1.3

1.2.2. Исследование системы трех уравнений с тремя неизвестными

Формулы Крамера

Система трех уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Вспомогательные определители Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Система (1.6) может быть представлена в виде $\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y, \\ \Delta \cdot z = \Delta_z. \end{cases}$

Откуда следует, что при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.} \qquad (1.7)$$

При $\Delta = 0$ и хотя бы одном из Δ_x, Δ_y, Δ_z отличном от нуля система (1.6) несовместна.

При $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ система имеет бесчисленное множество решений.

1.5

Метод Гаусса

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных) является наиболее универсальным методом решения любых систем.

Рассмотрим систему $\begin{cases} x + y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = 4, \\ 3x + 4y + z = 0. \end{cases} \qquad (1.8)$

Исключим x из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на –2 и сложим со вторым, затем первое уравнение умножим на –3 и сложим с третьим. Получим систему, равносильную данной: $\begin{cases} x+y+3z=5, \\ y-7z=-6, \\ y-8z=-15. \end{cases}$ Далее исключим y из третьего уравнения, для чего второе уравнение полученной системы умножим на –1 и сложим с третьим. Получим систему

$$\begin{cases} x+y+3z=5, \\ y-7z=-6, \\ z=9. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Из третьего уравнения $z=9$, подставим во второе и найдем $y=57$. Подставив найденные значения z и y в первое уравнение, получим $x=-79$.

Рассмотренный метод решения, заключающийся в сведении системы (1.8) к системе (1.9), имеющей треугольный вид

$$\begin{cases} \bullet+\bullet+\bullet=\bullet, \\ \bullet+\bullet=\bullet, \\ \bullet=\bullet, \end{cases}$$

называется **методом Гаусса**.

1.2.3. Примеры решения задач

Пример 1А. Решить систему $\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=0 \end{cases}$ по формулам Крамера.

Решение. Найдем определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3);\ \cdot(-1) \\ \lrcorner+ \\ \lrcorner+ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5+8=3\neq 0,$$

значит система имеет единственное решение.

Вычислим Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3);\cdot(-1) \\ \lrcorner+ \\ \lrcorner+ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -7 & -8 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -8 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -7-32=-39,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3);\cdot(-1) \\ \lrcorner+ \\ \lrcorner+ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -5 & -7 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 20+7=27,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow+ \\ \cdot(-2);\cdot(-3) \\ \lrcorner+ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -15 \end{vmatrix} = -(-15+6)=9.$$

По формулам Крамера находим

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-39}{3}=-13,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{27}{3}=9,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{9}{3}=3.$$

Пример 2А. Решить систему $\begin{cases} x+y+z=5, \\ x-y+z=1, \\ x+z=2 \end{cases}$ по формулам Крамера.

Решение. Найдем определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \lrcorner+ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \lrcorner+ = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(6-4)=-2\neq 0.$$

Так как $\Delta=0$, а $\Delta_x\neq 0$, то система несовместна.

Эту систему можно решить иначе: сложим первое и второе уравнения, получим эквивалентную систему:

$\begin{cases} x+y+z=5, \\ 2x+2z=6, \\ x+z=2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y+z=5, \\ x+z=3, \\ x+z=2, \end{cases}$ у которой второе и третье уравнения противоречивы. Такая система несовместна.

Пример 3А. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 3x+4y-z=7, \\ x+2y-3z=0, \\ 7x+10y-5z=2. \end{cases}$

Решение. Поменяем местами первое и второе уравнения системы (так как удобно иметь коэффициент при x, равный 1):

$$\begin{cases} x+2y-3z=0, & \cdot(-3);\cdot(-7) \\ 3x+4y-z=7, & \lrcorner+ \\ 7x+10y-5z=2. & \lrcorner+ \end{cases}$$

Получим систему $\begin{cases} x+2y-3z=0, \\ -2y+8z=7, \cdot(-2) \\ -4y+16z=2. \quad \lrcorner+ \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y-3z=0, \\ -2y+8z=7, \\ 0=-12, \end{cases}$ что неверно. Следовательно, система несовместна.

1.2.4. Задачи для самостоятельного решения

А

Решить системы уравнений, дать геометрическую интерпретацию (1–3):

1. $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x+2y=21. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+6y=2, \\ 2x+4y=5. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 10x+15y-20=0, \\ 6x+9y-12=0. \end{cases}$

Решить по формулам Крамера или методом Гаусса системы (4–9):

4. $\begin{cases} 4x-y-2z=-2, \\ x+2y+3z=11, \\ x-z=-1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 5x_1+5x_2-x_3=0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x-3y+z=7, \\ -3y+y-2z=3, \\ x+7y-4z=0. \end{cases}$

1.2.5. Ответы

1. $\{(5;3)\}$, прямые пересекаются. **2.** Система несовместна, прямые параллельны. **3.** $\left\{\left(\frac{4-3t}{2};t\right)\middle| t\in R\right\}$, прямые совпадают. **4.** $\{(1;2;2)\}$. **5.** $\{(0;0;0)\}$. **6.** Несовместна.

1.3. Элементы векторной алгебры

1.3.1. Основные понятия

Вектором называется направленный отрезок.

На чертеже вектор изображается отрезком, на котором стрелкой помечено направление (рис. 3).

Рис. 3

Если один конец отрезка AB – точка A есть начало вектора, а точка B – конец вектора, то вектор обозначается символом $\vec{AB}$ или $\overline{AB}$.

Используются и другие обозначения вектора: $\vec{a}$, $\bar{a}$, **a**.

Расстояние между началом и концом вектора называется его **модулем** (или длиной). Обозначается модуль так: $|\vec{AB}|$, $|\vec{a}|$.

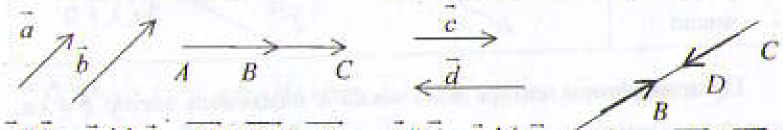
Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым** вектором, обозначается $\vec{0}$. Модуль нулевого вектора равен 0, а направление не определено.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** (или ортом), обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор, имеющий направление вектора $\vec{a}$, обозначается $\vec{e_a}$ или $\vec{a}^0$.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной прямой), называются **коллинеарными** $\left(\vec{a}\parallel\vec{b}\right)$. Примеры коллинеарных векторов приведены на рис. 4.

Два коллинеарных вектора называются **противоположными**, если они имеют равные модули и противоположное направление. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $(-\vec{a})$.

Сонаправленные Противоположно направленные



$\vec{a}\parallel\vec{b}$; $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; $\overline{AB}\parallel\overline{BC}\parallel\overline{AC}$ $\vec{c}\parallel\vec{d}$; $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{d}$ $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$

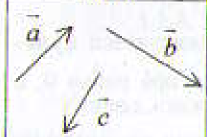
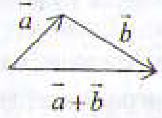
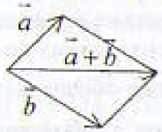
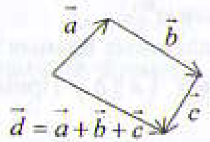
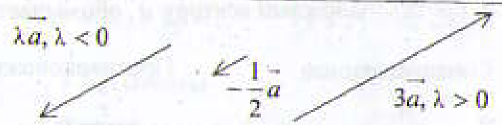
Рис. 4

2.2.
1.3.2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называют их сложение, вычитание, умножение вектора на число.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совмещено с концом вектора $\vec{a}$. Записывают $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который нужно сложить с вектором $\vec{b}$, чтобы получить вектор $\vec{a}$, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, если $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Чтобы построить разность $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить их из одной точки и соединить концы. Направление выбирается от «вычитаемого» к «уменьшаемому».

Дано	Действия над векторами	
	Сложение векторов	
	правило треугольника 	правило параллелограмма 
	 – правило многоугольника	
	Умножение вектора на число	
 λ – число		

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, который удовлетворяет условиям: 1) $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$; 2) $\vec{b}$ и $\vec{a}$ – сонаправлены при $\lambda>0$; 3) $\vec{b}$ и $\vec{a}$ – противоположно направлены при $\lambda<0$.

2.2
Основные свойства линейных операций над векторами

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;
4) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}=\mu(\lambda\vec{a})$;
5) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
6) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
7) $\vec{a}\cdot 0=\vec{0}$;
8) $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$;
9) $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$;
10) $\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$;

11) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

1.3
1.3.3. Координаты вектора

Координатами вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называются проекции x, y, z вектора $\vec{a}$ на оси координат. Обозначают $\vec{a}=(x;y;z)$.

Если $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы (орты) координатных осей, то вектор $\vec{a}=(x;y;z)$ можно представить в виде $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ (рис. 5).

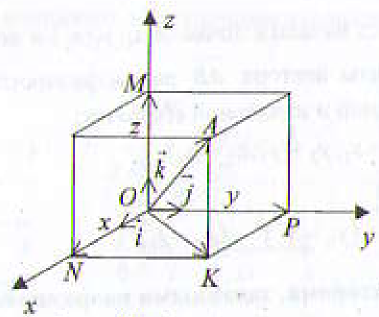


Рис. 5

$\overline{ON}=x\vec{i}$; $\overline{OP}=y\vec{j}$; $\overline{OM}=z\vec{k}$; $\overline{OA}=\overline{OK}+\overline{KA}$; $\overline{KA}=\overline{OM}$;
$\overline{OK}=\overline{ON}+\overline{OP}$; $\vec{a}=\overline{OA}=\overline{ON}+\overline{OP}+\overline{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (1.10)$$

25+ **Направляющими косинусами** вектора называются косинусы углов α, β, γ (рис. 6), образуемых им с осями координат.

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \quad (1.11)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (1.12)$$

Единичный вектор, имеющий направление вектора $\vec{a}$,

$$\vec{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma). \quad (1.13)$$

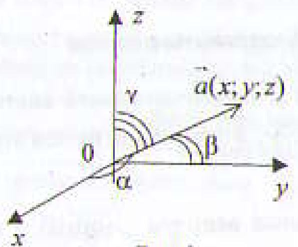


Рис. 6

Если вектор $\vec{a}$ имеет начало в точке $A(x_1;y_1;z_1)$ и конец в точке $B(x_2;y_2;z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разности соответствующих координат конечной и начальной его точек:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (1.14)$$

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.15)$$

2.3

Действия над векторами, заданными координатами

Пусть $\vec{a} = (x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b} = (x_2;y_2;z_2)$. Тогда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2), \quad (1.16)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1), \quad (1.17)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2. \quad (1.18)$$

2.3

Условие параллельности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (1.19)$$

Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \quad (1.20)$$

Деление отрезка в данном отношении

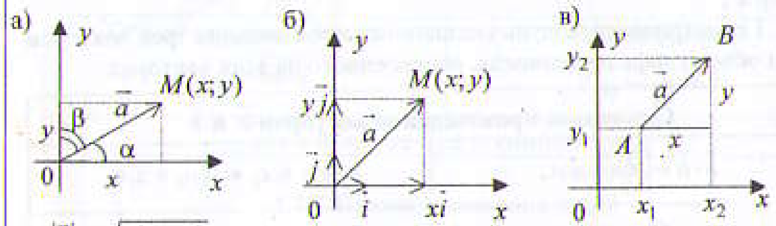
Пусть даны две точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ и пусть точка $C(x;y;z)$ такая, что $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \lambda$, тогда координаты точки C находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \quad (1.21)$$

Координаты середины отрезка AB

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1.22)$$

В системе координат Oxy координаты вектора $\vec{a} = (x;y)$ (рис. 7).



$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$\vec{a} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$x = x_2 - x_1$;

$y = y_2 - y_1$;

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Рис. 7

2.4

1.3.4. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов и их применение

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (1.23)$$

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую** – если по часовой.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=[\vec{a}\times\vec{b}]$, который:

1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

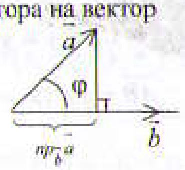
2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах:

$|[\vec{a}\times\vec{b}]|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}\times\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$.

Геометрически модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$	
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$
Приложения скалярного произведения:	
Проекция вектора на вектор $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 	**Работа силы** $\vec{F}$ при перемещении материальной точки по прямой из точки A в точку B $A=\vec{F}\cdot\vec{S}=|\vec{F}||\vec{S}|\cos\varphi,\ \vec{S}=\overrightarrow{AB}$

Угол между векторами $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ (если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы)
Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c}=[\vec{a}\times\vec{b}]$	
$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi,$ $[\vec{a}\times\vec{b}]=0\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\parallel\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{b}\neq 0.$	$\vec{c}=[\vec{a}\times\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=$ $=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}$
Площадь параллелограмма $S_{пар}=|[\vec{a}\times\vec{b}]|$	Площадь треугольника $S_{тр}=\frac{1}{2}|[\vec{a}\times\vec{b}]|$
Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$	
$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=x_1\begin{vmatrix}y_2&z_2\\y_3&z_3\end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix}x_2&z_2\\x_3&z_3\end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_3&y_3\end{vmatrix}$	
Объем параллелепипеда $V_{пар}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$	Объем пирамиды $V_{пир}=\frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$
$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0\ \Leftrightarrow\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – компланарны.	

1.3.5. Примеры решения задач

Пример 1А. Даны точки $A(1;2)$ и $B(5;4)$. Найти: а) координаты $\overrightarrow{AB}$; б) модуль $|\overrightarrow{AB}|$; в) углы, которые вектор $\overrightarrow{AB}$ образует с осями координат. Сделать чертеж.

Решение. Чертеж на рис. 8.

а) Координаты $\overrightarrow{AB}=(5-1;4-2)=(4;2)$ (формула (1.5)).

б) Модуль $\overrightarrow{AB}$ найдем, используя формулу (1.6):

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

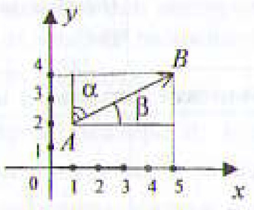


Рис. 8

в) По формулам (1.2) найдем $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\alpha = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$\cos\beta = \dfrac{y}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Пример 2А. Даны векторы $\vec{a} = (1;-2;1)$, $\vec{b} = (3;2;1)$, $\vec{c} = (1;0;-1)$. Найти: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; в) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Решение. Воспользуемся следующими формулами:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 1\cdot3 + (-2)\cdot2 + 1\cdot1 = 3 - 4 + 1 = 0$, значит векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны;

б) $$[\vec{a}\times\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} +$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} = ((-2)\cdot(-1) - 1\cdot0)\vec{i} - (1\cdot(-1) - 1\cdot1)\vec{j} + (1\cdot0 - (-2)\cdot1)\vec{k} =$$

$$= 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k};$$

в) $$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(2\cdot2 - 4\cdot(-2)) = -12.$$

Пример 3А. По условию предыдущей задачи найти:

а) $\cos\varphi$, φ – угол между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

б) $пр_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{c})$;

в) площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

а) $$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{3\cdot1 + 2\cdot0 + 1\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}};$$

б) $$пр_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{c}) = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}+2\vec{c})}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a} + 2\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|} = \frac{0 + 2\cdot2}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7};$$

в) $$S_{тр} = \frac{1}{2}\left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+2^2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}.$$

Пример 4А. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;3)$, $A_4(4;-3;-1)$. Найти:

а) длину ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) угол между ребрами A_1A_4 и A_1A_3;

г) объем пирамиды;

д) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Решение.

а) Определим координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = ((-2)-1; 4-2; 1-3) = (-3;2;-2)$, аналогично, $\overrightarrow{A_1A_3} = (6;4;0)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (3;-5;-4)$. Тогда $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(-3)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{17}$, $|\overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{6^2+4^2+0^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, $|\overrightarrow{A_1A_4}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

б) $$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}]\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|8\vec{i} - 12\vec{j} - 24\vec{k}| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + (-12)^2 + (-24)^2} = 14;$$

в) Угол между ребрами A_1A_4 и A_1A_3:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_4}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|} = \frac{3\cdot 6+(-5)\cdot 4+(-4)\cdot 0}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}} = -\frac{1}{5\sqrt{26}},$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{26}}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{5\sqrt{26}} = \pi - 1{,}53 \text{ рад;}$$

г) $$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & 0\\ 3 & -5 & -4\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|-2\begin{vmatrix}6 & 4\\ 3 & -5\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|(-2)\cdot(-42) - 4\cdot(-24)\right| = 30;$$

д) Объем пирамиды $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h$. В качестве основания возьмем грань $A_1A_2A_3$, площадь которой $S = 14$. В пункте г) найден объем пирамиды $V_{\text{пир}} = 30$. Следовательно, $h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{90}{14} = 6\frac{3}{7}$.

1.3.6. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$, $C(1;0;2)$. Найти: а) внутренний угол при вершине C; б) площадь треугольника ABC; в) длину высоты, опущенной из вершины C на AB.

2. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ ортогональны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны?

3. Какую работу производит сила $\overline{F} = (2;-1;-4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(1;-2;3)$ в точку $B(5;-6;1)$?

4. Даны векторы $\vec{a} = (1;-3;4)$, $\vec{b} = (3;-4;2)$, $\vec{c} = (-1;1;4)$. Найти $np_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}$.

5. Найти какой либо вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (1;2;3)$ и $\vec{b} = (0;2;5)$.

6. Даны два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}$ и $\vec{k}$. Найти $\vec{i}\times\vec{k}$ и $(\vec{i}+\vec{k})^2$.

Б

7. Доказать, что точки $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$ и $C(2;3;0)$ лежат на одной прямой, причем точка B расположена между точками A и C.

8. Дано: $\vec{a} = (1;-4;0)$, $\vec{b} = (6;3;-2)$, $\vec{c} = (0;-1;-2)$. Являются ли эти векторы линейно зависимыми?

1.3.7. Ответы

А

1. а) $\arccos\frac{18}{\sqrt{494}}$; б) $\frac{\sqrt{170}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{170}}{3}$. **2.** а) $\alpha = -5$; б) $\alpha = -10$, $\beta = -\frac{3}{5}$. **3.** 20. **4.** 5. **5.** $\vec{x} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$. **6.** $-\vec{j}$; 2.

Б

7. Указание: ввести векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$. **8.** Нет.

Глава 2. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

2.1. Полярные координаты

2.1.1. Основные понятия

Полярная система координат задается точкой O, которую называют **полюсом**, лучом Op, который называют **полярной осью**, и единичным вектором $\bar{e}$ того же направления, что и луч Op.

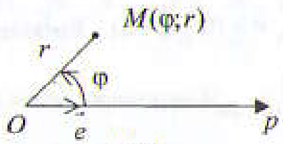


Рис. 9

Числа φ и r – полярные координаты точки M: φ – полярный угол, r – полярный радиус, $r \geq 0$, $\varphi \in [0;2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi;\pi]$.

Если совместить полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось – с положительной полуосью Ox (рис. 10), то устанавливается связь между полярными и декартовыми координатами:

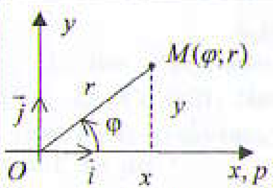


Рис. 10

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Дана точка M с полярными координатами $\left(-\frac{2}{3}\pi;2\right)$. Построить точку M и найти ее декартовые координаты.

Решение. Строим луч под углом $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$ к полярной оси. Так как угол отрицательный, то отсчет ведется по часовой стрелке. На луче откладываем отрезок OM, длина которого равна 2.

Декартовы координаты точки M:

$$x = r\cos\varphi = 2\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,$$

$$y = r\sin\varphi = 2\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}.$$

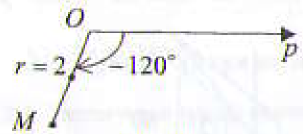


Рис. 11

Пример 2А. Найти полярные координаты точки $A(-3;3)$.

Решение. По формулам (2.1) для точки A имеем $r = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{-3} = -1$. Так как точка A лежит во второй четверти, то $\varphi = 135^\circ$ или $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Итак, $A\left(\frac{3\pi}{4};3\sqrt{2}\right)$.

Пример 3А. Построить кривую $r = \frac{3}{1-2\cos\varphi}$, придавая значения φ через 18°, и найти уравнение кривой в декартовых координатах.

Решение. Так как $r \geq 0$, то $1-2\cos\varphi > 0$, откуда следует, что $\cos\varphi < \frac{1}{2}$. Угол φ можно рассматривать только для точек верхней полуплоскости, так как в силу четности функции $y = \cos\varphi$, кривая будет симметрична относительно полярной оси. Итак, $\varphi > 60^\circ$ $(60^\circ < \varphi \leq \pi)$. Составим таблицу значений для r, φ.

φ	72°	90°	108°	126°	144°	162°	180°
$\cos\varphi$	0,31	0	–0,31	–0,59	–0,81	–0,95	–1
r	7,89	3	1,85	1,36	1,15	1,03	1

Чтобы получить уравнение кривой в декартовых координатах, воспользуемся уравнениями (2.1). Так как, то $r = \dfrac{3}{1 - 2 \cdot \dfrac{x}{r}} \Rightarrow$

$r = \dfrac{3r}{r - 2x}$, $r - 2x = 3$, $r = 3 + 2x$, $\sqrt{x^2 + y^2} = 3 + 2x$. Возводя в квадрат получим $x^2 + y^2 = 9 + 12x + 4x^2$ или $3x^2 + 12x - y^2 + 9 = 0$.

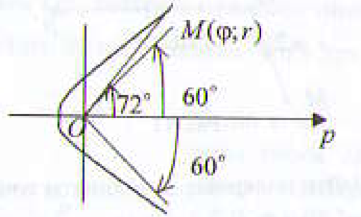


Рис. 12

Преобразования приводят к каноническому уравнению гиперболы: $3(x^2 + 4x) - y^2 + 9 = 0$, $3(x^2 + 4x + 4) - 12 - y^2 + 9 = 0$, $3(x+2)^2 - -y^2 = 3$. Тогда $\dfrac{(x+2)^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$. Центр гиперболы находится в точке $(-2;0)$, полуоси – $a = 1$, $b = \sqrt{3}$. Асимптоты гиперболы образуют с осью Ox углы $\pm 60^\circ$. В полярных координатах задано уравнение одной (правой) ветви.

2.1.3. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Найти прямоугольные координаты точек A, B, C, для которых известны полярные координаты: $A(0;3)$, $B\left(-\frac{\pi}{3};2\right)$, $C\left(\frac{2\pi}{3};1\right)$.

2. Сторона прямоугольного шестиугольника равна 1. Приняв за полюс одну из его вершин, а за полярную ось сторону, через нее проходящую, найти полярные координаты остальных пяти вершин.

Б

3. Построить кривую $r = \dfrac{2}{3 + \sin\varphi}$ и найти ее уравнение в декартовых координатах.

2.1.4. Ответы

1. $A(3;0)$, $B(1;-\sqrt{3})$, $C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **2.** $(0;1)$, $\left(\frac{\pi}{6};\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3};2\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3};1\right)$. **3.** $2x^2 + \frac{16}{9}\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = 1$ – эллипс.

2.2. Прямая линия на плоскости

3.1

2.2.1. Различные виды уравнения прямой

Уравнение $Ax + By + C = 0$, $\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ называется **общим уравнением прямой.**

Каждая прямая на плоскости Oxy определяется линейным уравнением первой степени с двумя неизвестными вида $Ax + By + C = 0$, $\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ и каждое линейное уравнение определяет некоторую прямую.

Данные, определяющие прямую	Уравнение прямой	
Две точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	(2.2)
Точка $M_1(x_1;y_1)$ и угловой коэффициент k	$y - y_1 = k(x - x_1)$	(2.3)
Точка $M_1(0;b)$ и k	$y = kx + b$	(2.4)
Отрезки a и b, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	(2.5)

Рассмотрим прямые (1) и (2), которые заданы уравнениями:

(1) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$; (2) $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$;

$y = k_1x + b_1$ $\qquad$ $y = k_2x + b_2$

3.2.

Расположение	Условия
Прямые совпадают	$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 = b_2, \end{cases}$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (2.6)
Прямые параллельны (не совпадают)	$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2, \end{cases}$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (2.7)
Пересечение в точке $M_0(x_0;y_0)$ под углом $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0, \end{cases}$ (2.8) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \left\lvert \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right\rvert$
Перпендикулярны	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ или $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ (2.9)
Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$	$d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (2.10)

2.2.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Построить прямые: а) $3x-4y+12=0$; б) $3x+5=0$.

Решение.

а) Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее точек. Удобно брать точки пересечения прямой с осями координат. Пусть A – точка пересечения прямой $3x-4y+12=0$ с осью Ox, а B – с осью Oy, тогда $y_A=0$, $x_B=0$. Координаты точек A и B удовлетворяют уравнению прямой $3x-4y+12=0$. Поэтому при $y_A=0$ получаем $3x_A+12=0$, $x_A=-4$, т. е. $A(-4;0)$, при $x_B=0$, $-4y_B+12=0$, $y_B=3$, т. е. $B(0;3)$. Отмечаем точки A и B и проводим через них прямую (рис. 13).

б) Преобразуем уравнение $3x+5=0$ к виду $x=-\frac{5}{3}$. Это уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $N\left(-\frac{5}{3};0\right)$ (рис. 14).

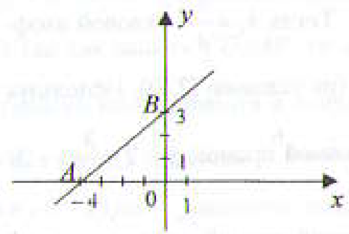


Рис. 13

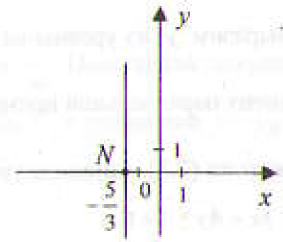


Рис. 14

Пример 2А. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;-2)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = 60^\circ$.

Решение. Найдем угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}$. Подставляя координаты данной точки M_0 и значение углового коэффициента в уравнение (2.3), получим искомое уравнение прямой: $y+2=\sqrt{3}(x-1)$ или $y-\sqrt{3}x+2+\sqrt{3}=0$ – общее уравнение прямой.

Пример 3А. Найти острый угол между прямыми, определяемыми уравнениями $9x-3y+7=0$ и $6x+3y-4=0$. Найти точку пересечения этих прямых.

Решение. Найдем угловые коэффициенты данных прямых: $9x-3y+7=0$, $y=3x+\frac{7}{3}$, $k_1=3$; $6x+3y-4=0$, $y=-2x+\frac{4}{3}$, $k_2=-2$. Подставляя значения k_1 и k_2 в формулу (2.8), получим $\operatorname{tg}\varphi = \left\lvert \frac{-2-3}{1-2\cdot 3} \right\rvert = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Для того чтобы найти точку пересечения, составим систему уравнений:

$\begin{cases} 9x-3y+7=0, \\ 6x+3y-4=0, \end{cases}$ прибавим к первому уравнению второе

$\begin{cases} 15x+3=0, \\ 6x+3y-4=0, \end{cases}$ тогда $x=-\frac{1}{5}$, $y=\frac{26}{15}$.

Пример 4А. Дана прямая $3x-4y=7$. Через точку $M_0(3;2)$ проведена прямая: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой. Составить ее уравнение.

Решение.

а) Выразим y из уравнения $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$. Тогда $k_1=\frac{3}{4}$. Угловой коэффициент параллельной прямой равен $\frac{3}{4}$ (по условию (2.7)). Используя уравнение (2.3), запишем уравнение искомой прямой $y-2=\frac{3}{4}(x-3)$ или $3x-4y-1=0$.

б) Угловой коэффициент перпендикулярной прямой найдем, используя условие (2.9): $k=-\frac{1}{3/4}=-\frac{4}{3}$. Искомое уравнение $y-2=-\frac{4}{3}(x-3)$, или $4x+3y-18=0$.

Пример 5А. Даны вершины треугольника $A(2;-3)$, $B(4;5)$, $C(-3;4)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение медианы, проведенной из вершины C;

в) уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Решение.

а) Найдем уравнение AB, используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки (2.2): $\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}$. Подставляя координаты точек A и B, получим $\frac{y-(-3)}{5-(-3)}=\frac{x-2}{4-2}$. Преобразуем уравнение $\frac{y+3}{8}=\frac{x-2}{2}$ следующим образом: $y+3==4(x-2)$, $y-4x+11=0$ – это уравнение прямой AB.

б) Найдем координаты точки K – середины отрезка AB по формулам $x_K=\frac{x_A+x_B}{2}$, $y_K=\frac{y_A+y_B}{2}$. Получим $x_K=\frac{2+4}{2}=3$, $y_K=\frac{-3+5}{2}=1$, точка $K(3;1)$. Теперь можно найти уравнение медианы CK, используя уравнение (2.2) $\frac{y-y_C}{y_K-y_C}=\frac{x-x_C}{x_K-x_C}$. Подставляя координаты точек C и K, получим $\frac{y-4}{1-4}=\frac{x+3}{3+3}$, $\frac{y-4}{-3}=\frac{x+3}{6}$, $2(y-4)=-x-3$. Тогда

$2y+x-5=0$ – уравнение медианы CK.

в) Так как высота $CD\perp AB$, то $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{4}$. Подставляя значение углового коэффициента и координаты точки C в уравнение $y-y_0==k(x-x_0)$, получим $y-4=-\frac{1}{4}(x+3)$, $4y-16=-x-3$. Тогда $4y+x-13=0$ – уравнение высоты CD.

2.2.3. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;1)$, $M_2(4;5)$, и найти точки ее пересечения с осями координат.

2. При каком значении A прямая $Ax+4y-13=0$ образует с осью Ox угол $\alpha=45^\circ$?

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;3)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

4. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых: а) $2x-4y+5=0$ и $3x+y-1=0$; б) $3x+4y-6=0$ и $8x-6y+5=0$.

Б

5. Даны точки $A(-3;1)$ и $B(3;-7)$. На оси ординат найти точку M так, чтобы прямые AM и BM были взаимно перпендикулярны.

6. На прямой $x-3y+8=0$ найти координаты точки, равноудаленной от двух точек (5; 4) и (–3;–2).

7. По какой линии должна двигаться точка, начальное положение которой определено координатами (1;–3), чтобы кратчайшим путем дойти до прямой $2x-y+5=0$? В какой точке она достигнет этой прямой и как велик будет пройденный путь?

8. Написать уравнения сторон квадрата, диагонали которого служат осями координат. Длина стороны квадрата равна a.

2.2.4. Ответы

А

1. $2x-y-3=0$, (0;–3), (1,5;0). **2.** –4. **3.** $4x+3y-25=0$. **4.** а) пересекаются; б) перпендикулярны.

Б

5. $M_1(0;2)$, $M_2(0;-8)$. **6.** $(1;\ 3)$. **7.** $x+2y+5=0$, $(-3;-1)$, $2\sqrt{5}$.
8. $y=\pm x\pm {}^{a\sqrt{2}}\!/_{2}$.

3.9+

2.3. Кривые второго порядка

Линии на плоскости, определяемые уравнениями второго порядка относительно переменных x и y, т. е. уравнениями вида

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0,\ \ (A^2+B^2\neq 0), \qquad (2.11)$$

называются **линиями (кривыми) второго порядка.**

Линиями второго порядка являются окружность, эллипс, гипербола, парабола. В настоящем параграфе рассматриваются уравнения этих линий в наиболее простом (каноническом) виде, который достигается определенным выбором системы координат.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки $N\,(a;b)$ (центра) на одно и тоже расстояние R (радиус) (см. с. 41).

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Центр симметрии – точка $O(0;0)$, A, B, C, D – вершины эллипса (см. с. 41).

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых **фокусами,** есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами (см. с. 42).

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой **фокусом** F, и данной прямой, называемой **директрисой** l (см. с. 42).

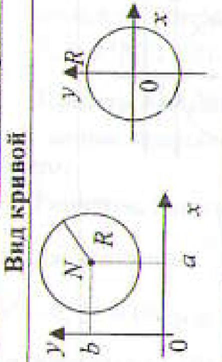
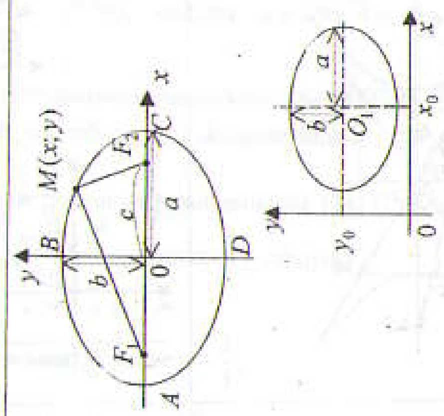
2.3.1. Примеры решения задач

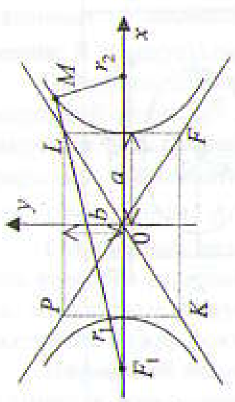
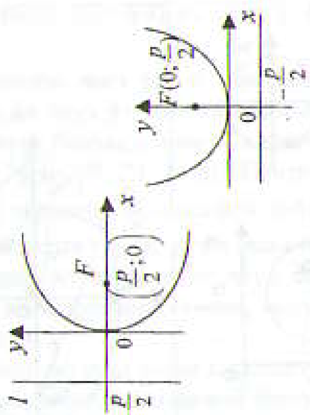
Пример 1А. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $N(2;-5)$ и радиус, равный 4.

Решение. Подставим значения координат центра и радиуса в уравнение (2.13), получим $(x-2)^2+(y+5)^2=16$.

3.9+

Кривые второго порядка

	Название	Вид кривой	Аналитическое представление
1.	Окружность		$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (2.12) $N\,(a;b)$ – центр, R – радиус $x^2+y^2=R^2$ $N\,(0;0)$ – центр, R – радиус
2.	Эллипс		Каноническое уравнение: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,$ (2.13) a – **большая полуось,** b – **малая полуось** эллипса. $c^2=a^2-b^2$. (2.14) $\varepsilon=\dfrac{c}{a}\ \ (\varepsilon<1)$ – **эксцентриситет** эллипса $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – уравнение эллипса с осями, параллельными координатным, и центром симметрии $O_1(x_0;y_0)$

3.	Гипербола		Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, (2.15) a – **действительная полуось**, b – **мнимая полуось** гиперболы. $c^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $(\varepsilon>1)$ (2.16) Уравнения гиперболы с осями, параллельными координатным осям: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
4.	Парабола		Каноническое уравнение: $y^2=2px$, (2.17) $p>0$ – **параметр** параболы. Вершина параболы – точка $O(0;0)$, ось Ox – ось симметрии. Уравнение директрисы l параболы: $x=-\frac{p}{2}$. Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Oy имеет уравнение $x^2=2py$

Пример 2А. Найти координаты центра и радиус окружности: $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

Решение. Приведем уравнение $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, выделяя полные квадраты в левой его части: $(x^2-2x+1)-1+(y^2+4y+4)-4-4=0$, или $(x-1)^2+(y+2)^2=9$. Значит, центр окружности – точка $N(1;-2)$, радиус $R=3$.

Пример 3А. Дано уравнение эллипса $4x^2+9y^2=36$. Найти:

а) длину его осей; б) координаты фокусов.

Решение. Приведем уравнение эллипса $4x^2+9y^2=36$ к каноническому виду, разделив обе части его на 36:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \text{ из которого следует:}$$

а) $a^2=9$, $b^2=4$, т. е. $a=3$, $b=2$, $2a=6$ – длина большой оси, $2b=4$ – длина малой оси;

б) используя равенство (2.14), найдем $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. Значит, $F_1(-\sqrt{5};0)$ и $F_2(\sqrt{5};0)$.

Пример 4А. Дано уравнение гиперболы $16x^2-9y^2=114$. Найти: а) длины полуосей гиперболы; б) эксцентриситет; в) уравнения асимптот.

Решение. Разделим обе части уравнения на 114. Получим каноническое уравнение $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, из которого следует:

а) $a^2=9$, $b^2=16$, т. е. $a=3$, $b=4$;

б) по формулам (2.16) эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$;

в) уравнения асимптот имеют вид $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Пример 5А. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(-1;0)$ вдвое меньше расстояния до прямой $x+4=0$.

Решение. Пусть точка $M(x;y)$ принадлежит искомой линии и точка $N(-4;y)$ – это точка, принадлежащая прямой $x+4=0$. Тогда

$|MN| = 2|MA|$ – по условию задачи. Выражая это свойство точек A, M и N, получим уравнение кривой:

$$|MN| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-y)^2}, \quad |MA| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2};$$

$$\sqrt{(x+4)^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$x^2 + 8x + 16 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2) \Rightarrow \quad 3x^2 + 4y^2 = 12 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $a = 2$ и $b = \sqrt{3}$.

2.3.2. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Найти центр и радиус окружности:

а) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; б) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$; в) $x^2 + y^2 + y = 0$.

2. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ с прямой $x - y - 4 = 0$.

3. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если:

а) полуоси его равны 4 и 2;

б) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

в) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8;

г) малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

д) малая полуось равна 3 и точка $M(4;1)$ лежит на эллипсе.

4. Найти координаты вершины параболы $y = x^2 + 4x - 1$. Постройте кривую.

5. Какие линии определяются следующими уравнениями: а) $y = 1 - 4\sqrt{1 - x^2}$; б) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$.

6. Составьте уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(-1;0)$ вдвое больше расстояния до прямой $x + 4 = 0$.

2.3.3. Ответы

А

1. а) $C(2;0)$, $R = 2$; б) $C\left(0;-\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{1}{2}$; в) $C\left(\frac{2}{3};1\right)$, $R = \frac{\sqrt{58}}{3}$; **2.** $(3;-1)$ и $(2;\ -2)$. **3.** а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, в) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; г) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; д) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$. **4.** $B(-2;-5)$, точки пересечения с осью Ox – $(-2+\sqrt{5};0)$, $(-2-\sqrt{5};0)$. **5.** а) половина эллипса $x^2 + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$, расположенная ниже прямой $y - 1 = 0$; б) половина эллипса $\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$, расположенная вправо от прямой $x + 5 = 0$. **6.** $\frac{(x+5)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

Глава 3. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Плоскость в пространстве

3.3

3.1.1. Основные понятия

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, $\left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$ называется **общим уравнением плоскости.** Вектор $\overrightarrow{N} = (A;B;C)$, перпендикулярный данной плоскости, называется нормальным вектором плоскости.

Данные, определяющие плоскость	Уравнение плоскости	
Три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$	(3.1)
Точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и вектор $\overrightarrow{N} = (A;B;C)$	$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$	(3.2)
Отрезки a, b, c, отсекаемые на осях Ox, Oy и Oz	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	(3.3)

3.4

Взаимное расположение плоскостей

Рассмотрим плоскости (1) и (2), которые заданы уравнениями:

(1) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\overrightarrow{N}_1 = (A_1;B_1;C_1)$ (2) $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\overrightarrow{N}_2 = (A_2;B_2;C_2)$

Расположение	Условия	
Плоскости совпадают	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$	(3.4)
Плоскости параллельны (не совпадают)	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$	(3.5)
Пересечение по прямой под углом φ	$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N}_1\cdot\overrightarrow{N}_2}{\lvert\overrightarrow{N}_1\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{N}_2\rvert}$	(3.6.)
Перпендикулярны	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$	(3.7)

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$	$d = \frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	(3.8)

3.1.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Построить плоскости, заданные уравнениями: а) $2y-5=0$; б) $3x+4y+6z-12=0$.

Решение.

а) Плоскость $2y-5=0$ $\left(y=\frac{5}{2}\right)$ параллельна плоскости Oxz, $\overrightarrow{N}=(0;2;0)$ и отсекает на оси Oy отрезок, равный $\frac{5}{2}$ (рис 15).

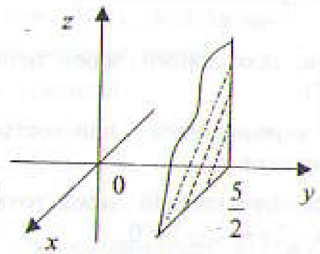


Рис. 15

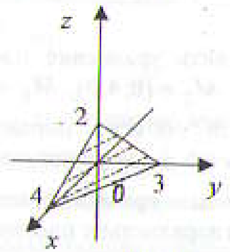


Рис. 16

б) Плоскость $3x+4y+6z-12=0$ $(3x+4y+6z=12)$ или в отрезках $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$. Следовательно, плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки длиной 4, 3, 2 (рис 16).

Пример 2А. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M=(-2;3;1)$ параллельно плоскости Oxy.

Решение. Для того чтобы записать уравнение плоскости, нужно найти координаты вектора $\overrightarrow{N}$, т. е. любого вектора, перпендикулярного плоскости. Так как плоскость параллельна плоскости Oxy, то в качестве $\overrightarrow{N}$ можно взять вектор $\overrightarrow{k}=(0;0;1)$. Тогда, согласно (3.2), уравнение плоскости имеет вид $0\cdot(x+2)+0\cdot(y-3)+1\cdot(z-1)=0$ или $z-1=0$.

Пример 3А. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1=(1;0;-1)$, $M_2=(2;2;3)$, $M_3=(0;-3;1)$.

Решение. Используя формулу (3.1), получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 2-1 & 2-0 & 3+1 \\ 0-1 & -3-0 & 1+1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрываем определитель по элементам первой строки:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=0,\quad 16(x-1)-6y-(z+1)=0,$$

$16x-6y-z=17$.

3.1.3. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1=(-2;0;0)$, $M_2=(0;4;0)$, $M_3=(0;0;5)$.

2. Найти объем пирамиды, ограниченной плоскостью $x+3y-5z-15=0$ и координатными плоскостями.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M=(1;-3;-2)$ параллельно плоскости $3x-2y+4z-3=0$.

Б

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M=(1;-1;0)$ параллельно векторам $\vec{a}=(0;2;3)$ и $\vec{b}=(-1;4;2)$.

5. Дана пирамида с вершинами $A(2;2;-3)$, $B(3;1;1)$, $C(-1;0;-5)$, $D(4;-2;-3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC (Указание: использовать формулу (3.8)).

3.1.4. Ответы

А

1. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$. **2.** $V=37{,}5$. **3.** $3x-2y+4z-1=0$.

Б

4. $8x+3y-2z-\ -5=0$. **5.** $h=4$.

3.5
3.2. Прямая в пространстве

3.2.1. Различные виды уравнений прямой

Данные, определяющие прямую	Уравнения прямой	
Две пересекающиеся плоскости	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ — общие уравнения прямой	(3.9)
Точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и вектор $\vec{s}=(m;n;p)$ – направляющий вектор прямой	$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ – канонические уравнения прямой	(3.10)
Две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	(3.11)
Точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и направляющий вектор $\vec{s}=(m;n;p)$	$\begin{cases} x=x_1+mt, \\ y=y_1+nt, \\ z=z_1+pt \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой, $t\in R$	(3.12)

3.6
Взаимное расположение двух прямых

Рассмотрим прямые (1) и (2), которые заданы уравнениями:

$$(1)\quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\qquad (2)\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

$$\vec{s}_1=(m_1;n_1;p_1)\qquad\qquad \vec{s}_2=(m_2;n_2;p_2)$$

Расположение	Условия	
Прямые параллельны (или совпадают)	$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$, $(\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2)$	(3.13)
Прямые перпендикулярны	$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$, $(\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2)$	(3.14)
Расположены под углом φ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos\varphi=\frac{\lvert\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2\rvert}{\lvert\vec{s}_1\rvert\cdot\lvert\vec{s}_2\rvert}$	(3.15)

3.2.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Найти уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;2;2)$ и $M_2(6;2;1)$.

Решение. Воспользуемся уравнениями (3.11):

$$\frac{x-2}{6-2}=\frac{y-2}{2-2}=\frac{z-2}{1-2} \text{ или } \frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-2}{-1}.$$

Запись уравнений прямой в канонической форме сохраняется и в случае обращения отдельных координат вектора s в нуль. Если нуль стоит в знаменателе, нулю нужно приравнять и числитель, т. е. уравнения можно записать в виде $\begin{cases} y-2=0, \\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{z-2}{-1} \end{cases}$ или $\begin{cases} y=2, \\ x+4z=10. \end{cases}$

Пример 2А. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2;2;2)$ параллельно прямой.

Решение. Воспользуемся уравнениями (3.10) и условиями (3.13):

$$\left(\frac{m}{3}=\frac{n}{4}=\frac{p}{5}\right)\ \frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-2}{5}.$$

3.2.3. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Проверить, лежит ли точка $M(1;-3;2)$ на прямой $\begin{cases} 3x-2y+z-11=0, \\ 2x+5y+6z+1=0. \end{cases}$

2. Даны вершины треугольника $A(-3;2;8)$, $B(-7;0;3)$, $C(3;4;5)$. Составить канонические уравнения медианы, проведенной из вершины A.

3. Найти точки пересечения прямой $\begin{cases} x-y+2z+1=0, \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$ с координатными плоскостями. Привести уравнения к каноническому виду.

4. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-1;3)$ перпендикулярно плоскости $3x-y+2z-4=0$.

5. Найти координаты точки пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x-y+2z+5=0$.

3.2.4. Ответы

А

1. Лежит. **2.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-8}{-4}$. **3.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$; точки пересечения: с плоскостью Oxz $(y=0)$ – $\left(\dfrac{1}{3};0;-\dfrac{2}{3}\right)$; с плоскостью Oyz $(x=0)$ – $(0;1;0)$; с плоскостью Oxy $(z=0)$ – $(0;1;0)$. **4.** $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. **5.** $(-3;-4;0)$.

Глава 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

4.1. Предел функции

4.1

4.1.1. Основные теоретические сведения

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = c$, за исключением, быть может, точки c.

Если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - c| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то число A называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to c$. Записывают $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to c$.

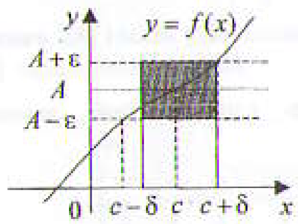


Рис. 18

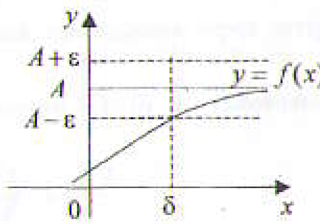


Рис. 19

Геометрически предел A функции $f(x)$ при $x \to c$ означает, что какую бы горизонтальную полосу вдоль прямой $y = A$ ни взять, всегда найдется вертикальная δ-полоса с осью симметрии $x = c$ такая, что все точки графика функции $f(x)$, расположенные в вертикальной полосе, кроме, быть может, точки, находящейся на прямой $x = c$, обязательно попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 18).

Графическая иллюстрация $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ приведена на рис. 19.

4.5 Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to c$, если $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$.

Если функция имеет предел, то ее можно представить как сумму постоянной, равной ее пределу, и бесконечно малой величины, т. е. $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Пусть функции $y = \alpha(x)$ и $y = \beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to c$.

1) Если $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** при $x \to c$. Обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to c$;

При $x \to 0$ $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$.

2) Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to c$, то

$$\lim_{x \to c} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \qquad (4.1)$$

4.5 Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to c$, если для любого $M > 0$ найдется $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - c| < \delta$, выполняется условие $|f(x)| > M$. Обозначают $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$.

При вычислении пределов функций удобно использовать таблицу 1, в которой приведены соотношения пределов суммы, произведения, частного двух функций $f(x)$ и $g(x)$, свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

4.6

Замечательные пределы

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;	2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;	3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$;
4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$;	5) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$, где $e \approx 2{,}71828$.	

Для элементарных функций во всех точках их области определения $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Можно использовать равенства:

1) $\lim\limits_{x \to c} \ln(f(x)) = \ln \lim\limits_{x \to c} (f(x))$; 2) $\lim\limits_{x \to c} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$.

4.6

Односторонние пределы

Если $x > c$ и $x \to c$, то это записывается $x \to c + 0$, если $x < c$ и

$x \to c$, то записывается это $x \to c-0$.

Таблица 1

$\lim\limits_{x\to c} f(x)$	$\lim\limits_{x\to c} g(x)$	$\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x))$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)$	$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$
a	b	$a+b$	ab	$\frac{a}{b}$, $a \neq 0,\ b \neq 0$
a	∞	∞	$\infty\ (a \neq 0)$	$\left[a/\infty\right]=0$
∞	b	∞	$\infty\ (b \neq 0)$	$\left[\infty/b\right]=\infty$
0	0	0	0	Неопределенность $\left[0/0\right]$
a	0	a	0	$\left[a/0\right]=\infty$ $(a \neq 0)$
0	∞	∞	Неопределенность $[0\cdot\infty]$	$\left[0/\infty\right]=0$
∞	0	∞	Неопределенность $[\infty\cdot 0]$	$\left[\infty/0\right]=\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Неопределенность $\infty-\infty$	$-\infty$	Неопределенность $\left[\infty/\infty\right]$
$-\infty$	$+\infty$	Неопределенность $\infty-\infty$	$-\infty$	Неопределенность $\left[\infty/\infty\right]$

Числа $f(c+0)=\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$ и $f(c-0)=\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$ называют соответственно пределом справа функции $f(x)$ в точке c и пределом слева функции $f(x)$.

Предел функции $y=f(x)$ при $x \to c$ существует тогда и только

тогда, когда $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$.

4.10

4.1.2. Примеры решения задач. Раскрытие неопределенностей

1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

1) При нахождении $\lim\limits_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, если $P(c)=Q(c)=0$, то следует числитель и знаменатель дроби разделить на разность $(x-c)$ один или несколько раз.

Пример 1А. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$.

Решение. При $x \to 1$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Используем формулу

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),} \qquad (4.2)$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, которые находятся по следующим формулам:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ D=b^2-4ac.} \qquad (4.3)$$

По формуле (4.2) разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$3x^2-x-2=0$,
$D=1+24=25$,
$x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{6}$,
$x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=1$,

$4x^2-5x+1=0$,
$D=25-16=9$,
$x_{1,2}=\frac{5\pm 3}{8}$,
$x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=1$,

$$3x^2-x-2=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)=(3x+2)(x-1),$$

$$4x^2-5x+1=4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)=(4x-1)(x-1),$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+2)(x-1)}{(4x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{4x-1}=\frac{5}{3}.$$

2) При вычислении предела дроби, содержащей иррациональ-

ные выражения, в случае когда предел и числителя, и знаменателя равен нулю, нужно перенести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель (умножением на сопряженное) и после этого сделать необходимые упрощения (приведение подобных членов, сокращение) с целью выделения разности $(x-c)$ и сокращения на нее.

Пример 2А. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$.

Решение. При $x\to 3$ числитель знаменатель дроби имеют предел, равный нулю. Домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю ($\sqrt{2x+3}+3$), получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(2x+3-9)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x-6)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}.$$

В преобразованиях использовали формулу

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b. \qquad (4.4)$$

3) При вычислении предела дроби, содержащей тригонометрические функции, в случае, когда предел и числителя, и знаменателя равен нулю, можно использовать первый замечательный предел или эквивалентные бесконечно малые.

Пример 3А. Найти пределы функций: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\text{tg}3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}$.

Решение.

а) 1-й способ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{\dfrac{\sin 7x}{7x}}}^{1}\cdot 7x}{\underbrace{\boxed{\dfrac{\sin 5x}{5x}}}_{1}\cdot 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{5x}=\frac{7}{5}.$$

При решении разделили каждый синус на аргумент и домножили на него и использовали первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$.

2-й способ.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{5x}=\dfrac{7}{5}$, так как при $x\to 0$ $\sin 7x\sim 7x$, $\sin 5x\sim 5x$;

б) при $x\to 0$ $\arcsin 7x\sim 7x$, $\text{tg}3x\sim 3x$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\text{tg}3x}==\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{3x}=\dfrac{7}{3}$;

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{\sin^2 8x}==\lim_{x\to 0}\frac{2\overbrace{\boxed{\dfrac{\sin^2 3x}{(3x)^2}}}^{1}(9x)^2}{\underbrace{\boxed{\dfrac{\sin^2 8x}{(8x)^2}}}_{1}\cdot(8x)^2}=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 9x^2}{64x^2}=\dfrac{9}{32}$. При вычислении предела использовали формулу $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Учитывая, что при $x\to 0$ $1-\cos 6x\sim\dfrac{1}{2}(6x)^2$, $\sin 8x\sim 8x$, получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(6x)^2}{(8x)^2}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 36}{64}=\dfrac{9}{32}$.

2. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

При нахождении предела отношения двух многочленов при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби целесообразно разделить на x^n, где – n высшая степень этих многочленов.

Пример 4А. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+3x^2-5}{2x+7x^3+3x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x^2-1}{x^5+2x+3}$.

Решение.

а) разделим числитель и знаменатель дроби на x^4, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+3x^2-5}{2x+7x^3+3x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^4}}{\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x}+3}=\frac{4+0+0}{0+0+3}=\frac{4}{3};$$

б) разделим числитель и знаменатель дроби на x^5, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{x^5+2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^5}}{1+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}=\frac{0+0+0}{1+0+0}=\frac{0}{1}=0.$$

3. Неопределенность вида 1^∞.

Для раскрытия неопределенности $\left(1^\infty\right)$ используется второй замечательный предел и следствия из него:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn},\ \lim_{x\to0}(1+kx)^{n/x}=e^{kn}.$$

Пример 5А. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+3)-\ln x)$.

Решение.

а) так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, имеем неопределенность 1^∞. Для раскрытия используем 2-й замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{3x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x}}}=e^3;$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{2+\frac{3}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)=\infty$, имеем неопределенность 1^∞. Для раскрытия используем 2-й замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5}{2x+3}-1\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5-2x-3}{2x+3}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{2}}\right)^{\frac{2(x+2)}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+4}{2x+3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}}}=e;$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(x+3)-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^x=$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\ln e^3=3.$$

Использовали свойства логарифмов и второй замечательный предел.

4.1.3. Задачи для самостоятельного решения

А

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to3}\left(3x^2-2x+1\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)^3(x+2)$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-3x-x^2}{3x^2+x-3}$.
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{x^2+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x+3\cdot7^x\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x+1\right)$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x+5}$.
10. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2}{x-3}$.
11. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{4-x^2}$.
12. $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-27}{x^4-81}$.
13. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$.
14. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{\sqrt{x}-2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 5x\cdot\cos 2x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}7x}{2x}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x}{2x^5+x^2+1}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x}{x^4-3x^2+4}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2+x^3}{2x+1}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2-x+1}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{2x}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+5}\right)^{x+2}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{3/x}$.

Б

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x+3}{x^3-3x+2}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27n^3-2}}{5n+3}$.

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+4}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+4}-2}$.

33. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{6x-3}\right)^{x}$.

34. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

35. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{5x}$.

4.1.4. Ответы

А

1. 22. **2.** 0. **3.** $-\frac{2}{3}$. **4.** 0. **5.** 3. **6.** $\pm\infty$. **7.** $+\infty$. **8.** $+\infty$. **9.** 0. **10.** $\pm\infty$. **11.** -3.

12. $\frac{1}{6}$. **13.** $\frac{2}{5}$. **14.** -4. **15.** $\frac{1}{6}$. **16.** $\frac{3}{2}$. **17.** $\frac{2}{5}$. **18.** $\frac{1}{2}$. **19.** $\frac{9}{25}$. **20.** $\frac{7}{2}$. **21.** $\frac{1}{2}$.

22. 0. **23.** $+\infty$. **24.** 3. **25.** e^2. **26.** e^{-11}. **27.** e^{-2}. **28.** e^{-21}.

Б

29. 2. **30.** $\frac{3}{5}$. **31.** $\frac{1}{2}$. **32.** 12. **33.** 0. **34.** $\frac{3}{2}$. **35.** $\frac{1}{4}$. **36.** $-\frac{2}{5}$.

4.2. Непрерывность функций

4.13

4.2.1. Основные теоретические сведения

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x=c$, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(c+\Delta x)-f(c)\right)=0.$$

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в точке** c, если

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c). \qquad (4.5)$$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ существует тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=\lim\limits_{x\to c+0}f(x)$, получаем из (4.5) **условия непрерывности функции в точке** c:

$$\lim_{x\to c-0}f(x)=\lim_{x\to c+0}f(x)=f(c).$$

Функция называется **непрерывной на отрезке** $[a,b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого отрезка и $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$.

4.13

Свойства непрерывных функций.

1. Сумма нескольких непрерывных функций есть функция непрерывная.
2. Произведение нескольких непрерывных функций есть функция непрерывная.
3. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, в которых делитель отличен от нуля.
4. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ – непрерывные функции своих аргументов, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ также непрерывна.

4.14 Элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения.

Точка c, в которой функция не является непрерывной, называется **точкой разрыва** функции.

Если односторонние пределы функции $y=f(x)$ при $x\to c$ конечны, но не равны между собой $\left(\lim\limits_{x\to c-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to c+0} f(x)\right)$, то c – **точка разрыва первого рода** (рис. 20).

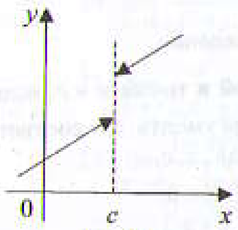


Рис. 20

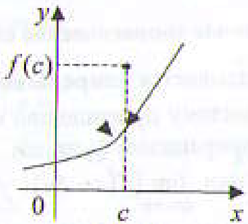


Рис. 21

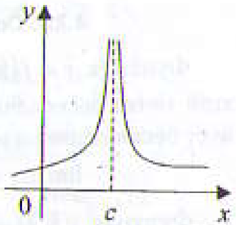


Рис. 22

Если конечные односторонние пределы равны между собой $(f(c-0)=f(c+0))$, но не равны значению функции в точке c, то c – **точка устранимого разрыва** (рис. 21).

Если хотя бы один из односторонних пределов $f(c-0)$, $f(c+0)$ не является конечным, то c – **точка разрыва второго рода** (рис. 22).

4.2.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби являются непрерывными функциями (как элементарные функции), дробь непрерывна во всех точках, кроме точки $x=2$, в которой знаменатель обращается в нуль. Найдем односторонние пределы при $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x+1}{x-2}=\left[\frac{3}{-0}\right]=-\infty,\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x+1}{x-2}=\left[\frac{3}{+0}\right]=+\infty.$$

Поскольку односторонние пределы не являются конечными, то точка $x=2$ есть точка разрыва второго рода.

Пример 2А. Дана функция $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{при } x<0,\\ x^2, & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 2-x, & \text{при } x>1.\end{cases}$

Найти точки разрыва, если они существуют. Сделать чертеж.

Решение. Функции $y=x+2$, $y=x^2$, $y=2-x$ непрерывны (они являются элементарными). Поэтому точками разрыва могут быть точки $x=0$ и $x=1$, в которых изменяется аналитическое задание функции. При $x=0$ $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}(x+2)=2$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0} x^2=0$ – односторонние пределы не равны между собой, а тогда точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода.

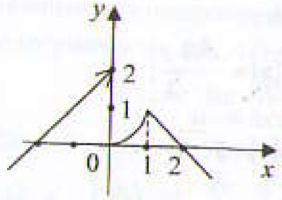


Рис. 23

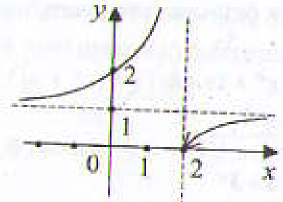


Рис. 24

При $x=1$ $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(2-x)=1$, $f(1)=1$.

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$, то в точке $x=1$ функция непрерывна (рис. 23).

Пример 3А. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=4^{\frac{1}{2-x}}$ в точках $x_1=0$, $x_2=2$.

Решение. Данная функция определена во всех точках, кроме точки $x=2$, значит, она непрерывна в каждой точки области определения как элементарная, отсюда следует, что в точке $x_1=0$ функция непрерывна.

Исследуем точку $x_2=2$. Найдем односторонние пределы в точке $x_2=2$: $\lim\limits_{x\to 2-0} =4^{\frac{1}{2-x}}=4^{\frac{1}{2-2+0}}=4^{+\infty}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} =4^{\frac{1}{2-x}}=4^{\frac{1}{2-2-0}}=$ $=4^{-\infty}=\dfrac{1}{4^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$. Один из односторонних пределов не является конечным, поэтому $x_2=2$ – точка разрыва 2-го рода.

Построим эскиз графика функции, учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty} = 4^{\frac{1}{2-x}} = 4^{\frac{1}{\infty}} = 4^0 = 1$ (рис. 24).

4.2.3. Задачи для самостоятельного решения

А

1. Исследовать функцию на непрерывность. В случае существования точек разрыва установить их тип, если:

1) $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+3x+4}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-3}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{3+3^{\frac{1}{x}}}$; 4) $f(x)=7^{\frac{1}{3-x}}$;

5) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{при } x<0,\\ x+4, & \text{при } 0\le x<2,\\ 6, & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{при } x\le 0,\\ x^2, & \text{при } 1<x\le 2,\\ x+1, & \text{при } x>2.\end{cases}$

2. Каким должно быть $f(0)$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на множестве R, если $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$?

3. $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & \text{при } x\le 1,\\ 2x, & \text{при } x>1.\end{cases}$ При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывна на R?

4.2.4. Ответы

А

1. 1) непрерывна на R; 2) $x=3$ – точка разрыва второго рода; 3) $x=0$ – точка разрыва первого рода; 4) $x=3$ – точка разрыва второго рода; 5) $x=0$ – точка разрыва первого рода; 6) $x=2$ – точка разрыва первого рода. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** 1.

Глава 5. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

5.1. Производная функции

5.1

5.1.1. Определение производной и ее нахождение

Производной $f'(x)$ функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$, если этот предел существует:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Для обозначения производной функции $y=f(x)$ используют символы: y', $f'(x)$, y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

5.2

Схема нахождения производной функции по определению

Этапы	Пример для функции $f(x)=x^2+x$
1. Придать фиксированному значению $x\in D(f)$ приращение Δx и вычислить значение функции $f(x+\Delta x)$	$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+x+\Delta x=x^2+(2x+1)\Delta x+(\Delta x)^2+x$
2. Найти приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$	$\Delta y=x^2+(2x+1)\Delta x+(\Delta x)^2+x-(x^2+x)=(2x+1)\Delta x+(\Delta x)^2=(2x+1+\Delta x)\Delta x$
3. Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(2x+1+\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=2x+1+\Delta x$
4. Найти $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+1+\Delta x)=2x+1$

5.1

Геометрический смысл производной

Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$, т.е. $f'(x_0)=k=\operatorname{tg}\alpha$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

5.1

Физический смысл производной

Производная определяет мгновенную скорость изменения любого физического параметра, описываемого функцией $y = f(x)$, в точке x.

Функция, имеющая конечную производную, называется **дифференцируемой**, а операция нахождения производной называется **дифференцированием.**

Дифференциалом $y = f(x)$ в точке x называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке. Дифференциал обозначается dx, $df(x)$ и вычисляется по формуле $dy = f'(x)dx$.

5.5

Таблица производных

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}$, $\alpha = const$.

2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$.	3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}u'$.
4. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a\, u'$.	5. $\left(e^u\right)' = e^u u'$.
6. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a}u'$.	7. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'$.
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.	9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.	11. $(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.
12. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$.	13. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$.
14. $(\mathrm{ctg}\, u)' = \dfrac{-1}{\sin^2 u}u'$.	15. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = \dfrac{-1}{1+u^2}u'$.

3.3

Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемые функции независимой переменной x, $c = const$, тогда

1. $(c)' = 0$, $(x)' = 1$;	5. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$,
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;	если $y = y(u)$, $u = u(x)$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$, $(cu)' = cu'$;	6. $(y)'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;	$x = \varphi(y)$.

5.6

Производные высших порядков

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$ (обозначается $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$): $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n-1)$-го порядка: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Схема нахождения производной y'_x неявной функции $F(x;y) = 0$

Этапы	Пример для функции $3x^2 + 2xy + y^2 - 5 = 0$
1. Продифференцировать обе части равенства $F(x;y) = 0$ по переменной x, считая, что $y = y(x)$	$6x + 2(y + xy'_x) + 2y \cdot y'_x = 0$
2. Из получившегося в результате дифференцирования равенства найти y'_x	$6x + 2y + 2xy'_x + 2y \cdot y'_x = 0$, $2xy'_x + 2yy'_x = -6x - 2y$, $2y'_x(x+y) = -2(3x+y)$, $y'_x = \dfrac{-(3x+y)}{x+y}$.

Если функция задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то производные

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ вычисляются по формулам: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}$.

5.1.2. Примеры решения задач

Пример 1А. Найти производные первого порядка функций:

1) $y = 2x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 5\operatorname{ctg}x + 4$;

2) $y = \frac{e^x + 3}{\sin x}$; 3) $y = 2^x \cdot \cos x$;

4) $y = \left(7x^4 - 5x + 3\right)^3$; 5) $y = \ln(\arcsin 5x)$;

6) $y = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{4x - x^2}$; 7) $y = (\operatorname{tg}x)^{x^2}$.

Решение.

1) $y' = 2\left(x^3\right)' + 3\left(\sqrt{x}\right)' - \frac{1}{2}\left(x^{-2}\right)' + 4\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' - 5(\operatorname{ctg}x)' + (4)' =$

$= 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-3} - 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 5 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + 0 =$

$= 6x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sin^2 x}$.

При решении использовались правила дифференцирования 1, 2, 4 и табличные производные 1, 2, 14.

2) $y' = \left(\frac{e^x + 3}{\sin x}\right)' = \frac{\left(e^x + 3\right)' \cdot \sin x - (\sin x)'\left(e^x + 3\right)}{\sin^2 x} =$

$= \frac{e^x \cdot \sin x - \cos x\left(e^x + 3\right)}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\sin x - \cos x) - 3\cos x}{\sin^2 x}$.

Использовались правила 1, 2, 4 и табличные производные 5, 8.

3) $y' = \left(2^x \cos x\right)' = \left(2^x\right)' \cos x + 2^x (\cos x)' = 2^x \ln 2 \cos x +$
$+ 2^x(-\sin x) = 2^x(\ln 2 \cos x - \sin x)$.

Были использованы правило 3 и табличные производные 4, 10.

4) $y' = \left(\left(7x^4 - 5x + 3\right)^3\right)' = 3\left(7x^4 - 5x + 3\right)^2 \cdot \left(7x^4 - 5x + 3\right)' =$

$= 3\left(7x^4 - 5x + 3\right)^2\left(28x^3 - 5\right)$.

Применили табличную производную 1 и правила 1, 2, 3, 5.

5) $y' = (\ln(\arcsin 5x))' = \frac{1}{\arcsin 5x} \cdot (\arcsin 5x)' =$

$= \frac{1}{\arcsin 5x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (5x)^2}} \cdot (5x)' = \frac{5}{\arcsin 5x\sqrt{1 - 25x^2}}$.

Использовали табличные производные 1, 7, 9.

6) $y' = \left(\operatorname{arctg}^2 \sqrt{4x - x^2}\right)' = 2\operatorname{arctg}\sqrt{4x - x^2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{4x - x^2}\right)' =$

$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{4x - x^2} \frac{1}{1 + \left(\sqrt{4x - x^2}\right)^2}\left(\sqrt{4x - x^2}\right)' =$

$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{4x - x^2} \frac{1}{1 + 4x - x^2} \frac{1}{2\sqrt{4x - x^2}}\left(4x - x^2\right)' =$

$= \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{4x - x^2}\left(2x - x^2\right)}{\left(1 + 4x - x^2\right)\sqrt{4x - x^2}}$.

Были использованы табличные производные 1, 13, 2.

7) $y' = \left((\operatorname{tg}x)^{x^2}\right)' = \left(e^{\ln(\operatorname{tg}x)^{x^2}}\right)' = \left(e^{x^2 \cdot \ln(\operatorname{tg}x)}\right)' =$

$= e^{x^2 \cdot \ln(\operatorname{tg}x)}\left(x^2 \cdot \ln(\operatorname{tg}x)\right)' = e^{x^2 \ln(\operatorname{tg}x)}\left(2x\ln(\operatorname{tg}x) + x^2 \frac{1}{\operatorname{tg}x} \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$

$= e^{x^2 \ln(\operatorname{tg}x)}\left(2x\ln(\operatorname{tg}x) + \frac{x^2}{\sin x \cos x}\right)$.

Использовали основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, табличные производные 1, 5, 7, 12.

Пример 2А. Найти производные $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

Решение. Используем формулы $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_x}{x'_t}$.

Найдем $x'_t = \left(\ln(1+t^2)\right)' = \frac{1}{1+t^2}\left(1+t^2\right)' = \frac{2t}{1+t^2}$,

$$y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}. \text{ Тогда } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t = \left(\frac{t}{2}\right)' = \frac{1}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

5.1.3. Задачи для самостоятельного решения

А

Найдите производную функции:

1. $y = \frac{1}{6}x^6 - 4x^3 + 3x - 4$.
2. $y = \sqrt{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$.
3. $y = \ln x - 7^x + \sqrt{\pi}$.
4. $y = e^x \cos x$.
5. $y = \frac{5+3x}{2-x^2}$.
6. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{3(1+x^2)}$.
7. $S = \left(2 - 3t - 8t^5\right)^4$.
8. $\rho = 5\cos^3(1-2\varphi)$.
9. $y = \ln\left(x + \sqrt{3+x^2}\right)$.
10. $y = \operatorname{arctg}^2 5x$.
11. $y = \log_2 \arccos\sqrt{x}$.
12. $S = 2\sin^3 v^2$.
13. $y = \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\cos 2x)}$.
14. $y = \log_5\left(t^3 - 3\cos\frac{t}{3}\right)$.
15. $r = \ln \operatorname{arctg} 5^{\varphi}$.
16. $u = v^3 \cdot \arccos \ln^2 v$.
17. $y = \sin\left(5^{x\operatorname{ctg}x}\right)$.
18. $r = \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi^2$.

19. $y = (\operatorname{tg}x)^{4-x^2}$.
20. $y = (\cos x)^{5/x}$.
21. $y = x^{\frac{1}{2x}}$.
22. $y = (\operatorname{arctg}x)^{1+x^2}$.

Найдите производные указанного порядка:

23. $y = \frac{2}{x^5}$; $y''' = ?$
24. $r = 5\cos 2\varphi$; $\frac{d^4r}{d\varphi^4} = ?$
25. $f(x) = x^5 - 4x^4 - 3$; $f^{(4)}(1) = ?$
26. $f(x) = e^{3x+1}$; $f'''(0) = ?$

Найдите дифференциал функции:

27. $y = 2 + 3x - x^2$.
28. $y = x^3 - 5x + 7$.
23. $y = e^{\cos 5x}$.
30. $y = x^2 \arccos \ln x$.

Найдите уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой x_0:

31. $y = x^4 - 3x, x_0 = 2$.
32. $y = \sin^2 x, x_0 = \frac{\pi}{4}$.
33. $y = (2x+1)^3, x_0 = -1$.
34. $y = \sqrt{x} + 1, x_0 = 4$.

Б

Найдите $\frac{dy}{dx}$ для функции:

35. $2x^2 + y^2 + 5xy - 4 = 0$.
36. $xy^3 + \cos(y+x) = \pi$.
37. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$.
38. $y^2e^{2y} = 2e^{3x-1}$.
39. $3x^4 - xy + 5y^2 = 2$.
40. $2y - 3x^2 = \ln y$.

Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции:

41. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 2t^3. \end{cases}$
42. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$
43. $\begin{cases} x = e^{-at}, \\ y = e^{at}. \end{cases}$
44. $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

45. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ 46. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$

5.1.4. Ответы

1. $x^5 - 12x^2 + 3$. **2.** $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$. **3.** $\frac{1}{x} - 7^x \ln 7$. **4.** $e^x(\cos x - \sin x)$.

5. $\frac{3x^2+10x+6}{(2-x^2)^2}$. **6.** $\frac{1-2x\operatorname{arctg}x}{3(1+x^2)^2}$. **7.** $4(2-3t-8t^5)^3(-3-40t^4)$.

8. $30\cos^2(1-2\varphi)\sin(1-2\varphi)$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{3+x^2}}$. **10.** $\frac{10\operatorname{arctg}5x}{1+25x^2}$.

11. $\frac{1}{2\ln 2\sqrt{x-x^2}\arccos\sqrt{x}}$. **12.** $12v\cos v^2\sin^2 v^2$.

13. $\frac{2(\operatorname{ctg}2x\ln(\cos 2x) + \operatorname{tg}2x\ln(\sin 2x))}{\ln^2(\cos 2x)}$. **14.** $\frac{3t^2 + \sin\frac{t}{3}}{\left(t^3 - 3\cos\frac{t}{3}\right)\ln 5}$.

15. $\frac{5^\varphi \ln 5}{\operatorname{arctg}5^\varphi(1+5^{2\varphi})}$. **16.** $v^2\left(3\arccos\ln^2 v - \frac{2\ln v}{\sqrt{1-\ln^4 v}}\right)$.

17. $\cos\left(5^{x\operatorname{ctg}3x}\right)5^{x\operatorname{ctg}3x}\ln 5\left(\operatorname{ctg}3x - \frac{3x}{\sin^2 3x}\right)$. **18.** $2\varphi\cos^2\varphi\cos\varphi^2 - \sin 2\varphi\sin\varphi^2$. **19.** $2(\operatorname{tg}x)^{4-x^2}\left(\frac{4-x^2}{\sin 2x} - x\ln\operatorname{tg}x\right)$.

20. $\frac{-5(\ln\cos x + x\operatorname{tg}x)(\cos x)^{5/x}}{x^2}$. **21.** $\frac{1-\ln x}{2x^2}\cdot x^{\frac{1}{2x}}$.

22. $\left(2x\ln\operatorname{arctg}x + \frac{1}{\operatorname{arctg}x}\right)(\operatorname{arctg}x)^{1+x^2}$. **23.** $\frac{-420}{x^8}$. **24.** $80\cos 2\varphi$. **25.** 24.

26. $27e$. **27.** $(3-2x)dx$. **28.** $(3x^2-5)dx$. **29.** $-5e^{\cos 5x}\sin 5x dx$.

30. $\left(2x\arccos\ln x - \frac{x}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\right)dx$. **31.** $29x - y - 48 = 0$, $x + 29y - 292 = 0$. **32.** $4x - 4y + 2 - \pi = 0, 4x + 4y - 2 - \pi = 0$.

33. $6x - y + 5 = 0$, $x + 6y + 7 = 0$. **34.** $x - 4y + 8 = 0, 4x + y - 19 = 0$.

Б

35. $\frac{-4x-5y}{2y+5x}$. **36.** $\frac{\sin(x+y) - y^3}{3xy^2 - \sin(x+y)}$. **37.** $\frac{4-x}{3+y}$. **38.** $\frac{3e^{3x-1}}{ye^{2y}(1+y)}$.

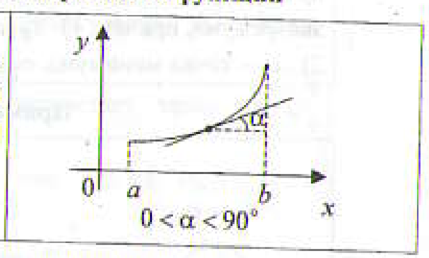
39. $\frac{y-12}{10y-x}$. **40.** $\frac{6xy}{2y-1}$. **41.** $t; \frac{1}{6t}$. **42.** $-\operatorname{ctg}t; \frac{-1}{a\sin^3 t}$. **43.** $-e^{2at}; 2e^{3at}$.

44. $t; -\sqrt{1-t^2}$. **45.** $2t; 2(1+t^2)$. **46.** $\sin t; \cos^3 t$.

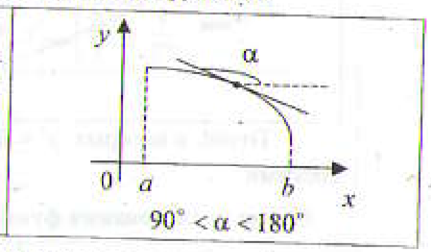
5.2. Применение производной к исследованию функций

5.2.1. Монотонность функции

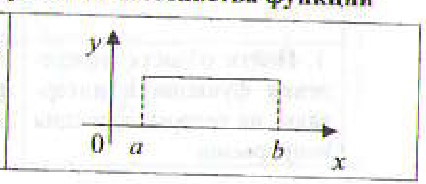
5.10 **Достаточное условие возрастания функции**

Если в каждой точке интервала $(a;b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале	

5.10 **Достаточное условие убывания функции**

Если в каждой точке интервала $(a;b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале	

5.10 **Необходимое и достаточное условия постоянства функции**

Функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a;b)$, тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала	

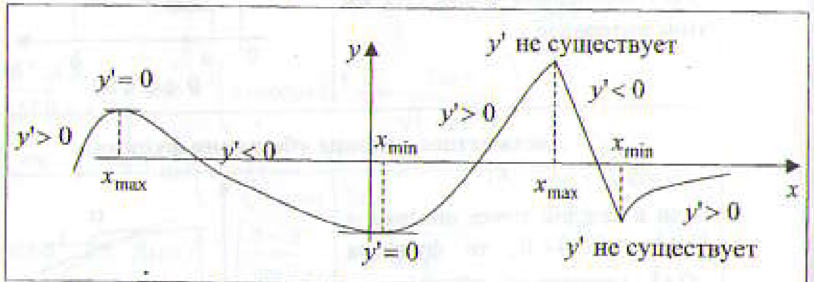
5.10 **Необходимое условие экстремума функции**

Если x_0 – точка экстремума функции $y=f(x)$, то в этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.

5.11 **Достаточные условия экстремума функции**

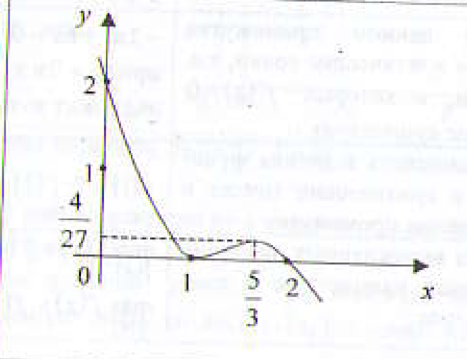
I. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и при переходе через эту точку производная меняет знак, то x_0 – точка экстремума функции $y=f(x)$.	
Если $f'(x)>0$ при $x<x_0$, $f'(x)<0$ при $x>x_0$, то x_0 – точка максимума.	Если $f'(x)<0$ при $x<x_0$, $f'(x)>0$ при $x>x_0$, то x_0 – точка минимума.
II. Если в точке x_0 первая производная функции $y=f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 будет точкой экстремума, причем: 1) x_0 – точка максимума, если $f''(x_0)<0$; 2) x_0 – точка минимума, если $f''(x_0)>0$.	

5.11 **Примеры экстремумов**



Точки, в которых $y'=0$ или не существует, называются критическими.

Схема исследования функции на монотонность и экстремумы

Этапы	Пример для функции $y=(2-x)(x-1)^2$
1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна	Область определения: $(-\infty;+\infty)$. Функция непрерывна во всей области определения
2. Найти производную $f'(x)$	$f'(x)=\left((2-x)(x-1)^2\right)'=$ $=(2-x)'(x-1)^2+(2-x)\left((x-1)^2\right)'=$ $=-(x-1)^2+(2-x)2(x-1)=$ $=(x-1)(-x+1+4-2x)=(x-1)(5-3x)$
3. Найти критические точки, решив уравнение $f'(x)=0$	$(x-1)(5-3x)=0$ при $x_1=1$ и $x_2=\frac{5}{3}$
4. Определить знак производной в интервалах, на которые критические точки разбивают область определения функции	Знак $f'(x)$: – min + max – ; точки 1, $\frac{5}{3}$, x. Характер изменения функции: убыв. возр. убыв.
5. Записать интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции	Функция возрастает при $x\in\left(1;\frac{5}{3}\right)$, убывает при $x\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$; $x_{min}=1$; $x_{max}=\frac{5}{3}$; $f_{min}(1)=0$; $f_{max}\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{27}$
6. Построить эскиз графика	

5.2.2. Наименьшее и наибольшее значения функции, непрерывной на отрезке

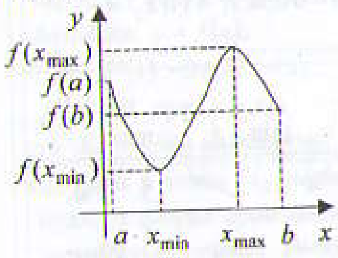
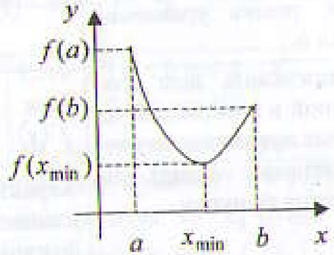
Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наименьшего и наибольшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.	
Например:  $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{min})$ $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{max})$	 $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{min})$ $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$

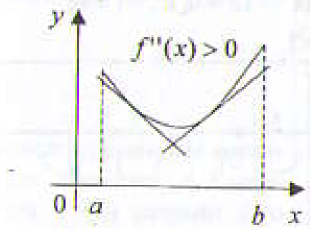
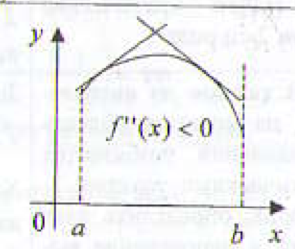
Схема нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной на отрезке

Этапы	Пример для функции $y = -x^3 + 3x^2 + 5,\ x \in [1;4]$
1. Найти производную $f'(x)$	$f'(x) = -3x^2 + 6x$
2. На данном промежутке найти критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует	$-3x^2 + 6x = 0; -3x(x-2) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ отрезку $[1;4]$ принадлежит только одна точка $x_2 = 2$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах промежутка	$f(1) = 7;\ f(2) = 9;\ f(4) = -11$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее	$\min\limits_{[1;4]} f(x) = f(4) = -11;$ $\max\limits_{[1;4]} f(x) = f(2) = 9$

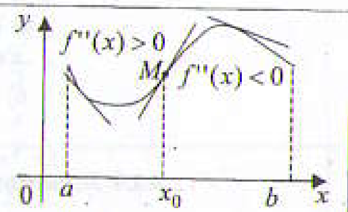
5.12 ### 5.2.3. Выпуклость и точки перегиба графика функции

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на $(a;b)$.

5.13 **Достаточные условия выпуклости графика функции**

Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ вторую производную и $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, то график функции имеет на $(a;b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).	
	
Выпуклость графика на $(a;b)$ направленная вниз	Выпуклость графика на $(a;b)$, направленная вверх

5.14 **Точка перегиба**

Точка $M(x_0; f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, в которой меняется направление выпуклости, называется точкой перегиба	
Если $M(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба, то $f''(x_0)$ равна нулю или не существует. Точки, в которых $f''(x)$ равна нулю или не существует, называются критическими точками 2-го рода. Если вторая производная функции $y = f(x)$ при переходе через критическую точку x_0 меняет знак, то $M(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба	

5.14 **Схема нахождения интервалов выпуклости и точек перегиба графика функции**

Этапы	Пример для функции $y = x^4 - 6x^2$
1. Найти область определения функции, промежутки непрерывности	Функция определена, непрерывна и дифференцируема при $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Найти производные первого и второго порядков	$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$
3. Найти критические точки 2-го рода	$f''(x) = 0; 12x^2 - 12 = 0; x^2 - 1 = 0$; $x_1 = -1; x_2 = 1$
4. В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками 2-го рода, определить знак $f''(x)$ и направление выпуклости	Знак $f''(x)$: $+$ $\;-1\;$ $-$ $\;1\;$ $+$ x Характер изменения функции: $\cup$ $\;-1\;$ $\cap$ $\;1\;$ $\cup$ перегиб перегиб
5. Записать результат исследования	График функции имеет: а) выпуклость направленную вниз при $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (1; +\infty)$; б) выпуклость направленную вверх при $x \in (-1; +1)$; в) точки перегиба $(-1; -5)$ и $(1; -5)$

5.15 **5.2.4. Асимптоты графика функции**

Прямая $x = c$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке c равен бесконечности, т.е. $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = \pm\infty$.

Прямая $y = kx + b$ является наклонной (горизонтальной при $k = 0$) асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx).$$

5.15 **Схема нахождения асимптот графика функции**

Этапы	Пример для функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$
1. Найти область определения и интервалы непрерывности	Функция определена при $x \neq 2$, непрерывна при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, $x = 2$ - точка разрыва
2. Определить тип точки разрыва (если она есть)	$\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \left(\dfrac{5}{-0}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \left(\dfrac{5}{+0}\right) = +\infty$. $x = 2$ – точка разрыва 2-го рода
3. Записать уравнение вертикальных асимптот в случае наличия точки разрыва 2-го рода	$x = 2$ – вертикальная асимптота
4. Найти наклонные асимптоты $y = kx + b$	$k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{(x-2)x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x} =$ $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1.$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x-2} - x\right) =$ $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{x-2} =$ $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 2$ $y = x + 2$ – наклонная асимптота

5.16

5.2.5. Схема исследования функции и построение графика

Исследование функции можно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность.
3. Найти асимптоты графика функции.
4. Найти интервалы монотонности функции, точки экстремумов. Вычислить значения экстремумов.
5. Найти интервалы выпуклости вверх (вниз), точки перегиба.
6. Исследовать периодичность функции.
7. Найти точки пересечения графика с осями координат.
8. Построить график функции с учетом проведенного исследования.

Пример 1А. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ и построить ее график.

Решение. Действуем по приведенной ранее схеме.

1. Область определения функции: $x \neq 1$ или $x \in (-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Функция общего типа, так как

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+x+1}{-x-1}=-\frac{x^2+x+1}{x+1}\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x).$$

3. Функция не определена при $x=1$.

Исследуем поведение функции в окрестности этой точки. Для этого найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty;\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Оба предела бесконечные, значит, $x=1$ – точка разрыва 2-го рода, а прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{(x-1)x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0;$$

$y=x$ – наклонная асимптота.

4. Находим $y'=\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1}\right)'=\dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=$

$$\frac{2x^2-3x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Решаем уравнение $y'=0$.

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 \text{ при } x^2-2x=0;\ x(x-2)=0;\ x=0;\ x=2.$$

		0		1		2		x
Знак $f'(x)$	+	max	–		–	min	+	
Характер изменения функции	↗ возр.		↘ убыв.		↘ убыв.		↗ возр.	

$$f_{\max}(0)=-1,\ f_{\min}(2)=\frac{4-2+1}{2-1}=3.$$

5. Найдем $y''=\left(\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=$

$$=\frac{2(x-1)((x-1)^2-x^2+2x)}{(x-1)^4}=\frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Находим критические точки 2-го рода. Решаем уравнение $y''=0$. Имеем одну критическую точку $x=1$, в которой y'' не существует.

		1		x
Знак $f''(x)$	–		+	
Характер изменения функции	⌒ выпукла вверх		⌣ выпукла вниз	

Точек перегиба нет.

6. Функция непериодическая.

7. Точки пересечения с осью Ox найдем из уравнения $f(x)=0$, а точки пересечения с Oy получим при $x=0$: $\frac{x^2-x+1}{x-1}=0, x^2-x+1=0, D<0$, корней нет, нет точек пересечения с осью Ox; $y=f(0)=-1$, $(0;-1)$ точка пересечения с осью Oy.

8. Учитывая исследование, строим график функции:

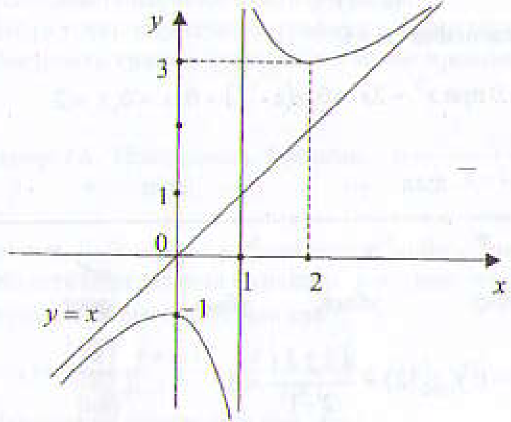


Рис. 25

5.2.6. Задачи для самостоятельного решения

А

Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

1. $y=15-x^2-2x$.
2. $y=2x^3-6x^2-18x+7$.
3. $y=e^{x(x-1)}$.
4. $y=\frac{1}{4}x^4-x+5$.

Исследуйте функции на экстремум:

5. $y=4x^3-9x^2+6x$.
6. $y=e^{3x}-3x+2$.
7. $y=\frac{2x}{1+x^2}$.
8. $y=(x-2)e^{2x+1}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

9. $f(x)=3x^4+4x^3+2, [-2;1]$.
10. $f(x)=x^3+2x^2-7x+3, [-2;2]$.
11. $f(x)=x\ln x-x, \left[{}^1\!/_e;e\right]$.
12. $f(x)=\sqrt{25-x^2}, [-3;4]$.

Найдите интервалы выпуклости вверх (вниз), точки перегиба графика функции:

13. $f(x)=(x-3)x^2$.
14. $f(x)=e^{-8x^2+4x}$.
15. $f(x)=\ln x+{}^1\!/_x$.
16. $f(x)=(x+2)(x-3)^2$.

Б

Найдите асимптоты графика функции:

17. $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.
18. $f(x)=\frac{3x^3}{x^2-4}$.
19. $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-9}$.
20. $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$.

Исследуйте функции и постойте их графики:

21. $y=-x(x+1)^2$.
22. $y=x^4-4x^2+5$.
23. $y=e^{2x-x^2}$.
24. $y=\frac{x^2}{x^2+2}$.

5.2.7. Ответы

А

1. Возрастает в интервале $(-\infty;-1)$; убывает в интервале $(-1;+\infty)$. **2.** Возрастает в интервале $(-\infty;-1)$; $(3;+\infty)$; убывает в интервале $(-1;3)$. **3.** Убывает в интервале $\left(-\infty;{}^1\!/_2\right)$; возрастает в интервале $\left({}^1\!/_2;+\infty\right)$. **4.** Убывает в интервале $(-\infty;1)$; возрастает в интервале $(1;+\infty)$. **5.** $x_{max}={}^1\!/_2, x_{min}=1$. **6.** $x_{min}=0$. **7.** $x_{min}=-1, x_{max}=1$. **8.** $x_{min}={}^3\!/_2$. **9.** $\max\limits_{[-2;1]}f(x)=f(-2)=18, \min\limits_{[-2;1]}f(x)=f(-1)=1$. **10.** $\max\limits_{[-2;2]}f(x)=f(-2)=17$, $\min\limits_{[-2;2]}f(x)=f(1)=-1$. **11.** $\max\limits_{[{}^1\!/_e;e]}f(x)=f(e)=$

$= 0$, $\min\limits_{[1/e;e]} f(x) = f(1) = -1$. **12.** $\max\limits_{[-3;4]} f(x) = f(0) = 5$, $\min\limits_{[-3;4]} f(x) = f(4) = 3$. **13.** Выпуклый вверх на $(-\infty;1)$, выпуклый вниз на $(1;+\infty)$; $(1;-2)$ – точка перегиба. **14.** Выпуклый вверх на $(0; 1/2)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;0)$ и $(1/2;+\infty)$; точки перегиба – $(0;1)$ и $(1/2;1)$. **15.** Выпуклый вниз на $(0;2)$, выпуклый вверх на $(2;+\infty)$; $(2; 1/2 + \ln 2)$ – точка перегиба. **16.** Выпуклый вверх на $(-\infty; 4/3)$, выпуклый вниз на $(4/3;+\infty)$; $(4/3; 250/27)$ – точка перегиба.

Б

17. $x = -1, y = x - 1$. **18.** $x = -2, x = 2, y = 3x$. **19.** $x = -3, x = 3, y = 1$. **20.** $x = 0, y = x/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1986, 1989.
2. Гусак А.А. Высшая математика: В 2 т. – Мн.: ТетраСистемс, 2001.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
4. Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М. Сборник задач по геометрии и алгебре. – Мн.: Унiверсiтэцкае, 1999.
5. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Справочное пособие к решению задач. – Мн.: ТетраСистемс, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ