УДК 532.516, 517.928

В.Л. Сенницкий
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия

ЭФФЕКТЫ ПАРАДОКСАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Аннотация. *Поставлена и решена новая задача о течении вязкой жидкости со свободной границей. Полученные результаты, в частности, могут использоваться в научном поиске перспективных подходов к решению актуальных прикладных проблем, в том числе, проблем, связанных с зеленой энергетикой.*

V.L. Sennitskii
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS
Novosibirsk, Russia

EFFECTS OF A PARADOXICAL ROTATION OF A LIQUID WITH A FREE BOUNDARY UNDER PERIODICAL INFLUENCES

Abstract. *A new problem is formulated and solved on a flow of a viscous liquid with a free boundary. The obtained results in particular can be used for a scientific search of perspective approaches to the solution of actual applied problems and in that number of the problems connected with a green energetics.*

1. Периодическим по времени явлениям, процессам принадлежит важнейшая роль в природе и технике, в том числе в области экологии, современных энергетических технологий, зеленой энергетики. Это положение, в частности, является актуальным и в отношении изучения необычной, парадоксальной динамики гидромеханических систем. Такая – нетривиальная – динамика систем, как показывают результаты регулярно проводимых исследований (см., например, [1–4] и представленную там литературу), многообразно реализуется при оказании на гидромеханические системы периодических по времени воздействий.

Целью настоящей работы является содержательное изучение парадоксального поведения вязкой жидкости, направленное на расширение понимания диапазона возможностей периодических воздействий, что может быть применено при разработке перспективных методов управления гидромеханическими системами, при создании систем, обладающих предписанными свойствами и использоваться в научном поиске эффективных подходов к решению актуальных прикладных проблем. Рассматривается задача о движении вязкой жидкости при периодических по времени воздействиях на жидкость со стороны окружаемого ею твердого тела, которое пульсирует и совершает вращательное движение. Испытываемые жидкостью воздействия могут характеризоваться наличием либо отсутствием выделенного направления в пространстве. Выявлены новые гидромеханические эффекты. В частности, обнаружен эффект, состоящий в том, что (на фоне колебаний) часть жидкости совершает стационарное вращательное движение в направлении, противоположном направлению среднего (по времени) вращения находящегося в жидкости твердого тела.

2. Имеется несжимаемая вязкая жидкость, окружающая твердое тело – бесконечно длинный круговой цилиндр Ξ радиуса A. Ось тела Ξ находится на оси Z инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Тело Ξ совершает вращательное движение вокруг оси Z с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Радиус A и угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ заданным образом периодически с периодом T изменяются со временем t (среднее значение угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ может быть как отличным от нуля, так и равным нулю). Жидкость занимает область Q : $A < R < B$; $0 \leq \theta < 2\pi$; $-\infty < Z < \infty$ ($R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, θ, Z – цилиндрическая система координат; $B > A$ – функция t, связанная с радиусом A условием постоянства разности $B^2 - A^2$). Жидкость граничит с твердым телом Ξ и с пустотой (твердая граница Γ_s и свободная граница Γ_f жидкости характеризуются соотношениями $R = A$; $R = B$; $0 \leq \theta < 2\pi$; $\infty < Z < \infty$). Требуется определить периодическое по времени осесимметричное, плоское движение жидкости со свободной границей, которое порождается оказываемыми на жидкость воздействиями со стороны находящегося в ней твердого тела.

Пусть $\tau = t/T$; $0 \leq \varepsilon < 1$ – параметр; $g = \sin 2\pi\tau$; $h = \sin(2\pi\tau + \varphi)$ (φ – постоянная); $a = A/\widehat{A} = 1 + \varepsilon g$ ($\widehat{A} > 0$ – постоянная, значение A при $\varepsilon = 0$ (значение A в отсутствие пульсаций тела Ξ)); $\widehat{B}$ – постоянная, значение B при $\varepsilon = 0$; $\varkappa = \widehat{B}/\widehat{A}$; $b = B/\widehat{B} = \sqrt{a^2 + \varkappa^2 - 1}\ /\ \varkappa$; $\omega = \Omega T = \widehat{\omega}[h + \varepsilon(\varkappa - 1)s]$ ($\widehat{\omega} > 0$, s – постоянные); σ, ρ и ν – соответственно коэффициент поверхностного натяжения, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathrm{Re} = \widehat{A}^2/(\nu T)$ – число Рейнольдса; $r = R/\widehat{A}$; $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ – единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями возрастания соответственно r и θ ; $\mathbf{V}$ – скорость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/\widehat{A} = v_r(r,\tau)\mathbf{e}_r + v_\theta(r,\tau)\mathbf{e}_\theta$; P – давление в жидкости; $p = T^2P/(\rho\widehat{A}^2) = p(r,\tau)$; $\lambda = \sigma T^2/(\rho\widehat{A}^3)$.

Задачу о движении жидкости составляют уравнение Навье–Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердой и свободной границах жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\nabla \mathrm{p}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v} \quad \text{в} \;\; Q; \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \quad \text{в} \;\; Q; \tag{2}$$

$$\mathrm{v_r}=\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{d\tau}}, \qquad \mathrm{v_\theta}=\omega \mathrm{a} \quad \text{на} \;\; \Gamma_s \; ; \tag{3}$$

$$\mathrm{v_r}=\varkappa\frac{\mathrm{db}}{\mathrm{d\tau}}, \qquad \mathrm{p}-\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \mathrm{v_r}}{\partial \mathrm{r}}-\frac{\lambda}{\varkappa \mathrm{b}}=0, \qquad \frac{\partial \mathrm{v_\theta}}{\partial \mathrm{r}}-\frac{\mathrm{v_\theta}}{\mathrm{r}} = 0 \quad \text{на} \;\; \Gamma_f \, . \tag{4}$$

Отметим, что в задаче (1) – (4) испытываемые жидкостью периодические по времени воздействия со стороны тела Ξ при $s\neq 0$ характеризуются наличием, а при $s=0$ – отсутствием выделенного направления в пространстве.

3. Согласно (2) – (4) имеем

$$\mathrm{v_r}=\mathrm{w}/\mathrm{r}, \tag{5}$$

где $\mathrm{w}=\mathrm{a}(\mathrm{da}/\mathrm{d}\tau)=\varkappa^2\mathrm{b}(\mathrm{db}/\mathrm{d\tau})$.

Из (1) – (5) следует

$$\mathrm{p}=\frac{\lambda}{\varkappa \mathrm{b}}-\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\tau}}\ln \mathrm{b}-\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{d\tau}}\ln\frac{\mathrm{r}}{\varkappa \mathrm{b}}+\mathrm{w}^2\frac{\mathrm{r}^2-\varkappa^2\mathrm{b}^2}{2\varkappa^2\mathrm{b}^2\mathrm{r}^2} + \int_{\varkappa b}^{r}\frac{\mathrm{v_\theta}^2}{\mathrm{r}'}\mathrm{d}\,\mathrm{r}' \, ; \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{r}^2\frac{\partial \mathrm{v_\theta}}{\partial \tau}=\mathrm{r}^2\frac{\partial^2 \mathrm{v_\theta}}{\partial \mathrm{r}^2}+(1-\mathrm{Re}\,\mathrm{w})\mathrm{r}\,\frac{\partial \mathrm{v_0}}{\partial \mathrm{r}} - (1+\mathrm{Re}\,\mathrm{w})\mathrm{v_\theta} \quad \text{в} \;\; Q, \tag{7}$$

$$\mathrm{v_\theta}=\omega \mathrm{a} \quad \text{при} \;\; \mathrm{r}=\mathrm{a}, \qquad \frac{\partial \mathrm{v_\theta}}{\partial \mathrm{r}}-\frac{\mathrm{v_\theta}}{\mathrm{r}}=0 \quad \text{при} \;\; \mathrm{r}=\varkappa \mathrm{b}\, .$$

Будем рассматривать задачу (7) при малых по сравнению с единицей значениях ε. Применим метод разложения по степеням малого параметра. Предположим, что

$$v_\theta \sim v_0 + \varepsilon v_1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{8}$$

Используя (7), (8), определим задачи ε^N (N = 0, 1) приближений. Решая эти задачи, найдем

$$v_0 = \widehat{\omega}\ \mathrm{Imag}\left[\frac{I_2(q\varkappa)K_1(qr) + K_2(q\varkappa)I_1(qr)}{Q_1}\ e^{i(2\pi\tau+\varphi)}\right],$$

$$v_1 = \widehat{\omega}\left[\cos\varphi + (\varkappa - 1)s + \frac{1}{2}\ \mathrm{Real}\frac{e^{i\varphi}qQ_2}{Q_1}\right]r -$$

$$-\ \frac{1}{2}\pi\mathrm{Re}\widehat{\omega}\ \mathrm{Imag}\left\{\frac{e^{i\varphi}}{Q_1}[I_2(\varkappa b)G_K + K_2(\varkappa b)G_I]\right\}$$
$$+\ \mathrm{Real}\left(\tilde{v}e^{4\pi i\tau}\right). \tag{9}$$

Здесь $q = (1+i)\sqrt{\pi\mathrm{Re}}$; $Q_1 = I_2(\varkappa b)K_1(q) + K_2(\varkappa b)I_1(q)$; $Q_2 == I_2(\varkappa b)K_0(q) - K_2(\varkappa b)I_0(q)$; $G_I = I_1(qr) - I_1(q)r - qr\int_1^r \frac{I_0(qr')}{r'}\,d\,r'$;

$G_K = K_1(qr) - K_1(q)r + qr\int_1^r \frac{K_0(qr')}{r'}\,d\,r'$; $\tilde{v}$ – функция r; I_0, I_1, I_2, K_0, K_1, K_2 – модифицированные функции Беселя.

Формулами

$$v_0 = v_0 + \varepsilon v_1 \tag{10}$$

и (5), (6), (9) определяется приближенное решение задачи (1) – (4). Данное решение, свидетельствует о наличии ряда (происходящих на фоне колебаний) необычных стационарных вращательных течений жидкости.

Обратимся к вопросу о среднем по времени движении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях $\varkappa$ –1.

Пусть $\chi = (\varkappa - r)/(\varkappa - 1)$. Используя (5), (9), (10), получим

$$\langle\mathbf{v}\rangle = \int_\tau^{\tau+1}\mathbf{v}\,d\tau' \sim \varepsilon\widehat{\omega}[s - \pi\mathrm{Re}(\sin\varphi)\chi](\varkappa - 1)\mathbf{e}_\theta \ \text{ при } \ \varkappa - 1 \to 0. \tag{11}$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении безразмерная скорость $\langle\mathbf{v}\rangle \cdot \mathbf{e}_\theta$ совпадает с безразмерной средней по времени угловой скоростью вращения жидкости вокруг оси Z.

Согласно (11) (на фоне колебаний) при любом значении $\mathrm{Re} > 0$ имеет место, в частности, следующее. Если $s \neq 0$, то при $\chi \sin\varphi = 0$ средняя (по времени) угловая скорость вращения жидкости равна (отличной от нуля) средней угловой скорости вращения тела Ξ. Если $s \sin\varphi < 0$, то при $1 \leq r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ, при том, что для $1 \leq r < \varkappa$ жидкость «обгоняет» твердое тело. Если $s \sin\varphi > 0$, и $|s| > \pi\mathrm{Re}|\sin\varphi|$, то при $1 \leq r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ, при том, что для $1 \leq r < \varkappa$ жидкость «отстает» от твердого тела. Если $s \sin\varphi > 0$, и $|s| > \pi\mathrm{Re}|\sin\varphi|$, то при $r = r^* = \varkappa - (\varkappa - 1)s \,/\, (\pi\mathrm{Re} \sin\varphi)$ угловая скорость жидкости равна нулю; при $r^* < r \leq \varkappa$ жидкость вращаетсчя в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ, при том что для $r^* < r < \varkappa$ жидкость «отстает» от твердого тела; при $1 \leq r < r^*$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению среднего вращения тела Ξ; для $s = \pi\mathrm{Re} \sin\varphi$ выполняется: $r^* = 1$, и угловая скорость жидкости равна нулю при $r = 1$. Если $s = 0$ то при $1 \leq r < \varkappa$ направление вращения жидкости определяется знаком $\sin\varphi$ (при $\sin\varphi < 0$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением вектора $\mathbf{e}_\theta$, при $\sin\varphi > 0$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению вектора $\mathbf{e}_\theta$); при $r = \varkappa$ угловая скорость вращения жидкости равна нулю. При $s \sin\varphi > 0$, $|s| > \pi\mathrm{Re}|\sin\varphi|$ для больших значений $\mathrm{Re}|\sin\varphi|$ разность $\varkappa - r^*$является малой по сравнению с разностью $\varkappa - 1$; это соответствует наличию такого движения жидкости, что (на фоне колебаний) в «очень тонкой области» $r^* < r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ, а в «основной области» $1 \leq r < r^*$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению среднего вращения твердого тела.

4. Из представленного в работе следует, что воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве, могут порождать качественные изменения в движении жидкости; по достигаемому влиянию на динамику гидромеханических систем такие воздействия способны эффективно конкурировать, например, со стационарными воздействиями на системы (см. также [2, 4]). Причиной обнаруженных эффектов является согласованность (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий. Гидромеханическая система, подвергающаяся периодическим по времени воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве, производит отклики (реакции на воздействия), которые характеризуются наличием выделенного направления в пространстве и выражаются в том, что свободные части системы (части системы, движение которых не задано) – в том числе, жидкие слои – на фоне колебаний совершают среднее движение. Это находится в непосредственной связи со следующим обобщенным принципом среднего движения: основополагающей причиной того, что не имеющими выделенного направления в пространстве периодическими по времени (колебательными, вибрационными) воздействиями на гидромеханическую систему порождается среднее по времени движение свободных частей системы, является возможность совершения свободными частями системы движения в различных направлениях в пространстве в неодинаковых условиях (см. в связи с этим также [2]). Изложенным в настоящей работе, в частности, демонстрируется, как «не имеющим направления» создается «имеющее направление».

Список использованных источников

1. Челомей В. Н. Избранные труды. М.: Машиностроение, 1989. 336 с.
2. Сенницкий В.Л. Парадоксальное движение жидкости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 8, ч. 1. С. 28–33. DOI: 10.17513/mjpfi.11753.
3. Сенницкий В.Л. Вынужденные вращательные колебания гидромеханической системы // Сборник статей Международной научно-технической конференции Минские научные чтения-2022 в 3 т. Минск, 07–09 декабря 2022 г. Минск: БГТУ, 2022. Т. 3. С. 181–186.
4. Сенницкий В.Л. Об особенностях течения жидкости в поле силы тяжести // Сибирские электронные математические известия. 2022. Т. 19, № 1. С. 241–247. DOI: 10.33048/semi.2022.19.018.

УДК 621.039.3

М.П. Симонова-Лобанок
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

ПОЛУЧЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ БЕЗ ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

Аннотация. *Человечество в своем развитии подошло к краю пропасти, название которой глобальная экологическая катастрофа. Чтобы этого не*