

УДК 530.1

ФРАКТАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ СТРУКТУРНОЙ МЕХАНИКИ ГЕОМАТЕРИАЛОВ: ОБЪЕМНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ СВОЙСТВА

КУЛАК М. И.



КУЛАК Михаил Иосифович,
академик БГА, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой БГТУ

Математические основы теории фракталов заложены в 20-е годы нынешнего века, однако глубоко символичен тот факт, что только после опубликования Бенуа Мандельбротом в 1982 г. монографии «Фрактальная геометрия природы» [1] началось бурное развитие как самой теории, так и ее приложений.

Поскольку фундаментальным свойством геоматериалов является неупорядоченность структуры, то понадобилось сравнительно немного времени для того, чтобы идеи теории фракталов из физики неупорядоченных сред, где удалось достичь к тому времени наиболее впечатляющих результатов, стали проникать в механику геоматериалов. И хотя первая монография на эту тему [2], опубликованная профессором Т. Л. Челидзе в 1987 г., была посвящена обзору работ, выполненных в механике геоматериалов методами теории перколяции, в ней

уже содержался прогноз, что развитие теорий перколяции и фракталов позволит в ближайшие годы оформиться новому направлению физики неоднородных сред — фрактальной механике.

Цель данной статьи — подвести предварительные итоги исследований, выполненных в области развития фрактальной механики геоматериалов за десять лет, прошедших после опубликования монографии [2].

Понятия теории фракталов не являются чем-то принципиально новым для данного издания, начиная уже с первых его номеров. Так, в предыдущем номере опубликована интересная работа с использованием теории фракталов по выявлению роли масштабного фактора в процессах тепло- и массопереноса [3]. Вместе с тем, поскольку фракталы являются сравнительно новым объектом исследования в физике геоматериалов, представляется полезным привести краткий обзор основных положений теории в систематизированном виде.

Строго и полного определения фракталов пока не существует [4]. Однако этот факт не является препятствием для развития теории. В настоящее время она интенсивно развивается благодаря наличию интуитивных определений, а также определений, имеющих достаточный уровень математической строгости [5]. В данной статье в качестве рабочего определения можно принять следующее: фракталами называются вложенные в пространство самоподобные геометрические объекты дробной топологической размерности.

Понятие о дробной фрактальной размерности можно ввести несколькими способами. Наиболее часто используемый прием — определение расстояния между двумя точками на фрактале.

В качестве образца природного фрактального объекта можно рассмотреть береговую линию, например, Балтийского моря. Как известно, береговые линии сильно изрезаны, поскольку представляют собой результат очень сложных процессов взаимодействия моря и суши. Если измерять расстояние между двумя точками береговой линии, то

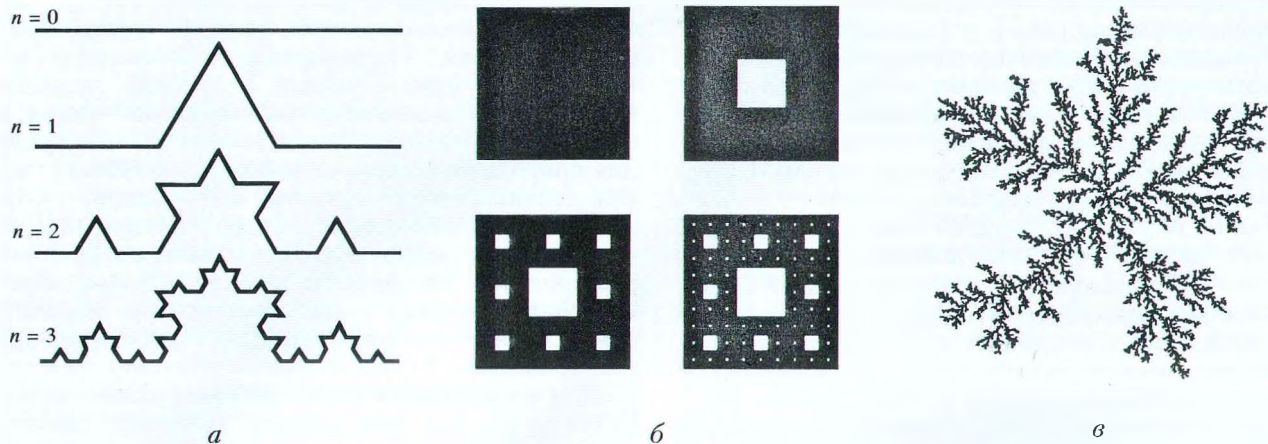


Рис. 1. Примеры фрактальных объектов:

a — кривая Кох; *б* — ковер Серпинского; *в* — кластер, возникающий в результате ограниченной диффузией агрегации

результат будет зависеть от масштаба, который мы возьмем за основу. Чем меньше масштаб, тем в большей степени будет учитываться изрезанность береговой линии.

Полученную в результате измерения с разными масштабами длину береговой линии L можно представить в следующем виде:

$$L = a \left(\frac{R}{a} \right)^D, \quad (1)$$

где a — величина используемого масштаба; R — расстояние между рассматриваемыми точками по прямой; D — фрактальная размерность. В рассматриваемом примере D представляет фрактальную размерность береговой линии.

Фрактальные объекты можно разделить на два класса — регулярные фракталы, иногда их называют предфракталы [5], и стохастические фракталы.

Примеры регулярных фракталов приведены на рис. 1, *a* и рис. 1, *б*. Регулярные фракталы были первыми объектами в теории фракталов, которые подтверждали принципиальную возможность существования геометрических объектов дробной топологической размерности.

На рис. 1, *a* приведена триадная кривая Эльзе Кох. Построение кривой Кох начинается с прямой отрезка единичной длины. Этот отрезок является «затравкой» и может быть заменен каким-либо многоугольником, например, равносторонним треугольником или квадратом. Затравка — это нулевое поколение кривой Кох ($n = 0$).

В процессе построения первого поколения кривой ($n = 1$) необходимо разделить отрезок на три части и заменить среднюю часть двумя равновеликими ей. В случае, если «затравкой» является многоугольник, то аналогичная процедура производится с его сторонами. Длина всей кривой первого поколения составляет величину $L = 4/3$.

Следующее поколение кривой получается при проведении процедуры деления и замены над каждым элементом кривой первого поколения. Далее процедуру можно повторять при все меньших и меньших масштабах.

Для определения фрактальной размерности кривой Кох преобразуем (1) к следующему виду

$$N = \left(\frac{R}{a} \right)^D, \quad (2)$$

где $N = L/a$ — число элементов на самоподобном участке кривой. В соответствии с (2) искомая фрактальная размерность равна

$$D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,26.$$

Под самоподобием подразумевается инвариантность относительно параллельного переноса и изменения масштаба (скейлинга) [5].

Триадная кривая Кох показывает возможность существования кривой с размерность больше единицы. Можно построить плоский объект с размерностью меньше двух. На рис. 1, *б* приведен пример такого объекта — ковер Серпинского. В качестве «затравки» использован квадрат. Для получения первого поколения фигуры квадрат делится на девять частей и центральная из них удаляется. Далее над каждой оставшейся частью процедура повторяется. Фрактальная размерность ковра Серпинского

$$D = \ln 8 / \ln 3 \approx 1,89.$$

Объемным аналогом ковра Серпинского является губка Серпинского, которая представляет собой пример пористого тела — трехмерного фрактала.

Несмотря на кажущуюся простоту, регулярные фракталы находят применение в некоторых областях науки. Однако для механики геоматериалов наибольший интерес представляют стохастические

фракталы. Примером объектов такого рода является приведенный на рис. 1, а фрактальный кластер. Он выглядит как типичная дендритная структура, которая чрезвычайно распространена среди геоматериалов. Вместе с тем, примечательная особенность данного кластера состоит в том, что он построен в результате моделирования на ЭВМ с использованием методов теории фракталов.

Таким образом, с методической точки зрения, стохастические фракталы полезно разделить на три типа: природные — встречающиеся в естественных условиях; искусственные — созданные целенаправленно в различных дисперсных системах, например, коллоидных; модельные — построенные в результате моделирования на ЭВМ.

Общее представление о степени изученности стохастических фракталов дает следующий факт. В настоящее время количество обнаруженных фракталов первого и второго типов приближается к десяти тысячам. Количество имитационных математических моделей, позволяющих получать кластеры с заранее известными фрактальными размерностями, не достигло и десяти. Вообще это серьезная проблема, которая сдерживает развитие теории фракталов во многих важных для практики направлениях. Более подробное обсуждение этой проблемы выходит за рамки данной статьи. Поэтому ограничимся указанием на [5, 6], где рассмотрены некоторые вопросы моделирования фрактальных структур.

Большинство геоматериалов в реальных природных условиях имеют неупорядоченную структуру, однако нужно доказать, что они принадлежат к классу фракталов. Доказательства такого рода строятся на основе определения и анализа фрактальной размерности их структуры. Необходимо отметить, что определение фрактальной размерности структур, особенно в природных системах и материалах, представляет собой самостоятельную и довольно непростую задачу. Ее решение позволяет подобрать ключ к применению методов теории фракталов в конкретной научной области.

Непосредственное использование выражения (2) для определения фрактальной размерности сопряжено с необходимостью проведения кропотливых и прецизионных измерений методами микроскопии. Методика измерений состоит в последовательном выделении частей объема кластера и подсчете количества содержащихся в них частиц. Поскольку кластер обладает самоподобием, то (2) справедливо для любой доли его объема. Практическая трудность состоит в подсчете частиц для трехмерных объектов, так как они не обладают оптической прозрачностью. Для того чтобы обойти эти сложности, используются различные косвенные методы измерения, однако они неизбежно приводят к потере части информации, поскольку для интерпретации результатов приходится привлекать модельные представления о структуре системы.

Более продуктивные способы определения фрак-

тальной размерности геоматериалов могут быть основаны на использовании методов неразрушающего контроля. Несомненным достоинством использования ионизирующих излучений является возможность исследовать структуру материала в естественном, ненарушенном состоянии, что важно для природных систем, поскольку воссоздать условия возникновения структур часто бывает очень сложно. Суть такого подхода состоит в том, что необходимо построить функцию, связывающую характеристики рассеяния или прошедшего через материал излучения с его структурными параметрами, желательно непосредственно с фрактальной размерностью.

Для исследования агрегатов коллоидного золота Вейтц и др. [5] использовали рассеяние света и малоугловое рассеяние нейтронов. В обоих случаях зависимость интенсивности рассеянного излучения S от угла рассеяния θ имеет вид

$$S(q) \sim q^{-D}, \quad q = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (3)$$

где q — длина вектора рассеяния; λ — длина волны выбранного излучения. Фрактальная размерность агрегатов составила величину $D \approx 1,79$.

Шефер и др. [5] исследовали коллоидные агрегаты кремнезема с помощью рентгеновского излучения и рассеяния света. Два метода рассеяния комбинируются для увеличения диапазона охватываемых размеров кластеров. Полученное значение фрактальной размерности $D = 2,12 \pm 0,05$.

Используя малоугловое рассеяние нейтронов, Синха и др. [5] исследовали спрессованные порошки из мелких частиц кварца и установили, что фрактальная размерность порошков достигает величины $D = 2,52 \pm 0,05$.

Теория фракталов позволяет с единых позиций решить задачу описания всей иерархии структурных уровней в сложных материалах. Так, в работе [7] по данным о рассеянии гамма-излучения древесины был прослежен фрактальный характер организации ее компонентов на пяти структурных уровнях.

В работе [8] был предложен способ прямого определения фрактальной размерности, основанный на измерении законов распределения агрегатов по размерам и массам. Он использует тот факт, что реальные дисперсные системы природного происхождения являются полифракционными. Если перестроить в логарифмическом масштабе закон распределения агрегатов по размерам, то он аппроксимируется степенной зависимостью типа

$$n_r \sim R^{-\alpha}. \quad (4)$$

Фрактальная размерность связана с параметром α и размерностью физического пространства d следующим образом

$$D = d(1 + d + \alpha). \quad (5)$$

При проведении седиментометрического анализа

измеряется распределение масс фракций по размерам. В этом случае

$$D = d(1 + \alpha). \quad (6)$$

Напрашивается вопрос о том, что конкретно в практическом плане дает новая теория после того, как фрактальная размерность найдена.

Примечательная особенность фрактальной размерности состоит в том, что это не просто топологический параметр, а это параметр, характеризующий структурное состояние материала, и в силу этого он отражает состояние системы наравне с другими внутренними параметрами. Поэтому фрактальная размерность может быть использована непосредственно в качестве дополнительного внутреннего параметра.

Так, в [8] определенная по результатам седиментометрических измерений фрактальная размерность тофяных систем была использована для построения их классификации. Объективная трудность построения такой классификации состоит в том, что процессы морфологической и химической деструкции, протекающие при торфообразовании, не совпадают, свойства одного и того же ботанического вида торфа изменяются в широких пределах, что приводит к перекрытию законов распределения этих свойств.

Разработанные методы описания структуры фрактальных кластеров были использованы для построения теории структурно-механических свойств материалов [9]. Ключевой характеристикой теорий такого рода являются модули упругости, поскольку они определяют не только жесткость и деформативность материалов, но также их вязко- и термоупругое поведение, прочность и твердость. Результаты вычисления распределения объемных и сдвиговых модулей упругости в фрактальных кластерах свидетельствуют, что они в 5—10 раз изменяются в пределах размера кластеров, особенно для кластеров, полученных при агрегации типа кластер—кластер. Подход позволяет правильно воспроизвести тензорные свойства упругости. Выполняется условие конечной жесткости кластеров.

Неоднородность структуры геоматериалов сказывается и на их прочностных свойствах. Результаты расчетов показывают, что прочность в пределах фрактального кластера может изменяться на порядок.

Данное обстоятельство позволяет по-новому трактовать различие между расчетной и фактической (реальной) прочностью материалов. Традиционное объяснение состоит в том, что более низкая прочность реальных образцов обусловлена дефектами структуры. Но расхождение закладывается уже самим фактом использования для неоднородных материалов методов, изначально построенных для однородных систем. Для материалов с фрактальной неоднородностью структуры логичным представляется, в первую очередь, учет влияния неоднородности структуры на физико-механические свойства, а затем уже учет

влияния дефектов, которые являются производными от структуры.

Многие наблюдения природных процессов приводят к временным зависимостям или рядам измерений. Такие же зависимости имеют место и для временного поведения характеристик пород в горных массивах как по причине тектонических и гидрогеологических процессов, так и вследствие техногенных воздействий [10, 11].

Графически такие зависимости представляют собой стохастический аналог кривой Кох, приведенной на рис. 1, а. Найденная формально для них фрактальная размерность оказалась очень чувствительным индикатором геомеханических процессов, лежащих в основе стохастического поведения временных зависимостей. В качестве примера можно привести работы по использованию данного подхода для предсказания землетрясений. Он вполне может быть использован в качестве теоретической основы для геомеханического мониторинга [10, 11].

Важное прикладное значение имеет изучение проницаемости геоматериалов. Как правило, их поровое пространство неоднородно. Выполненные в последние годы исследования показали, что эта неоднородность имеет фрактальный характер [5].

Известная проблема неустойчивости фронта вытеснения нефти водой в песчанниках явилась своеобразным пробным камнем для теории фракталов. Установленная в результате многочисленных экспериментов аналогия между кинетикой агрегации и фронтами вытеснения в пористых средах достаточно точно и хорошо описывает процесс нарушения устойчивости фронта с образованием вязких пальцев [5].

Необходимо отметить, что поровое пространство геоматериалов, как проницаемых материалов природного происхождения, отличается большой сложностью, поэтому особенно актуальна задача построения реалистических моделей, позволяющих учесть его существенные черты и, в частности, статистический коррелированный характер.

По принципу взаимности, поскольку структура скелета геоматериалов считается фрактальным кластером, поровое пространство также можно рассматривать как фрактальный кластер, внедренный в кластер скелета. Учитывая, что закон распределения плотности фрактального кластера $\rho(x)$ известен [5], пористость можно ввести как:

$$P(x) = 1 - \rho(x) = 1 - x^{D-d}, \quad (7)$$

где d — размерность физического пространства.

Поровое пространство можно рассматривать как фрактальный кластер с топологической размерностью D_p . В этом случае закон распределения пор имеет вид, аналогичный (7)

$$P(x) = x^{D_p-d}. \quad (8)$$

Приравняв правые части (7) и (8), получим следующее выражение для определения фрактальной размерности порового пространства:

$$D_{\Pi}(x) = d + \frac{\ln(1 - x^{D-d})}{\ln(x)} \quad (9)$$

Выражение (9) характеризует поровое пространство как мультифрактальный объект — статистический ансамбль проникающих друг в друга фрактальных кластеров. Наличие у порового пространства множества размерностей является отражением его сложной структуры.

Известно, насколько непросто описать поровое пространство стохастических материалов, используя в качестве параметра пористость. Приходится вводить несколько структурных уровней, как правило, два-три. Однако добиться даже качественного соответствия экспериментальных и теоретических зависимостей характеристик материалов от пористости удается редко. Как следует из (9), причина в том, что два-три структурных уровня не охватывают всего многообразия структур, и тем более в таком подходе нельзя учесть их корреляцию и описать синергические эффекты. Теория фракталов позволяет учитывать такого рода эффекты естественным образом и дает возможность строить описание процессов исходя из первых принципов.

Нерегулярность топографии земной поверхности в широком интервале пространственных масштабов служит указанием на то, что с помощью теории фракталов можно строить полезные модели ландшафтов.

В первую очередь необходимо отметить упомянутую в начале данной статьи фрактальную размерность береговой линии. Она реально вычисляется и составила для Норвегии $D \approx 1,52$ и для Великобритании $D \approx 1,30$.

На рис. 2 показан ландшафт, построенный с по-

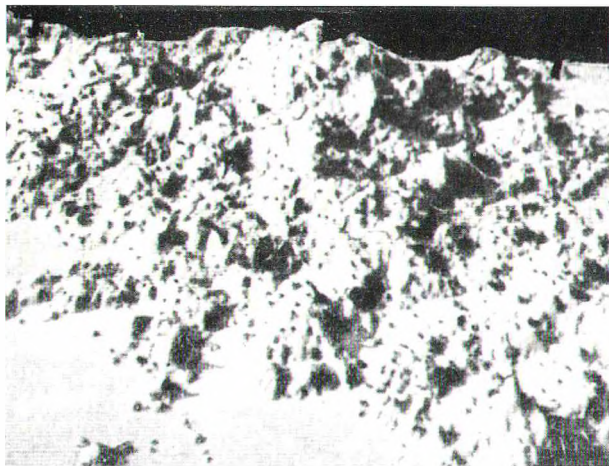


Рис. 2. Фрактальный пейзаж, полученный с помощью компьютерного моделирования

мощью алгоритма последовательных случайных сложений Фосса [5]. Ландшафты, как графическое изображение, могут описывать распределение по поверхности концентрации, температуры и других поверхностных характеристик.

В настоящее время проведен фрактальный анализ с получением значений поверхностной размерности для очень многих геоматериалов и геологических данных [5]: железная руда, золото, медь, кварц, хлорит, доломит, гранит, плавленый шпат, почвы, растительный покров, уровень грунтовых вод, топографические возвышения.

Случайность — существенная составная часть большинства происходящих в природе явлений. Приведенный в данной статье обзор исследований позволяет рассматривать теорию фракталов как самый многообещающий современный подход для их изучения.

Литература

1. Mandelbrot B. V. The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Freeman, 1982. 242 с.
2. Челидзе Т. Л. Методы теории протекания в механике геоматериалов. М.: Наука, 1987. 136 с.
3. Богатов Б. А. Масштабный фактор тепло- и массопереноса — основа интенсификации технологических процессов // Бюллетень Белорусской горной академии. 1998. № 1(2). С. 25—28.
4. Mandelbrot B. V. Fractals // Encyclopedia of Physical Science and Technology. 1987. № 5. P. 579—593.
5. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
6. Фракталы в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. М.: Мир, 1988. 672 с.
7. Кулак М. И. О проявлениях фрактальной взаимосвязи структурной неоднородности древесины под действием гамма-излучения // Химия древесины. 1991. № 6. С. 16—20.
8. Лиштван И. И., Богатов Б. А., Кулак М. И. Фрактальные структуры торфяных систем // Доклады АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 426—430.
9. Кулак М. И. Влияние структурных неоднородностей на упругие свойства фрактальных дисперсных систем // Доклады АН БССР. 1991. Т. 35. № 8. С. 704—707.
10. Осипов С. Н. Рост техногенной сейсмической опасности при разработке Старобинского месторождения калийных солей // Бюллетень Белорусской горной академии. 1997. № 1. С. 42—45.
11. Шемякин Е. И. Геомеханика глубоких подземных сооружений // Бюллетень Белорусской горной академии. 1998. № 1(2). С. 4—9.