УДК 517.977

И.К.Асмыкович, доцент;
В.М.Марченко, профессор

ДВОЙСТВЕННОСТЬ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМАХ

Some definitions of controllability and observability for linear nonstationary descriptor systems are presented. The principle of duality for stationary and nonstationary cases is proved.

1.Введение. Многие математические модели реальных систем управления технологическими процессами в физически реальных переменных наиболее адекватно обычно описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной [4, 16]. Причем, если координаты состояния объекта связаны как дифференциальными, так и алгебраическими связями, что обычно имеет место в теории электрических цепей [4, 11, 16, 18] либо при изучении системы, составленной из отдельных подсистем, то матрица при производной будет вырожденной либо даже прямоугольной. В теории дифференциальных уравнений такие системы изучались достаточно подробно (см. [3, 4, 12] и библ. к ним), а в качественной теории управления динамическими системами интерес к ним резко возрос в последние десятилетия. Поэтому пока нет даже единой терминологии и такие системы называют либо дифференциальными уравнениями, неразрешенными относительно производной [1, 3], либо сингулярными (вырожденными) [1, 4, 12, 14, 16], либо обобщенными дифференциальными системами [7, 18], либо системами с частичным состоянием [1, 16, 18], либо системами с обобщенным пространством состояний [7, 18, 21], либо неявными системами [9-11], либо дескрипторными [1, 2, 6, 17, 18]. Последнее название, происходящее от английского *description* - описание, по видимому, достаточно точно отражает специфику таких систем и встречается наиболее часто. Этот термин и будет использоваться в настоящей работе.

Основные понятия качественной теории управления, а именно управляемость и наблюдаемость, стабилизируемость и детектируемость, модальное управление и реконструируемость, для дескрипторных систем были введены по прямой аналогии с соответствующими определениями для обыкновенных линейных систем [22]. Однако вскоре было выяснено, что непосредственный перенос результатов на дескрипторные системы встречается с существенными сложностями. В первую очередь это связано с тем, что для дескрипторных систем значительно усложняются вопросы разрешимости, что особенно заметно на примере стационарных вырожденных систем и нестационарных дескрипторных систем. При этом, как отмечено в работах Ю.Е.Бояринцева [4], требование однозначной разрешимости нестационарных линейных дескрипторных систем является достаточно существенным ограничением. Если такие ограничения не выполняются, то решение дескрипторной системы может содержать как произвольные постоянные, так и произвольные функции. Поэтому определения управляемости и наблюдаемости либо привязывают к множествам совместимых начальных условий [12, 18], т.е. таких условий, при которых решения существуют и единственны, либо рассматривают решения в классах обобщенных функций [12, 15], либо рассматривается геометрическая теория в терминах обобщенных подпространств управляемости и стабилизируемости [9, 11].

Более логичным представляется путь, который состоит во введении понятий управляемости и наблюдаемости, непосредственно связанных с рассматриваемой дескрипторной системой. Тогда принцип двойственности в общей форме позволяет по определениям управляемости выводить двойственные определения наблюдаемости и наоборот. Этот же метод позволяет находить критерии наблюдаемости по критериям управляемости и выяснить взаимосвязь между различными определениями управляемости. В статье рассмотрено несколько определений управляемости и наблюдаемости для линейных дескрипторных систем, получен принцип двойственности и показана связь введенных определений с определениями для обыкновенных линейных систем.

2. Постановка некоторых задач управляемости и наблюдаемости для нестационарных дескрипторных систем. Рассмотрим объект, который описывается системой линейных нестационарных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной

$$H(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \in M_0 \subset R^n \tag{1}$$

с выходом

$$y(t) = C(t)x(t). \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ - n-вектор, $u(t)$ - r-вектор, $y(t)$ - m-вектор, $H(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ - матрицы соответствующих размеров, элементы которых являются функциями, непрерывными на промежутке $T=[t_0\,,\ t_1]$. В качестве допустимых управляющих воздействий рассмотрим некоторое множество $U \subset L_2(T, R^r)$ квадратично суммируемых функций $u(\cdot)$ со значениями в r-мерном пространстве $u(t) \in R^r, t \in T$. M_0 – заданное подмножество начальных условий, при которых решение (1) существует, хотя не обязательно единственно. Такие положения назовём совместимыми.

Под решением системы (1) с начальным условием (2) будем понимать произвольную абсолютно непрерывную на T вектор-функцию $x(t) = x(t, t_0, x_0, u)$, обладающую квадратично суммируемой на T производной, удовлетворяющую начальному условию, а также системе (1) хотя бы при одном допустимом управлении $u = u(\cdot) \in U$.

Пусть далее M_1 - произвольное заданное подмножество в R^n, т.е. $M_1 \subset R^n$.

Определение 1. Систему (1) назовем (M_0, M_1)- условно-относительно управляемой в t_* с управлением в классе U на T, если для каждого совместимого начального положения $x_0 \in M_0$ найдутся допустимое управление $u = u(\cdot) \in U$ и соответствующее решение $x(\cdot) = x(t, t_0, x_0, u)$ (возможно, не единственное), такие, что $H(t_*) \cdot x(t_*, t_0, x_0, u) \perp M_1$, т.е. для любого $g \in M_1 \Rightarrow$

$$g' H(t_*) x(t_*, t_0, x_0, u) = 0 \tag{3}$$

Определение 2. Систему (1) назовем (M_0, M_1)- условно-относительно вполне управляемой в t_* с управлением $u(\cdot) \in U$ на отрезке $[\tau_1, \tau_2] \subset T$, если для любого $x_0 \in M_0$ существует управление $u(\cdot) \in U$ и решение $x(t, t_0, x_0, u)$ такое, что выполняется тождество

$$g' H(t_* + \tau) x(t_* + \tau, t_0, x_0, u) \equiv 0, \forall g \in M_1, \tau \geq 0,$$

$$\text{и} \quad u(t) \equiv 0, t \notin [\tau_1, \tau_2].$$

Для приведенных понятий управляемости введем следующие понятия наблюдаемости:

Определение 3. При заданных множествах M_0^*, M_1^* назовем систему (1) (M_0^*, M_1^*)- условно-относительно линейно наблюдаемой в t_0 по измерениям в классе $V \subset L_2(T, R^m)$ выхода (2) на T, если для любого n- вектора $g, g \in M_1^*$ найдется m- вектор-функция $v(\cdot) \in V$ такая, что соотношение

$$g' H'(t_0) x(t_0) = \int_{t_*}^{t_0} v'(t) v(t) dt = \int_{t_*}^{t_1} v'(t) C(t) x(t) dt \tag{4}$$

выполняется для любого $x_0 \in M_0^*$ вдоль решения $x(t,t_0,x_0)$ системы (1) при выключённом управлении $u(t) \equiv 0, t \in T$.

Определение 4. Систему (1) назовем (M_0^*, M_1^*)- условно-относительно наблюдаемой в t_0 по измерениям выхода (2) на T, если имеет место импликация для всех $x_0 \in M_0^*$, $\tilde{x}_0 \in M_0^*$

$$C(t)x(t,t_0,x_0) \equiv C(t)x(t,t_0,\tilde{x}_0), t \in T \Rightarrow$$
$$g'H(t_0)x(t_0,t_1,x_0) = g'H(t_0)x(t_0,t_1,\tilde{x}_0)\ \forall g \in M_1, \tag{5}$$

т.е. при любом начальном условии $x_0 \in M_0^*$ проекция $H(t_0)x(t_0,t_1,x_0)$ на ортогональное дополнение в R^n к множеству M_1^* может быть однозначно восстановлена по измерениям выхода на T.

Отметим, что если в исходной системе (1) матрица $H(\cdot)$ не является квадратной, т.е. матрицы $H(\cdot)$и $A(\cdot)$ имеют размеры ($q \times n$), то форма определений 1-4 остается при изменении размерностей пространств и структуры множества M_0.

3. Принцип двойственности для нестационарных систем. Наряду с системой управления (1) будем рассматривать двойственную систему наблюдения, а именно, систему с обращенным временем вида

$$\frac{d}{dt}(H'(t)\psi(t)) + A'(t)\psi(t) = 0, t < t_*, \tag{6}$$

конечным условием

$$\psi(t_*) = x_0^* \in M_0^* \subset R^n \tag{7}$$

и выходом

$$z(t) = B'(t)\psi(t), t \in T. \tag{8}$$

Теорема1. Пусть $M_0 = M_1^*$, $M_1 = M_0^*$ $V=U$. Тогда система (1) *(M_0, M_1)*-условно-относительно управляема в t_1 с управлением в классе U на T в том и только в том случае, когда двойственная система (6) (M_0^*, M_1^*)- условно-относительно линейно наблюдаема в t_0 по измерениям в классе V выхода (8) на T.

Доказательство. Перепишем систему (1) в виде

$$H(t)\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) - B(t)u(t) = 0. \tag{9}$$

Пусть $\psi(\cdot)$- произвольная n- вектор-функция из $L_2(T, R^n)$ такая, что вектор-функция $H'\psi(t), t \in T$ абсолютно непрерывна. Умножим равенство (9) на $\psi'(t)$ и проинтегрируем от t_0 до t^*. Получаем

$$0 = \int_{t_0}^{t^*} \psi'(t)\left(H(t)\frac{dx(t)}{dt} - A(t)\overset{\circ}{x}(t) - B(t)u(t)\right)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t^*} \psi'(t)\left(H(t)\frac{dx(t)}{dt}\right)dt - \int_{t_0}^{t^*} \psi'(t)A(t)x(t)dt - \int_{t_0}^{t^*} \psi'(t)B(t)u(t)dt.$$

Первый интеграл преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{t^*} \psi'(t)H(t)\frac{dx(t)}{dt}dt = [\psi'(t)H(t)x(t)]_{t_0}^{t^*} - \int_{t_0}^{t^*} \frac{d}{dt}(\psi'(t)H(t))x(t)dt.$$

Подставив это выражение в предыдущее равенство, имеем

$$0 = [\psi'(t)H(t)x(t)]_{t_0}^{t^*} - \int_{t_0}^{t^*}\left(\frac{d}{dt}(\psi'(t)H(t)) + \psi'(t)A(t)\right)x(t)dt - \int_{t_0}^{t^*} \psi'(t)B(t)u(t)dt.$$

Учитывая двойственную систему (6), получаем равенство

$$\psi'(t_*)H(t_*)x(t_*) - \overset{\circ}{\psi}'(t_0)H(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t^*} \psi'(t)B(t)u(t)dt. \qquad (10)$$

По определению (M_0, M_1)-условно-относительная управляемость системы (1) в момент t_* с управлением в классе U на T означает, что для каждого $x_0 \in M_0$ найдется управление $u(\cdot) \in U$ и соответствующее решение $x(t, t_0, x_0, u)$ такое, что $H(t^*)x(t^*) \perp M_1$, т.е. для любого $g \in M_1 \Rightarrow g'H(t^*)x(t^*) = 0$. Тогда, полагая конечное условие в (7) $\psi(t^*) = x_0^* = g \in M_1$, соотношение (10) приводим к виду

$$-\psi'(t_0)H(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t^*} \psi'(t)B(t)u(t)dt,$$

транспонируя которое, имеем

$$\int_{t_0}^{t^*} u'(t)B'(t)\psi(t)dt = x_0' H'(t_0)\psi(t_0).$$

Последнее равенство выполняется вдоль любого решения $\psi(t)=\psi(t,t^*,g)$ двойственной системы (6),(8), что означает ее (M_0, M_1)-условно-относительную наблюдаемость в t_0 по измерениям (8) в классе V на T. Теорема полностью доказана.

Следствие1. Вдоль решений $x(\cdot),\psi(\cdot)$ основной (1),(2) и двойственной (6)-(8) систем имеет место следующее двойственное соотношение:

$$(x_0^*)' H(t^*)x(t^*) = x_0' H'(t_0)\psi(t_0) + \int_{t_0}^{t^*} \psi'(t)B(t)u(t)dt.$$

Замечание1. Отметим, что из доказательства теоремы следует, что если исходная система будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}(H(t)x(t)) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

то двойственная система запишется в форме

$$H'(t)\dot\psi(t) = -A'(t)\psi(t),$$

в отличие от вида (6).

3. Принцип двойственности для стационарных дескрипторных систем. Пусть рассматривается объект управления, который описывается линейной стационарной дескрипторной системой

$$H\dot x(t) = Ax(t) + Bu(t), t > 0, \tag{11}$$

с начальным условием

$$x(+0) = x_0 \in M_0 \subset R^n \tag{12}$$

и выходом

$$y(t) = Cx(t), \tag{13}$$

где $x(t)$ - n-вектор, $u(t)$ - r-вектор, $y(t)$ - m-вектор, H, A, B, C - постоянные матрицы соответствующих размеров, причем $det H = 0$ и требование регулярности означает [16], что

$$det[\lambda H - A] \not\equiv 0 \tag{14}$$

Во многих работах [16, 18] по дескрипторным системам двойственной к системе (11)-(13) называется система

$$H'\dot{z}(t) = A'z(t) + C'v(t), x(+0) = x_0 \tag{15}$$

$$y(t) = B'z(t) \tag{16}$$

В работах L. Dai [16] доказан принцип двойственности в следующей форме.

__*Теорема2.*__ Система (11)-(13) полностью управляема (R- управляема, импульсно управляема) тогда и только тогда, когда система (15), (16) соответственно полностью наблюдаема (R- наблюдаема, импульсно наблюдаема) и наоборот, т.е. если система (11)-(13) обладает соответствующими свойствами наблюдаемости, то система (15), (16) обладает двойственными свойствами управляемости.

Доказательство этой теоремы обычно проводится [16, 18] путем сравнения соответствующих критериев разрешимости. Покажем, что аналогичные теоремы можно доказывать непосредственно, используя методику, предложенную в предыдущем пункте. Проведем это доказательство для одной пары дьойственных понятий управляемости и наблюдаемости дескрипторных систем, например, для полной управляемости и наблюдаемости.

*Определение 5.* Система (11), (12) называется полностью управляемой (С-управляемой), если для любых x_0, $x_1 \in R^n$ существуют момент времени t_1 и достаточно число раз дифференцируемое управление $u(t)$ такие, что соответствующее решение системы $x(t)$ обладает свойством $x(t_1)=x_1$.

*Определение 6.* Система (15), (16) называется полностью наблюдаемой (С-наблюдаемой), если по известному выходу (16) и управлению $v(t)$ можно однозначно восстановить x_0.

__*Теорема 3.*__ Система (11)-(13) полностью управляема тогда и только тогда, когда система (15), (16) полностью наблюдаема.

Доказательство. Перепишем уравнение (11) в виде

$$H\dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t) = 0$$

и умножим это равенство слева на произвольную n- вектор фучкцию $\psi'(t)$. Полученное равенство проинтегрируем в пределах от t_0 до t_1. Имеем

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\big(H\dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t)\big)dt = \psi'(t)Hx(t)\Big|_{t_0}^{t_1} -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}(\psi'(t)H) + \psi'(t)A\right)x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)Bu(t)dt. \tag{17}$$

Введем двойственную систему в виде

$$\frac{d}{dt}(\psi'(t)H) + \psi'(t)A = 0,$$

транспонировав которую, получаем систему типа (15)

$$H'\psi(t) = -A\psi(t). \tag{18}$$

Теперь равенство (17) дает выражение

$$\psi'(t_1)Hx(t_1) - \psi'(t_0)Hx(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)Bu(t)dt. \tag{19}$$

Систему (18) будем рассматривать в обратном времени с конечным условием $\psi(t_1) = \psi_1$. По определению полной управляемости для системы (11), (12) существует управление $u(t)$ и момент времени t_1 такие, что $x(t_1)=0$. Тогда соотношение (19) перепишется в виде

$$\psi'(t_0)Hx(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)Bu(t)dt.$$

Транспонировав последнее равенство, получим существование линейной операции, обеспечивающей нахождение начального положения $x(t_0)$ по выходу $y(t) = B'\psi(t)$, т.е. соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} u'(t)B'(t)\psi(t)dt = x_0'H'\psi(t_0),$$

что эквивалентно требованию полной наблюдаемости системы (18) с выходом $y(t) = B'\psi(t)$. Так как эта система эквивалентна системе (15), (16), то теорема полностью доказана.

Отметим, что предложенная методика доказательства принципа двойственности позволяет по определению управляемости системы вводить двойственные ему определения наблюдаемости и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асмыкович И.К. Линейная обратная связь в дескрипторных системах /Белорусский техн. ин-т, Минск, 1988. / Рукопись деп. в ВИНИТИ 06.07.88. Деп. N 5453-1388.
2. Asmykovich I.K., Marchenko V.M. To the theory of duality for linear nonstationary descriptor systems //Proceedings of Inter. Workshop "Singular solutions and perturbations in control systems (SSPCS-95)".- June 26-30, 1995, Pereslavl-Zalessky, Russia.- p.6-7.
3. Ахундов А.А. Обзор некоторых результатов по теории линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной // Mathematical control theory / Banach Contr. Publ.- Warsaw, 1985. - Vol. 14.- P.7-16.

4. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1980.
5. Кантарович Л.В., Макаров В.Л. Дифференциальные и функциональные уравнения, возникающие в моделях экономической динамики // Сиб. мат. журн. - 1970. N5. - С.1046-1069.
6. Марченко В.М., Асмыкович И.К., Янович В.И. Исследование качественных характеристик управляемых линейных динамических дескрипторных систем // Тез. докл. 3-й Международный семинар "Негладкие и разрывные задачи управления, оптимизации и их приложения".-Санкт-Петербург,ч.1, 1995.- С.86-88.
7. Armentano V.A. The pencil /SE-A/ and controllability-observability for generalized linear systems: a geometric approach //SIAM J. Control and Optimization.-1986.-Vol.24, N4.-P.616-638.
8. Banaszuk A., Kociecki M., Przyluski K.M. On implicit linear discrete time systems.- Warsaw,1987.-16p.-(Preprint/PAN IM; N 397.
9. Banaszuk A., Kociecki M., Przyluski K.M. Remarks on duality between observation and control for implicit linear discrete-time systems // Proc. IFAC Workshop Systems Structure and Control.-1989.-Prague.-P.257-260.
10. Banaszuk A., Kociecki M., Przyluski K.M. Remarks on observability of implicit linear discrete-time systems //Automatica.- 1990, V.26.-N2.- P.421-423.
11. Bernhard P. On singular implicit linear dynamical systems // SIAM J. Control and Optimization.-1982.- Vol.20, N 5.-P.612-633.
12 Campbell S.L. Singular Systems of Differential Equations.II.- London: Pitman Publishing Company, 1982.
13. Campbell S.L.,Terrel W.J. Observability of linear time-varying systems // SIAM J. Matrix Anal. and Appl.- 1991.- V.12, N 3. - P.484-496.
14. Christodoulou M.A., Paraskevopolos P.N. Solvability, controlability and observability of singular systems // JOTA.- 1985. Vol.45, N 1.- P.53-72.
15. Cobb J.D. Controllability, observiability and duality in singular systems //IEEE Trans. Autom. Control.- 1984.- Vol.AC-29, N 12.- P.1076-1082.
16. Dai L. Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and information Sciences, Vol.118.- Berlin, Springer-Verlag,1989.
17. El-Tohami M.,Lovass-Nagy V.,Mukundan R. Design of observers for time-varying discrete-time descriptor systems // Intern. J. Control.- 1987.- Vol.46, N 3.- P.841-949.
18. Lewis F.L. A survey of linear singular systems // J. Circ. Syst. Sign.Proc: Special Issue: Semistate System.- 1986,v.5. - N1.- P.3-36.
19. Mertzios B.G. and Christodoulou M.A., Syrmos B.L., Lewis F.L. Direct controllability and observability time domain conditions for singular systems // IEEE Trans. Aut. Control. 1988.- V.-33, N.7 - P.788-791.

20. Pandolfi L. Some mathematical methods in the theory of linear control systems (Italian).-Bologna:Pitagora Editrice XII,1986. -295p.
21. Verghese G.C., Levy B.C., Kailath T. A generalized state-space for singular systems // IEEE Trans. Aut. Control.- 1981.- Vol. AC-26, N 4.- P.811-831.

УДК 519.624

И.Ф.Соловьева, ст. преп.

О МЕТОДЕ УНИТАРНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ О.Д.У. ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

The method of unitary sweep is proposed for solvinq systems of linear ODE of the seconol order with a small parameter at a hiqher deritative. This method allows to reduce a boundary problem to a set of Cauchy-problems suitable for calculation.

Граничные задачи с малым параметром при старшей производной для линейных систем о.д.у. второго порядка и с возникающими в их решении пограничными либо внутренними переходными слоями представляют собой математические модели с весьма сложным характером поведения решений и градиентов решений.

Рассмотрим систему линейных о.д.у. второго порядка

$$-\varepsilon y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=f(x),\ \ \alpha\le x\le\beta \tag{1}$$

с пограничным слоем и граничными условиями вида

$$A_1 y'(\alpha)+A_2 y(\alpha)=a, \tag{2}$$

$$B_1 y'(\beta)+B_2 y(\beta)=b \tag{3}$$

в предположении, что $A(x)$, $B(x)$ - произвольные квадратные матрицы порядка $(n\times n)$, элементы которых кусочно-непрерывные функции, зависящие от x, $f:[\alpha,\beta]\to G^n$, A_1, A_2, B_1, B_2 известные квадратные матрицы порядка $(n\times n)$ такие, что прямоугольные матрицы (A_1, A_2) и (B_1, B_2) имеют $\mathrm{rang}[A_1, A_2]$=n, $\mathrm{rang}[B_1, B_2]=n$, $\varepsilon>0$- фиксированный малый параметр при старшей производной. Требуется определить функцию $y:[\alpha,\beta]\to C^n$ так, чтобы выполнялись равенства (1-3).

Для численного решения системы о.д.у. второго порядка вида (1) с пограничным слоем и граничными условиями вида (2,3) предлагается модификация метода унитарной прогонки [1]. С помощью метода унитарной прогонки система о.д.у. вида (1-3) приводится к совокупности задач Коши, благоприятных в вычислительном отношении. Известно, что в настоящее