Теорема 2. Уравнение (3) разрешимо относительно $u(t)$ в виде линейной обратной связи вида

$$u(t)=\sum_{j=0}^{\infty}Q_j x(t-jh),$$

где $\|u(t)\| \le M\|x(t)\|$, $t>0$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Марченко, В. М. О построении конструктивных стабилизирующих регуляторов для систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа / В. М. Марченко, А. А. Якименко. // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т.43, № 11. – С. 1480 – 1486.

УДК 62-50

И.К. Асмыкович, доц., к-т физ-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

УПРАВЛЕНИЕ ПО ТИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

В последние годы наблюдается некоторый ренессанс по рассмотрению задач качественной теории управления для обыкновенных линейных систем

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t)=Cx(t) \quad (2)$$

Ранее считалось, что для них все основные вопросы рассмотрены и решены в 70-80 годы двадцатого века. Но выяснилось, что ряд стандартных задач, как-то задача стабилизации линейной системы обратной связью по выходу, задача робастной стабилизации, задача одновременной стабилизации набора систем являются невыпуклыми и NP-сложными. Это означает, что эффективных способов их решения нет и быть не может, если под эффективным понимать такой который приводит к точному решению (если оно существует) с произвольной точностью за «разумное» время [1]. В ведущих научных журналах стали регулярно появляться работы по управляемости, наблюдаемости, стабилизации обыкновенных линейных систем, новых методах их решения и новым задачам. Коллектив под руководством В.Н. Букова предложил новый метод решения матричных уравнений и на его основе рассмотрел многие задачи линейной теории управления, объединив эти результаты в монографии [2]. Эти методы можно использовать в теории дескрипторных систем [3].

Отметив, что множество устойчивых линейных систем невыпукло в пространстве параметров, авторы [1] ввели понятие сверхустойчивых линейных систем, определив это понятие не через собственные числа, а непосредственно через параметры системы, а именно, потребовав для непрерывных систем выполнения для элементов матрицы системы неравенства $\sigma(A) = \min(-a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|) > 0$ а для дискретных систем $\|A\| = \max \sum_{j} |a_{ij}| < 1$. Такие системы, конечно, асимптотически устойчивы по Ляпунову, причем функции Ляпунова для них фиксированы, их решения обладают хорошими свойствами сходимости и для них многие задачи качественной теории управления, такие как синтез статической обратной связи по выходу, одновременная стабилизация, робастная стабилизация, подавление возмущений сводятся к задачам линейного программирования и имеют достаточно хорошее численное решение. Отмечено, что сверхустойчивые системы составляют весьма узкий подкласс устойчивых по Ляпунову систем, а для дискретных систем отмечен парадокс – переход от дискретного уравнения высокого порядка к системе приводит к потере сверхустойчивости. При построении наблюдателей, особенно для линейных динамических систем с различными неопределенностями [3]. Важную роль имеют системы нулевой динамики, т.е. многообразие, задаваемое уравнением $y(t) = Cx(t) = 0$. Для одновходных и одновыходных обыкновенных линейных систем это многообразие удается полностью описать, для многовыходных систем ситуация гораздо сложнее. Укажем некоторые результаты. Рассмотрим стандартную линейную систему (1), (2), которую будем полагать полностью управляемой и наблюдаемой. Под нулевой динамикой системы (1) полагают движение, принадлежащее многообразию $y(t) = Cx(t) = 0$. При описании нулевой динамики выделяют три задачи, т.е. определения уравнений нулевой динамики, спектра и размерности нулевой динамики, Для систем с одним входом и одним выходом, которые называют скалярными системами, получены ответы на все три вопроса.

Определение 1[3]. Относительным порядком скалярной системы (1), (2) называют натуральное число r для которого выполнены соотношения $CB = 0, CAB = 0, \ldots, CA^{r-2}B = 0, \quad CA^{r-1}B \neq 0$ (3)

Для скалярной системы размерность нулевой динамики равна разности между размерностью системы и ее относительным порядком, характеристическим полиномом нулевой динамики является числитель переходной функции системы и спектром множество его корней. Задачу о нахождении уравнений нулевой динамики решают при помощи приведения системы к специальной форме [3] ,

$$x' = A_{11}x' + A_{12}y_1 \quad \dot{y}_1 = y_2 \ , \dot{y}_2 = y_3 \ , \ldots$$
$$\dot{y}_{r-1} = y_r \ , \dot{y}_r = A_{21}x' + A_{22}y' + c'A^{r-1}bu \ , y = y_1 \ , \tag{4}$$

где $x' \in R^{n-r}$ - часть компонент фазового вектора, $y' = (y_1, y_2, ..., y_r)$ - вектор производных выхода y, пара (A_{11}, A_{12}) управляема, характеристический полином матрицы A_{11} равен числителю переходной функции и эта матрица определяет нулевую динамику системы.

Другой способ - используя эквивалентное управление из теории скользящих режимов. Так как нулевая динамика – это движение управляемой системы по многообразию $Cx(t) = 0$, то управление должно поддерживать это тождество. Для нахождения такого управления достаточно решить уравнение

$$CA^r x + CA^{r-1}bu_{экв} = 0 . \tag{5}$$

Полученное управление в виде линейной обратной связи подставляют в исходную систему и совместно с условиями связи получают уравнение нулевой динамики.

Понятие нулевой динамики можно связать с задачей модального управления обратной связью по выходу. Известно, что для полностью управляемой и для полностью наблюдаемой скалярной системы (1), (2) с помощью регулятора $u = qy$ в спектре замкнутой системы можно получить любое наперед заданное число за исключением не более чем $n-1$ недостижимого значения. Оказывается, что для того, чтобы недостижимые значения отсутствовали необходимо и достаточно, чтобы относительный порядок скалярной системы был равен $n-1$, т.е. порядок нулевой динамики был равен 1. В общем случае скалярная система имеет не более, чем $k-1$ недостижимое собственное значение, где k – порядок нулевой динамики.

Для многовходных, многовыходных систем при равенстве числа входов числу выходов характеристический полином нулевой динамики совпадает с определителем матрицы Розенброка.

$$R(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

при этом

$$\beta(s) = \det\ R(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ 0 & C(sI - A)^{-1}B \end{bmatrix} = \alpha(s) \det W(s) \ ,$$

где W(s) – матричная передаточная функция системы. Если при этом $\det CB \neq 0$, то нулевая динамика системы имеет максимальную размерность равную n – m. Тогда невырожденным преобразованием координат система приводится к виду

$$\dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y$$
$$\dot{y} = A_{21}x' + A_{22}y + CBu,$$

где матрица A_{11} определяет нулевую динамику системы.

В качественной теории управления динамическими системами в последние десятилетия большой популярностью пользуются линейные дескрипторные системы [4,5]. Они широко используются при моделировании процессов в электрических цепях, технологических процессов переноса (материала и тепла), задачах демографии. Это происходит тогда, когда наряду с дифференциальными связями встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости, например условия материального или финансового баланса. Для таких систем были изучены различные постановки задач управляемости и наблюдаемости, рассмотрены обобщения основных задач на управление по принципу обратной связи, задача о минимальных полях регулирования.

Пусть объект управления описывается линейной непрерывной дескрипторной системой

$$\begin{aligned} S\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ Sx(0) &= Sx_0, \quad \det S = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

с условием регулярности

$$\det[\lambda S - A] \neq 0 \tag{7}$$

и выходом

$$y(t) = Cx(t). \tag{8}$$

Условие (7) обеспечивает существование и единственность решения (6) при достаточно гладких управляющих функциях $u(t)$. Рассмотрим для этой системы основные задачи о нулевой динамике. Пусть система является скалярной, т.е. $B = b$, $C = c$. Используя приведение регулярного пучка $\lambda S - A$ к канонической форме Вейерштрасса, можно привести систему (6-8) к виду

$$\dot{x}_v(t) = Lx_v(t) + b_1u(t) \tag{9}$$

$$N\dot{x}_w(t) = x_w(t) + b_2u(t) \tag{10}$$

$$y(t) = c_1x_v(t) + c_2x_w(t), \tag{11}$$

который называется первой эквивалентной формой (EF1). При этом решение задачи о нулевой динамике дескрипторной системы для подсистемы (9) сводится к ранее полученным результатам, а для (10) используя формулу решения

$$x_w(t) = -\sum_{j=0}^{\nu-1} N^j B_2 u^j(t) \tag{12}$$

при получении эквивалентного управления получаем дифференциальное уравнение

$$c_1 L x_1(t) + c_1 b u(t) - c_2 N b_2 \dot{u}(t) - b_2 u(t) = 0$$

если индекс нильпотентности равен двум. В общем случае будем иметь линейное дифференциальное уравнение порядка на единицу меньше, чем индекс нильпотентности матрицы N. Подставляя решение этого уравнения в исходную систему, и учитывая уравнения связи мы получим уравнение нулевой динамики

Для многовходных и многовыходных дескрипторных систем удобнее при исследовании нулевой динамики использовать вторую эквивалентную форму и ее модификацию из [4]. т.е.

$$S = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 & 0 \\ A_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ddot{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь также как и для обыкновенных линейных систем неоднозначно определение относительного порядка и имеет место связь между свойствами нулевой динамики и задачами инвариантности и модального управления. Непосредственный расчет регуляторов может проводится методами вложения и канонизации [2].

ЛИТЕРАТУРА

1 Поляк, Б.Т. Трудные задачи линейной теории управления / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5..

2 Буков, В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем /В.Н. Буков. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.

3 Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью /С.К. Коровин, В.В. Фомичев. // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с.

4 Марченко, В.М. О структуре дескрипторных систем / В.М. Марченко. // Труды БГТУ. Сер. Физ.-мат. науки и информатика. 2004.

5 Асмыкович, И.К. Применение метода вложения в теории дескрипторных систем / И.К. Асмыкович.// Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы конференции. – Минск: БГТУ, 2006. - С. 163-164.