$$x(\tau) = x_0 + \int_0^{\tau} x'(t)dt\,. \qquad (3)$$

Подставив в (1) вместо $x(\tau)$ в правую часть тождества,

$$x'(\tau) + q(\tau)[x_0 + \int_0^{\tau} x'(\tau)dt] = \int_0^{\tau} K_1(\tau - t)[x_0 +$$

$$\int_0^{\tau} x'(s)ds]dt + \int_0^{\tau} K_2(\tau - t)x'(t)dt + F(\tau)$$

сделав замену порядка интегрирования в получающемся двойном интеграле, и обозначив $x'(\tau) = y(\tau)$ получим интегральное уравнение:

$$y(\tau) = \int_0^{\tau} R(\tau, s)y(s)ds + \Phi(\tau),$$

где $\Phi(\tau) = -x_0 q(\tau) + F(x) + x_0 \int_0^{\tau} K_1(\tau - t)dt$, а ядро полученного интегрального уравнения Вольтерра имеет вид

$$R(\tau, s) = [-q(\tau) + \int_s^{\tau} K_1(\tau - t)dt + K_2(\tau - s)].$$

Приближенные значения решения $y_j = y(\tau_j)$ в точках $\tau_j = jh$ получаем с помощью алгоритма последовательного повышения порядка точности (изложен для интегральных уравнений Яновичем Л.А. в 1984 году). Подставляя затем найденные приближенные решения в (3) и заменяя в нем интеграл по формуле трапеции, найдем приближенные значения решения исходной задачи Коши. Предложенный метод имеет второй порядок точности относительно шага разбиения h.

УДК 517.97

Студ. П.А. Буракова
Науч. рук. канд. физ.-мат. наук, доц. И.М. Борковская
(Кафедра высшей математики, БГТУ)

КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

При изучении вариационного исчисления имеют дело с такими объектами, как функционалы.Функционалом называется любое правило, по которому заданной функции $y(x)$ из некоторого их множества ставится в соответствие число I. Обозначение функционала: $I(y(x))$. Вариационное исчисление разрабатывает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов.

Из глубокой древности до нас дошли некоторые классические задачи, приводящие к вариационному исчислению. Рассмотрим три из них: задача Дидоны, задача о цепной линии, задача о брахистохроне.

Задача Дидоны. Линией заданной длины охватить максимальную площадь, расположенную под линией и выше оси Ox.

Если правый конец линии неподвижен, то решением задачи является площадь сегмента, а если может скользить вдоль оси Ox, то – полукруг. Эта задача относится к классу изопериметрических.

Задача о цепной линии. Найти форму провисания якорной цепи.

Цепной линией называют кривую, форму которой принимает под действием силы тяжести однородная гибкая нерастяжимая тяжёлая нить с закреплёнными концами.

Для записи уравнения цепной линии в качестве оси ординат выбирают ось симметрии, а ось абсцисс проводят на расстоянии aот вершины цепной линии. Тогда уравнение цепной линии принимает вид:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Это уравнение можно записать, используя гиперболический косинус:

$$y = ach\frac{x}{a}.$$

Таким образом, решением данной задачи является гиперболический косинус, который иногда так и называют: цепная линия.

Задача о брахистохроне. Какой формы нужно сделать желоб, чтобы маленький шарик скатился из начальной точки Ав точку В за кратчайшее время. Решением данной задачи будет кривая, более круто спускающаяся из начальной точки вниз, чем прямая. В отличие от движения по прямой, значительная часть пути тогда будет пройдена с большей скоростью. Такой кривой оказалась циклоида.

Вариационное исчисление – это та область математики, которая представляет интерес для изучения, а также является чрезвычайно актуальной в современном мире.