УДК 519.854:519.873

Смелов В. В., доцент

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ В ПОЛИГРАФИЧЕСКОМ ОБОРУДОВАНИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВЕСОМ

The article is devoted to problems of optimization of reserving component in units with limit of weight and present algorithm of search optimal configuration of unit.

Введение. Современное полиграфическое оборудование представляет собой сложную техническую систему. Стремление уменьшить его стоимость привело к стандартизации и унификации элементов этой системы. Конструктор, разрабатывающий оборудование, стремится прежде всего использовать стандартные компоненты, производимые промышленностью, и лишь в исключительных случаях прибегает к разработке новых элементов.

Одним из методов достижения требуемого уровня надежности устройства является резервирование его элементов. Очевидно, что резервирование приводит к изменению и других характеристик: габаритов, веса, стоимости.

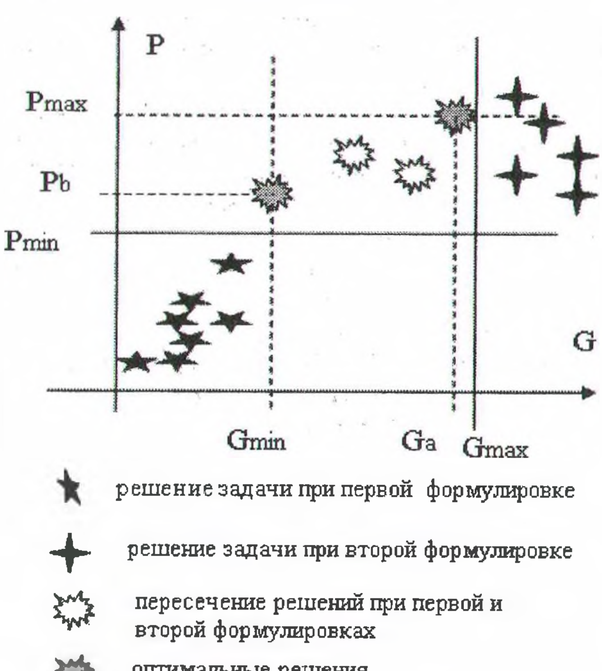

Рисунок. Решение задачи оптимального резервирования: G — вес устройства; P — уровень надежности; G_{max} — максимально допустимый вес устройства; P_{min} — минимально возможный уровень надежности устройства

Заметим, что изменение перечисленных характеристик осуществляется похожим образом: при увеличении числа элементов они растут линейно (или почти линейно). Поэтому в качестве характеристики, «конкурирующей» с надежностью, будем далее рассматривать вес устройства, подразумевая под этим понятием любую характеристику устройства, которая изменяется подобным образом.

Задачу оптимального резервирования (ЗОР) в нашем случае можно сформулировать двояко: 1) максимизация уровня надежности при заданном ограничении веса; 2) минимизация веса при заданном уровне надежности устройства.

На рисунке изображен пример решения ЗОР. Точка $(G_a, P_{\max})$ соответствует оптимальному решению ЗОР при первой формулировке, а точка $(G_{\min}, P_b)$ — оптимальному решению при второй формулировке.

1. Терминология. С используемой ниже терминологией теории вероятностей и теории надежности (выделено *курсивом*) можно ознакомиться в [2–4]. Здесь вводятся только термины, используемые в данной модели.

Устройством будем называть технический объект, характеризующийся двумя показателями: весом и *функцией надежности.*

Функциональным блоком устройства будем называть определенную часть устройства, которая может быть реализована отдельно.

Функциональной структурой устройства будем называть полный набор функциональных блоков, из которых состоит устройство.

Деталями будем называть технические изделия, с помощью которых могут быть изготовлены функциональные блоки.

Конфигурацией устройства будем называть перечень деталей (строго по одной для каждого функционального блока), соответствующий функциональной структуре устройства.

Реализацией функционального блока будем называть техническое изделие, изготовленное из деталей и выполняющее перечень функций, соответствующих данному функциональному блоку.

Каждая реализация функционального блока характеризуется деталями (типом и количеством), из которых изготовлена реализация, своим весом и функцией надежности. *Метод резервирования*, который используется в реализации, определяется функциональным блоком.

Схемой резервирования устройства будем называть вектор, каждая компонента которого равна числу деталей, которое может быть установлено (одна основная, остальные резервные) для определенной конфигурации.

Реализацией устройства будем называть некоторый набор реализаций функциональных блоков (по одной реализации для каждого функционального блока), входящих в функциональную структуру устройства. Кроме того, каждая реализация устройства характеризуется своим весом, *функцией надежности* и может быть определена как совокупность конфигурации и схемы резервирования устройства.

2. Условия применения модели. Перечислим основные условия применения предлагаемой далее математической модели устройства U.

1. Устройство U может быть представлено, как множество S функциональных блоков. *Отказ* одного блока влечет к отказу всего устройства в целом. *Вероятность отказа* каждого из блоков никак не зависит от вероятности отказов других блоков.

2. Одна конкретная реализация функционального блока может быть изготовлена только из деталей одного типа. Причем одна из деталей считается основной, остальные — резервными.

3. В модели рассматривается только *целая кратность резервирования* деталей и только *раздельное резервирование* деталей.

4. Предполагается, что возможная *кратность резервирования* деталей в реализации функционального блока определяется парой: деталь, функциональный блок.

5. *Метод резервирования* в модели определяется типом функционального блока.

6. Предполагается, что дополнительное оборудование, необходимое для организации резервирования (переключатели), не имеет веса, вероятность его отказа равна нулю и скорость переключения достаточно высокая, чтобы не учитывать время переключения.

7. Сравнение *функций надежности* осуществляется при $t = \overline{T}$. Реализация устройства считается более надежной по сравнению с другой реализацией, если значение ее функции надежности при $t = \overline{T}$ больше.

3. Обозначения и построения, используемые в математической модели ЗОР. В дальнейшем будет использована символика и терминология теории множеств, с которыми можно ознакомиться в [1].

U — наименование устройства.

$P_{\min}$ — минимально допустимое значение надежности U.

$G_{\max}$ — максимально допустимый вес U.

$\overline{T}$ — момент времени, используемый для сравнения функций надежности реализаций функциональных блоков и реализаций устройств.

$S = \{s_1, s_2, ..., s_{n_S}\}$ — множество функциональных блоков U — функциональная структура устройства.

$W = \{w_1, w_2, ..., w_{n_W}\}$ — множество деталей.

$G = \{g_1, g_2, ..., g_{n_G}\}$ — множество значений веса деталей.

$P = \{p_1(t,\boldsymbol{\theta}), p_2(t,\boldsymbol{\theta}), ..., p_{n_P}(t,\boldsymbol{\theta})\}$ — множество функций, характеризующих надежность деталей.

$V = \{1,2,...n_V\}$ — допустимые кратности установки деталей. Если кратность установки детали v, то $v-1$ — кратность резервирования.

$S_i, i = \overline{1,m}$ — попарно непересекающиеся подмножества множества S, такие, что $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$.

S_i — подмножество функциональных блоков, допускающих i-тый метод резервирования.

$D = \{d_1, d_2, ..., d_{n_D}\}$ — трехместное отношение (множество кортежей $d_i, i = \overline{1,n_D}$), построенное на декартовом произведении множеств $W \times G \times P$ (т.е. $D \subset W \times G \times P$) с помощью предиката: $D = \{\langle w, g, p(t,\boldsymbol{\theta})\rangle | \mathbf{\Pi}_D(w, g, p(t,\boldsymbol{\theta}))\}$. Предикат $\mathbf{\Pi}_D(w, g, p(t))$ принимает значение «истина», если деталь $w \in W$ имеет вес $g \in G$ и функцию надежности $p(t,\boldsymbol{\theta}) \in P$.

$R = \{r_1, r_2, ..., r_{n_r}\}$ — бинарное отношение (множество кортежей $r_i, i = \overline{1,n_r}$), построенное на декартовом произведении $S \times W$ (т.е. $R \subset S \times W$) с помощью предиката $\mathbf{\Pi}_R(s,w): R = \{\langle s, w\rangle | \mathbf{\Pi}_R(s,w)\}$, где $\mathbf{\Pi}_R(s,w)$ — предикат, принимающий значение «истина», если для реализации функционального блока $s \in S$ можно использовать деталь $w \in W$. Множество R описывает функциональное назначение $s \in S$ деталей $w \in W$ в устройстве U.

$Q = \{q_1, q_2, ..., q_{n_Q}\}$ — трехместное отношение (множество кортежей $q_i, i = \overline{1,n_Q}$), построенное на декартовом произведении $S \times W \times V$ (т.е. $Q \subset S \times W \times V$) с помощью предиката $\mathbf{\Pi}_Q(s,w,v)$: $Q = \{\langle s, w, v\rangle | \mathbf{\Pi}_Q(s,w,v)\}$, где

$\Pi_Q(s,w,v)$ — предикат, принимающий значение «истина», если: 1) пара значений $\langle s,w\rangle \in R$; 2) для реализации функционального блока $s \in S$ с помощью детали $w \in W$ можно использовать резервирование кратности $v-1$, где $v \in V$. Множество Q соответствует множеству всех реализаций всех функциональных блоков.

$H = \{h_1, h_2, ..., h_{n_H}\}$ — пятиместное отношение (множество кортежей $h_i, i=\overline{1,n_H}$, построенное, как композиция отношений $D \otimes Q$. Под композицией отношений $D \otimes Q$ здесь подразумевается пятиместное отношение с кортежами вида $\langle s,w,g,p(t,\theta),v\rangle$, которое получено из отношений Q и D следующим способом: 1) фиксируем некоторый элемент $q=\langle s,w,v\rangle$ множества Q; 2) выбираем из множества D только те элементы $d=\langle w,g,p(t,\theta)\rangle$, у которых значение атрибута w совпадает со значением одноименного атрибута w фиксированного элемента $q=\langle s,w,v\rangle$; пусть D_1 — полученное множество элементов; пусть число выбранных таким образом элементов будет равно κ_1, т.е. $D_1 \subset D$ и $|D_1| = \kappa_1$; 3) построим новое множество $(D \otimes Q)_1$, состоящее из κ_1 кортежей вида $\langle s,w,g,p(t,\theta),v\rangle$, в которых значения атрибутов s и v совпадают со значениями одноименных атрибутов фиксированного элемента $q \in Q$, значения атрибутов $g, p(t,\theta)$ — со значениями одноименных атрибутов D_1, а значение атрибута w совпадает с значением одноименного атрибута из фиксированного $q \in Q$ и значением атрибута w элементов множества D_1; 4) повторим операции 1,2,3 для всех n_Q элементов множества Q; таким образом, каждому элементу $q_i \in Q$ будет соответствовать множество $(D \otimes Q)_i$; 5) множество $(D \otimes Q) = \bigcup_{i=1}^{n_Q} (D \otimes Q)_i$, число элементов этого множества $|(D \otimes Q)| = \sum_{i=1}^{n_Q} \kappa_i$.

Полученное в результате композиции множество $H = \{h_i = \langle s,w,g,p(t,\theta),v\rangle \mid h_i \in (D \otimes Q\}$ представляет собой пятиместное отношение. Множество (отношение) H обладает следующими свойствами: а) каждый элемент $h_i = \langle s,w,g,p(t,\theta),v\rangle$ множества H соответствует одной из возможных реализаций функционального блока s, в которой используется деталь w веса g и функцией надежности $p(t,\theta)$, причем используется $v-1$ кратное резервирование детали w; б) множество H описывает все возможные реализации всех функциональных блоков устройства U; в) значение θ может быть определено для каждого элемента $h_i = \langle s,w,g,p(t,\theta),v\rangle$: для этого необходимо определить то подмножество $S_i \subset S$, к которому принадлежит значение атрибута s элемента h_i.

4. Математический аппарат расчета надежности устройства. Способ расчета надежности каждого функционального блока $\overline{p}(t)$ выбирается в зависимости от метода резервирования, применяемого в данном блоке. Надежность всего устройства может быть вычислена по формуле: $\overline{P}(t) = \prod_{i=1}^{n_S} \overline{p}_i(t)$, где n_S — число функциональных блоков устройства U. Более подробно ознакомиться с методами вычисления надежности при использовании различных методов резервирования можно в [4].

5. Математическая постановка задачи оптимального резервирования. Как уже было сформулировано выше, задача оптимального резервирования имеет двойственный характер.

5.1. Максимизация уровня надежности устройства при заданном ограничении веса. Исходными данными для задачи являются: $G_{\max}$ — максимально допустимый вес устройства U; $\overline{T}$ — момент времени, используемый для сравнения функций надежности; $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n_s})$ — вектор, описывающий функциональную структуру устройства, где $\xi_i \in S$; компонента ξ_i вектора $\bar{\xi}$ соответствует i-тому функциональному блоку в функциональной структуре устройства; множества $S_i, i=\overline{1,m}$; $H = \{h_1, h_2, ..., h_{n_H}\}$ — множество (пятиместное отношение $\langle s,w,g,p(t,\theta),v\rangle$), описывающее все возможные реализации функциональных блоков устройства.

Решение задачи сводится к нахождению: $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n_S})$ — вектора, описывающего конфигурацию устройства U (компонента $\omega_i \in W$ соответствует детали, реализующей функциональный блок ξ_i, заданной структуры $\bar{\xi}$); $\bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_{n_s})$ — вектора, описывающего схему резервирования в устройстве U

(компонента $\mathbf{v}_i \in V$ — число деталей типа ω_i конфигурации $\vec{\omega}$, используемые для реализации функционального блока ξ_i, заданной структуры $\vec{\xi}$); $G_{\vec{\omega},\vec{v}}$ — веса устройства U, с конфигурацией $\vec{\omega}$ и схемой резервирования $\vec{v}$; $P_{\vec{\omega},\vec{v}}(\overline{T})$ — значение функции надежности устройства U, с конфигурацией $\vec{\omega}$ и схемой резервирования $\vec{v}$ в момент времени $\overline{T}$.

Решение задачи будет считаться оптимальным, если: 1) $G_{\vec{\omega},\vec{v}} \le G_{\max}$ — вес устройства не превышает допустимого; 2) $P_{\vec{\omega},\vec{v}}(\overline{T}) \ge P_{\vec{x},\vec{y}}(\overline{T})$ — значение функции надежности для конфигурации $\vec{\omega}$ и схемы резервирования $\vec{v}$ при $t = \overline{T}$ имеет значение большее, чем для любой другой допустимой пары конфигурации $\vec{x}$ и схемы резервирования $\vec{y}$.

Будем допускать наличие нескольких оптимальных решений.

Обозначим устройство U, имеющее структуру $\vec{\xi}$, символом $U_{\vec{\xi}}$. Каждой допустимой реализации устройства $U_{\vec{\xi}}$ соответствуют два вектора: $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n_S})$ и $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_{n_S})$.

Пусть $\vec{G}(\vec{\omega})$ — векторная функция, определенная на множестве векторов $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n_S})$, и пусть ее областью значений является множество векторов $\vec{g} = (g_1, g_2, ..., g_{n_S})$, где компонента g_i является весом детали ω_i. Функция $\vec{G}(\vec{\omega})$ может быть определена следующим образом: $\vec{G}(\vec{\omega}) = (\varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2), ..., \varphi(\omega_{n_S}))^T$, где $\varphi(\omega)$ — функция, определенная на множестве D и с областью значений из множества G. Функция ставит в соответствие каждому значению ω (детали) значение g (вес детали). Вес g всего устройства $U_{\vec{\xi}}$ может быть выражен через скалярное произведение $g = (\vec{G}(\vec{\omega}), \vec{v})$.

Пусть $\vec{P}(\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v})$ — векторная функция, определенная на множестве допустимых векторов $\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v}$ и имеющая область значений множество векторов вида $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_{n_S})$, где компонента $p_i \in [0,1]$ — вероятность того, что в момент времени $\overline{T}$ реализация блока ξ_i осталась работоспособной. Функция $\vec{P}(\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v})$ может быть представлена следующим образом:

$$\vec{P}(\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v}) = (\psi(\xi_1, \omega_1, v_1), ..., \psi(\xi_{n_S}, \omega_{n_S}, v_{n_S}))^T,$$

где функция $\psi(\xi_i, \omega_i, v_i)$ совпадает с функцией надежности $p_i(\overline{T}) = f(p(\overline{T}, \theta_i), v_i)$ для функционального блока ξ_i, реализованного v_i деталями типа ω_i. При этом параметр $\theta_i = k, \xi_i \in S_k, k = \overline{1,m}$ определяет метод резервирования.

Значение функции надежности в момент времени $\overline{T}$ для реализации $U_{\vec{\xi}}$ равно $P_{\vec{\omega},\vec{v}}(\overline{T}) = \prod_{i=1}^{n_S} p_i$, где p_i компоненты вектора $\vec{P}(\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v}) = (p_1, p_2, ..., p_{n_S})$. Отметим, что функции $\ln P_{\vec{\omega},\vec{v}}(\overline{T}) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n_S} p_i\right) = \sum_{i=1}^{n_S} \ln p_i$ и $P_{\vec{\omega},\vec{v}}(\overline{T})$ достигают своего максимума при одинаковых значениях $\vec{\omega}, \vec{v}$ и $\ln P_{\vec{\omega},\vec{v}}(\overline{T}) = (\ln \vec{P}(\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v}), \vec{1})$, где $(\ln \vec{P}(\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v}), \vec{1})$ — скалярное произведение вектора $\ln \vec{P}(\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v}) = (\ln p_1, \ln p_2, ..., \ln p_{n_S})$ на единичный вектор $\vec{1} = (1,1,...,1)$. Тогда максимизация уровня надежности устройства U с функциональной структурой $\vec{\xi}$ и ограничением веса $G_{\max}$ формулируется как задача максимизации функции $(\ln \vec{P}(\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v}), \vec{1})$ при $(\vec{G}(\vec{\omega}), \vec{v}) \le G_{\max}$ с неизвестными $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$.

5.2. Минимизация веса устройства при заданном уровне надежности. Постановка задачи во многом схожа с описанной выше. Отличие возникает только в формулировке оптимального решения: задача минимизации веса устройства при заданном уровне надежности — это задача минимизации функции $(\vec{G}(\vec{\omega}), \vec{v})$ при $(\ln \vec{P}(\vec{\xi}, \vec{\omega}, \vec{v}), \vec{1}) \ge P\min$ с неизвестными $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$.

6. Алгоритм поиска оптимального решения ЗОР. Сведем поиск оптимального решения ЗОР к поиску кратчайшего пути в ориентированном дереве.

Считаем известными $G_{\max}$, $\overline{T}$, $\vec{\xi}$ и построено множество H. Рассмотрим взвешенный ориентированный граф $U = (h_0 \cup H \cup h_{n_H+1}, E)$,

где $H = \{h_1, h_2, ..., h_{n_H}\}$ — множество вершин (отношение $\langle s, w, g, p(t,\theta), v \rangle$), описывающее все возможные реализации функциональных блоков устройства U; h_0 и h_{n_H+1} — дополнительные вершины, которые далее будем называть начальной и конечной вершинами, E — множество дуг. Опишем построение множества E. При этом для обозначения значения атрибута элемента h_i будем использовать наименование этого атрибута с тем же индексом. Например, s_3 — функциональный блок, реализация которого $h_3 \in H$, или g_2 — вес детали w_2, используемой в реализации $h_2 \in H$ функционального блока s_2. Элементами e_{ij} множества E являются такие упорядоченные пары $e_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle$, $i = \overline{0, n_H}$, $j = \overline{1, n_H + 1}$, $i \neq j$, что 1) если $i = 0$ и $j \le n_H$, то s_j совпадает с первой компонентой ξ_1 вектора $\bar{\xi}$; 2) если $0 < i$ и $j \le n_H$, то вектор $\bar{\xi}$ содержит компоненты $\xi_k = s_i$ и $\xi_{k+1} = s_j$, $k = \overline{1, n_S}$ (совпадение обозначается знаком равенства); 3) если $j = n_H + 1$, то выполняется условие $s_i = \xi_{n_S}$.

Введем функцию $\boldsymbol{\mu}_{ij} = \boldsymbol{\mu}(e_{ij})$ над элементами множества E.

Для всех ребер $e_{ij} \in E$ определим $\mu_{ij} = \mu(e_{ij}) = \begin{cases} \langle 0,0 \rangle, j = n_H + 1 \\ \langle \ln \bar{p}_j(\bar{T}), g_j v_j \rangle, j \neq n_H + 1 \end{cases}$ — длину.

Введем операцию сложения длин ребер, а также отношения эквивалентности и линейного порядка на множестве E. Пусть $\boldsymbol{\mu}_{ij} = \langle x_{ij}, y_{ij} \rangle$ и $\boldsymbol{\mu}_{mn} = \langle x_{mn}, y_{mn} \rangle$, тогда сумма $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ и $\boldsymbol{\mu}_{mn}$: $\boldsymbol{\mu}_{ij} + \boldsymbol{\mu}_{mn} = \langle x_{ij} + x_{mn}, y_{ij} + y_{mn} \rangle$. Кроме того, будем записывать $\boldsymbol{\mu}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_{mn}$, если $x_{ij} = x_{mn}$, $y_{ij} = y_{mn}$, и будем записывать $\boldsymbol{\mu}_{ij} < \boldsymbol{\mu}_{mn}$ (и говорить, что ребро e_{ij} короче ребра e_{mn}), если $x_{ij} > x_{mn}$ или $x_{ij} = x_{mn}$ и $y_{ij} < y_{mn}$. Пусть $h_0, h_{k_1}, h_{k_2}, ..., h_{k_{|S|}}, h_{n_H+1}$ — кратчайший маршрут из вершины h_0 в вершину h_{n_H+1}, тогда $\bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_{0k_1} + \boldsymbol{\mu}_{k_1 k_2} + ... + \boldsymbol{\mu}_{k_{|S|-1}, k_{|S|}} = \langle \bar{l}, \bar{g} \rangle$ — длина этого маршрута. Если этот маршрут единственен и при этом $\bar{g} \le G_{\max}$, то устройство $\bar{U} = \langle h_{k_1}, h_{k_2}, ..., h_{k_{|S|}} \rangle$ будет иметь максимальное значение функции надежности в момент времени $\bar{T}$ для всех устройств с весом $\bar{g} \le G_{\max}$. Искомые $\bar{\boldsymbol{\omega}} = (w_{k_1}, w_{k_2}, ..., w_{k_{|S|}})$ — конфигурация и $\bar{\mathbf{v}} = (v_{k_1}, v_{k_2}, ..., v_{k_{|S|}})$ — схема резервирования этого устройства — могут быть получены из найденной реализации устройства $\bar{U} = \langle h_{k_1}, h_{k_2}, ..., h_{k_{|S|}} \rangle$. Если же $\bar{g} > G_{\max}$, то задача не имеет решения.

Для решения задачи минимизации веса устройства при заданном уровне надежности $P_{\min}$ следует переопределить отношение порядка на множестве ребер E следующим образом: если $\boldsymbol{\mu}_{ij} = \langle x_{ij}, y_{ij} \rangle$ и $\boldsymbol{\mu}_{mn} = \langle x_{mn}, y_{mn} \rangle$ длины ребер e_{ij} и e_{mn}, то $\boldsymbol{\mu}_{ij} < \boldsymbol{\mu}_{mn}$ в том случае, если $y_{ij} < y_{mn}$ или $y_{ij} = y_{mn}$ и $x_{ij} > x_{mn}$. Проверкой на допустимость полученного решения будет выполнение условия $e^{\bar{l}} \le P_{\min}$.

При поиске кратчайших маршрутов может оказаться, что кратчайших маршрутов несколько. Это соответствует случаю, когда ЗОР имеет несколько решений.

Алгоритмы поиска кратчайшего пути в графах широко представлены в литературе, например в [5], поэтому здесь не рассматриваются.

Литература

1. Столл Роберт Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1968. — 231 с.
2. Жиробок А. Н. Основные понятия теории надежности // Соросовский Образовательный Журнал. — 2001. — Т. 7, № 8.
3. Андронов А. М., Копытов Е. А., Гринглаз Л. Я. Теория вероятностей и математическая статистика. — СПб.: Питер, 2004. — 461с.
4. Надежность технических систем: Справочник / Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Радио и связь, 1985. — 608 с.
5. Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1968. — 352с.