

Борискевич А. А., доцент, БГУИР; Ероховец В. К., вед. науч. сотрудник,
Ткаченко В. В., зав. лабораторией, ОИПИ НАН Беларуси

МОДЕЛЬ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА УСЕЧЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА

The generalized formula to estimate the amplitude spectrum and integral energy distribution in the plane of spatial frequencies for truncate periodic signal is received. The formula in special case comes to wellknown Kharkevich function record for solitary pulse signal.

Известно, что пространственные частоты транспаранта с тексто-графической информацией определяют протяженность пространственного Фурье-спектра и, как следствие этого, размер голограммы [1].

Уменьшение размера голограммы с целью повышения плотности записи приводит к ограничению спектра пространственных частот и к ухудшению качества воспроизводимых изображений.

В связи с этим необходимо разработать методику оценки высших пространственных частот v_{max} транспаранта, удовлетворительно передаваемых голограммой.

Существующие способы определения v_{max} , например метод замещения реального пространственного сигнала двумерной дифракционной решеткой [2, 3], не в полной мере соответствуют практическим случаям регистрации документальных страниц информации, сочетающих как периодическую, так и аperiodическую последовательности пространственных сигналов.

К другим особенностям изображений тексто-графических документов можно отнести то, что они в каждом конкретном случае являются комбинацией суперпозицией множества прямоугольных сигналов единичной амплитуды и характеризуются шириной, длиной, пространственным положением и направленностью.

В настоящей работе предложена модель для спектрального анализа усеченно-периодической последовательности сигнала.

Целесообразность спектрального анализа «мелких» элементарных сигналов определяется периодичностью структуры текстового и табличного документов, штриховки в машиностроительном чертеже, могут быть полезны для анализа двумерных фрактальных структур при голографической защите и идентификации объектов.

Используя энергетический критерий А. Харкевича, в соответствии с которым под полосой частот будем подразумевать пространственный промежуток, содержащий подавляющую

часть энергии сигнала, для гест-импульса с шириной τ и комплексным спектром

$$S_1(\omega) = \tau \frac{\sin 0,5\omega\tau}{0,5\omega\tau}, \quad (1)$$

можно определить максимальную угловую пространственную частоту из уравнения [4]

$$\frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(\Delta\omega\tau) - \frac{\sin^2(0,5\Delta\omega\tau)}{0,5\Delta\omega\tau} \right] = \eta_0, \quad (2)$$

где $\text{Si}(\Delta\omega\tau) = \int_0^{\Delta\omega\tau} \frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} d\omega$, а η_0 — постоянная

доля полной энергии сигнала, приходящаяся на частотный интервал $\Delta\omega = 2\pi v_{max}$.

С учетом линейности рассматриваемых когерентно-оптических систем для группы из N элементарных сигналов, отстоящих друг от друга на интервал T , комплексный пространственный спектр можно представить через спектр одиночного сигнала $S_1(\omega)$ как

$$S(\omega) = S_1(\omega) \left[1 + \sum_{m=2}^{N-1} \exp(-jm\omega T) \right],$$

а амплитудный в виде

$$N = 2: \quad |S(\omega)| = |S_1(\omega)| \sqrt{2 + 2\cos\omega T};$$

$$N = 3: \quad |S(\omega)| = |S_1(\omega)| \sqrt{3 + 4\cos\omega T + 2\cos^2\omega T};$$

$$N = 4: \quad |S(\omega)| = |S_1(\omega)| \sqrt{4 + 6\cos\omega T + 4\cos^2\omega T + 2\cos^3\omega T};$$

$$N = 5: \quad |S(\omega)| = |S_1(\omega)| \times \sqrt{5 + 8\cos\omega T + 6\cos^2\omega T + 4\cos^3\omega T + 2\cos^4\omega T};$$

$$|S(\omega)| = |S_1(\omega)| \sqrt{N + \sum_{m=2}^{N-1} 2(N-m)\cos m\omega T}. \quad (3)$$

В соответствии с выражением (3) составим уравнение для определения $\Delta\omega$ по заданному коэффициенту использования энергии сигнала:

$$\int_0^{\Delta\omega} |S(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\Delta\omega} \left[|S_1(\omega)| \sqrt{N + \sum_{m=2}^{N-1} 2(N-m) \cos m\omega T} \right]^2 d\omega,$$

которое с учетом (1) можно переписать в виде

$$\int_0^{\Delta\omega} |S(\omega)|^2 d\omega = N\tau^2 \int_0^{\Delta\omega} \frac{\sin^2(0,5\omega\tau)}{(0,5\omega\tau)^2} d\omega + 2\tau^2 \sum_{m=2}^{N-1} (N-m) \int_0^{\Delta\omega} \frac{\sin^2(0,5\omega\tau)}{(0,5\omega\tau)^2} \cos m\omega T d\omega. \quad (4)$$

Принимая во внимание (2), первое слагаемое в выражении (4) можно переписать так:

$$N\tau^2 \int_0^{\Delta\omega} \frac{\sin^2(0,5\omega\tau)}{(0,5\omega\tau)^2} d\omega = 2N\tau \left[\text{Si}(\Delta\omega\tau) - \frac{\sin^2(0,5\Delta\omega\tau)}{0,5\Delta\omega\tau} \right], \quad (5)$$

а второе слагаемое после простых тригонометрических преобразований и замены переменных в интегральных выражениях представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2\tau^2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \int_0^{\Delta\omega} \frac{\sin^2(0,5\omega\tau)}{(0,5\omega\tau)^2} \cos m\omega T d\omega &= \\ = 4 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \int_0^{\Delta\omega} \frac{\cos m\omega T}{\omega^2} d\omega - \\ - 4 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \int_0^{\Delta\omega} \frac{\cos \omega T \cos m\omega T}{\omega^2} d\omega &= \\ = 4T \sum_{m=1}^{N-1} m(m-N) \left[\text{Si}(\Delta\omega mT) + \frac{\cos(\Delta\omega mT)}{\Delta\omega mT} \right] + \\ + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (mT-\tau)(N-m) \text{Si}[\Delta\omega(mT-\tau)] + \\ + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (mT-\tau)(N-m) \frac{\cos[\Delta\omega(mT-\tau)]}{\Delta\omega(mT-\tau)} + \\ + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (mT+\tau)(N-m) \text{Si}[\Delta\omega(mT+\tau)] + \\ + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (mT+\tau)(N-m) \frac{\cos[\Delta\omega(mT+\tau)]}{\Delta\omega(mT+\tau)}. \quad (6) \end{aligned}$$

Объединяя правые части выражений (5) и (6), получим:

$$\begin{aligned} \Delta\omega \int_0^{\Delta\omega} |S(\omega)|^2 d\omega &= 2N\tau \left[\text{Si}(\Delta\omega\tau) - \frac{\sin^2(0,5\Delta\omega\tau)}{0,5\Delta\omega\tau} \right] - \\ - 4T \sum_{m=1}^{N-1} m(N-m) \left[\text{Si}(\Delta\omega mT) + \frac{\cos(\Delta\omega mT)}{\Delta\omega mT} \right] + \\ + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (mT-\tau)(N-m) \text{Si}[\Delta\omega(mT-\tau)] + \\ + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (mT-\tau)(N-m) \frac{\cos[\Delta\omega(mT-\tau)]}{\Delta\omega(mT-\tau)} + \\ + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (mT+\tau)(N-m) \text{Si}[\Delta\omega(mT+\tau)] + \\ + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (mT+\tau)(N-m) \frac{\cos[\Delta\omega(mT+\tau)]}{\Delta\omega(mT+\tau)}. \quad (7) \end{aligned}$$

Используя соотношение Рейли [5],

$$\begin{aligned} \Delta\omega \int_0^{\Delta\omega} |S(\omega)|^2 d\omega &= \eta_3 \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \\ = \eta_3 \pi \int_{-\infty}^{\infty} s^2_{\text{ВХ}}(x) dx \end{aligned}$$

определяя

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s^2_{\text{ВХ}}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \{s(x) + s(x-T) + \dots + \\ + s(x-mT) + \dots + s[x - (N-1)T]\}^2 dx &= \\ = \int_0^{\tau} s^2(x) dx + \int_T^{T+\tau} s^2(x-T) dx + \dots \\ + \int_{mT}^{mT+\tau} s^2(x-mT) dx + \dots \\ + \int_{(N-1)T}^{(N-1)T+\tau} s^2[x - (N-1)T] dx &= N\tau, \end{aligned}$$

с учетом выражения (7) получим следующее уравнение (8).

Это уравнение для оценки высших пространственных частот является общим для усеченно-периодического сигнала как с любым числом N элементарных импульсов, так и с $N=1$, когда выражение (8) сводится к известной записи А. А. Харкевича этой функции для одиночного сигнала.

$$\eta_3 = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(\Delta\omega\tau) - \frac{\sin^2(0,5\Delta\omega\tau)}{0,5\Delta\omega\tau} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4T}{N\pi} \sum_{m=1}^{N-1} m(N-m) \left[\text{Si}(\Delta\omega mT) + \frac{\cos(\Delta\omega mT)}{\Delta\omega mT} \right] + \\
& + \frac{2}{N\pi} \sum_{m=1}^{N-1} (mT - \tau)(N-m) \text{Si}[\Delta\omega(mT - \tau)] + \\
& + \frac{2}{N\pi} \sum_{m=1}^{N-1} (mT - \tau)(N-m) \frac{\cos[\Delta\omega(mT - \tau)]}{\Delta\omega(mT - \tau)} + \\
& + \frac{2}{N\pi} \sum_{m=1}^{N-1} (mT + \tau)(N-m) \text{Si}[\Delta\omega(mT + \tau)] + \\
& + \frac{2}{N\pi} \sum_{m=1}^{N-1} (mT + \tau)(N-m) \frac{\cos[\Delta\omega(mT + \tau)]}{\Delta\omega(mT + \tau)}. \quad (8)
\end{aligned}$$

При увеличении числа импульсов N в усеченно-периодическом сигнале его амплитудный спектр из непрерывного (для случая одиночного сигнала) превращается в расщепленный и график $\eta_s(\Delta\omega)$ приобретает ярко выраженный ступенчатый характер (рис. 1, кривые 1–3) с хорошей сходимостью в области $\eta_s \approx 0,9$ с графиками для случая $N = 1$ (кривые 4 и 5).

Как показывают результаты численного моделирования, для периодической штриховки машиностроительных чертежей с параметрами $T = 1,5/2,5$ мм и $\tau_{\min} = 0,2$ мм по ГОСТ 2303-68 $\eta_s = 0,9$ при $\Delta\omega = 2\pi\nu_{\max} = 25,5$ вплоть до $N = 200$. Эта величина N значительно превышает практическое число линий в локальных областях штриховки на конструкторских чертежах.

Учитывая реальное распределение контурных линий по ширине на практических конструкторских документах [5], в соответствии с которым среднестатистическая ширина тонких линий составляет величину $\tau \geq 0,3$ мм, можно сделать вывод, что требования к пропускной способности

голограмм значительно снижаются в случае, когда $\eta_s = 0,9$, при $\Delta\omega = 17,0$ (рис. 1, кривые 1 и 4).

Изображения реальных тексто-графических документов или защитных элементов голограмм представляют собой случайные распределения двумерных прямоугольных импульсов в ограниченном пространстве.

Спектральное преобразование нельзя применить непосредственно к такому сигналу, поскольку он в информационном массиве документов не детерминирован, хотя для любой из его реализаций в пределах однократной голографической записи можно найти Фурье-образ, отличный от любой другой реализации. Поэтому для оценки $\Delta\omega$ воспользуемся известным в радиотехнике [4] понятием энергетической спектральной плотности, а также взаимосвязью между энергетическим спектром $W(\omega)$ и спектральной плотностью одиночного сигнала с точностью до постоянного коэффициента

$$\overline{W}(\omega) = S_1^2(\omega) = \tau^2 \frac{\sin^2(0,5\omega\tau)}{(0,5\omega\tau)^2}. \quad (9)$$

Поскольку регистрирующая среда является квадратичным детектором, подобие записей (1) и (9) свидетельствует об одинаковом значении ν_{\max} , необходимом для передачи наименьшей по ширине одиночной линии в представленных моделях документа.

Известное выражение для оценки размера голограммы [1] при этом сводится к виду

$$d_n = \frac{2\lambda f k_s}{\tau_{\min}},$$

где λ — длина волны света, используемого при голографической микрозаписи; f — фокусное расстояние объектива Фурье-преобразования;

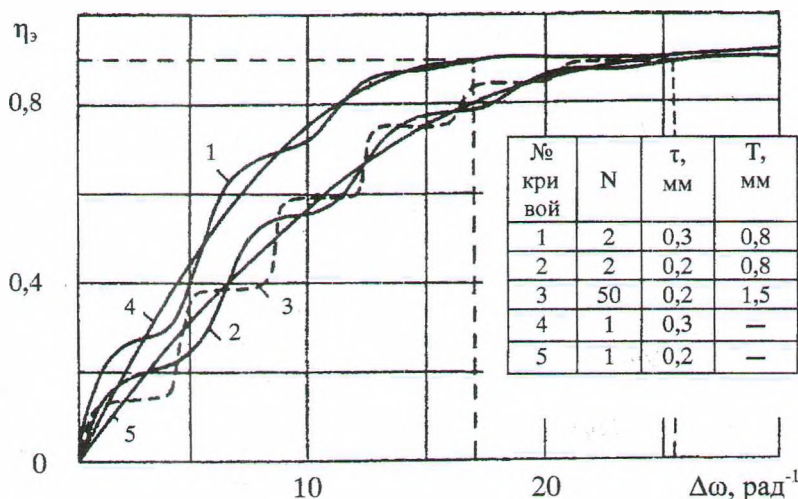


Рис. 1. Интегральное распределение энергии усеченно-периодического сигнала по пространственным частотам

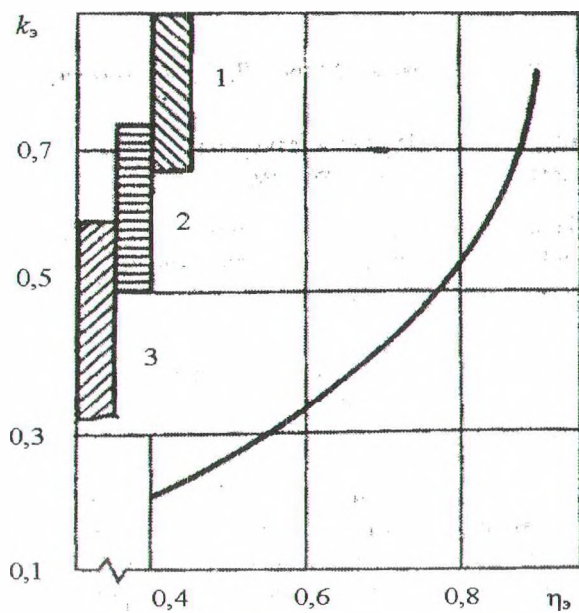


Рис. 2. График функций $k_3 = f(\eta_3)$, совмещенный со шкалой читаемости

$k_3 = \Delta\omega\tau_{\min}/2\pi$ — энергетический коэффициент, определяющий полосу пространственных частот для передачи η_3 -й доли энергии сигнала. Например, при $\eta_3 = 0,8$ получаем $\Delta\omega\tau_{\min} = 3,4$ и $k_3 = 0,54$.

Для оперативного расчета d_n на рис. 2 представлен график зависимости $k_3 = f(\eta_3)$, построенный согласно выражению (8) при $N = 1$. С практической точки зрения граничное значение η_3 целесообразно находить по физической читаемости всех информационных элементов, под которой понимается правильное восприятие каждого элемента вне его логиче-

ской (для текстов и геометрических образов) связи с остальными элементами изображений по убыванию качества восприятия с уменьшением η_3 при субъективной оценке по категориям «хорошая» (1), «удовлетворительная» (2) и «плохая» (3), шкала которых совмещена с графиком на рис. 2. Можно видеть, что область сходимости функций (2) и (8) является граничным значением η_3 , где читаемость практически любого текст-графического документа оказывается хорошей для визуального восприятия человеком-оператором.

Поэтому, если априори известен среднестатистический параметр τ_{\min} массива документальных данных и значение $k_3 = 0,8$ по плотности записи удовлетворяет исходному заданию, целесообразно, чтобы $\eta_3 > 0,9$.

Литература

1. Микаэлян, А. Л. Оптические методы в информатике: запись, обработка и передача информации / А. Л. Микаэлян. — М.: Наука, 1990.
2. Проблемы создания средств хранения, поиска и воспроизведения больших массивов документальной и растровой фотографии / Л. И. Бродолин [и др.] // НТИ. Сер. 1. — 1975. — № 9.
3. Голографическая миниатюризация научно-технических документов / Л. Н. Вагин [и др.] // Оптика и спектроскопия. — 1975. — Т. 38, № 5.
4. Харкевич, А. А. Спектры и анализ / А. А. Харкевич. — М.: Физматгиз, 1962.
5. Ярмош, Н. А. Информационное обеспечение процессов проектирования. / Н. А. Ярмош. — Минск: Наука и техника, 1975.