ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

НЕРЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Целью данной работы является описание трехмерных нередуктивных однородных пространств, не допускающих эквиаффинных связностей, рассмотрение случая неразрешимой группы Ли преобразований. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, редуктивное пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная (локально эквиаффинная) связность. Исследования основаны на применении свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят преимущественно локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является использование чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: эквиаффинная связность, однородное пространство, тензор Риччи, редуктивное пространство, тензор кручения.

Для цитирования: Можей Н. П. Нередуктивные однородные пространства неразрешимых групп Ли, не допускающие эквиаффинных связностей // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 1 (278). С. 5–10.
DOI: 10.52065/2520-6141-2024-278-1.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

NON-REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS THAT DO NOT ADMIT EQUIAFFINE CONNECTIONS

The purpose of this paper is to describe three-dimensional non-reductive homogeneous spaces that do not admit equiaffine connections, the case of an unsolvable Lie group of transformations is considered. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a reductive space, an affine connection, a torsion tensor, a curvature tensor, Ricci tensor, an equiaffine (locally equiaffine) connection, are defined. Studies are based on the application of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the use of purely algebraic approach to the description of manifolds and connections on them, as well as compound of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces. The results obtained can be used in the study of manifolds, as well as have applications in various fields of mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are connected with the study of invariant objects on homogeneous spaces.

Keywords: equiaffine connection, homogeneous space, Ricci tensor, reductive space, torsion tensor.

For citation: Mozhey N. P. Non-reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups that do not admit equiaffine connections. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 1 (278), pp. 5–10 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-278-1.

Введение. В каком случае однородное пространство допускает инвариантную связность? Если существует хотя бы одна инвариантная аффинная связность, то пространство является изотропно-точным, но обратное неверно. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность (см., например, [1]). Большой вклад в развитие теории связностей внесли работы Э. Картана, А. П. Нордена, П. К. Рашевского, М. Куриты, А. П. Широкова, Э. Б. Винберга, Ш. Кобаяси, К. Номидзу и др. Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [2]). Все трехмерные нередуктивные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором, допускающие инвариантные связности, изучались в работе [3], а с разрешимым стабилизатором – в работе [4], изотропно-точные нередуктивные однородные пространства, не допускающие никаких инвариантных связностей, приведены в [5].

Целью данной работы является описание трехмерных нередуктивных однородных пространств, которые допускают инвариантные связности, но эти связности не являются эквиаффинными.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, так как многообразие может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов (см., например, [6]). Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если G эффективна на $\bar{G}/G$ [1]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ad(G)-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}=0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$ (второе условие влечет $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, и наоборот, если G связна), в противном случае пространство не является редуктивным. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [7]) со связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность, а линейное представление изотропии всегда точное. Тензоры кривизны и кручения однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем они инвариантны относительно изотропного действия. *Тензор кручения* $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R\in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}};$$
$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x),\Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$$

для всех $x, y\in\bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T=0$. Определим тензор Риччи $Ric\in InvT_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y,z)=\mathrm{tr}\{x\mapsto R(x,y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$, т. е. $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}},\bar{\mathfrak{g}}])\subset\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$. Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна.

Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})\in\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ через $\{e_1, \dots, e_n, u_1, u_2, u_3\}$ $(n=\dim\mathfrak{g})$, причем алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \dots, e_n$, а $\{u_1,u_2,u_3\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в источниках [3, 4], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. В дальнейшем, если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, то они записываются около таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Теорема. *Трехмерные нередуктивные однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность, но не допускающие эквиаффинных связностей, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, локально имеют следующий вид:*

– $\mathfrak{g}$ *неразрешима:*

6.3.2

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	$-e_5$	e_6	0	u_2	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	$-e_6$	0	0	0	u_2
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	0	$-e_5$	0	u_3	0
e_4	0	0	0	0	$-e_5$	$-e_6$	0	u_2	u_3
e_5	e_5	e_6	0	e_5	0	0	0	$u_1+3e_4+e_1$	$2e_3$
e_6	$-e_6$	0	e_5	e_6	0	0	0	$2e_2$	$u_1+3e_4-e_1$
u_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	$-u_3$	$-u_2$	$-u_1-3e_4-e_1$	$-2e_2$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-u_3$	$-2e_3$	$-u_1-3e_4+e_1$	0	0	0

– $\mathfrak{g}$ *разрешима:*

2.7.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	u_1+e_2
e_2	$-e_1$	0	0	0	u_3
u_1	0	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	$-u_1-e_2$	$-u_3$	0	0	0

2.8.7, $\lambda \neq -1$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	λe_1	e_1	0	u_1
e_2	$-\lambda e_1$	0	0	u_2	λu_3
u_1	$-e_1$	0	0	0	u_3
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-\lambda u_3$	$-u_3$	0	0

3.12.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	$-e_3$	0	0	u_3
e_2	e_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	e_3	0	0	0	e_3	u_1
u_1	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

3.13.6, $\mu \neq -1$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-\mu e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	0	μu_3
e_2	μe_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

3.28.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3-e_2	$-e_3$	0	u_1	u_3
e_2	e_2-e_3	0	0	e_3	$2e_3$	$2e_1+u_2$
e_3	e_3	0	0	0	$-e_3$	u_1
u_1	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	$-u_1$	$-2e_3$	e_3	u_1	0	0
u_3	$-u_3$	$-2e_1-u_2$	$-u_1$	0	0	0

4.19.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-e_3$	$-e_4$	0	0	u_3
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	0
e_3	e_3	$-e_4$	0	0	$-e_4$	$-2e_3$	u_2
e_4	e_4	0	0	0	0	$-e_4$	u_1
u_1	0	0	e_4	0	0	u_1	0
u_2	0	$-u_1$	$2e_3$	e_4	$-u_1$	0	$-2u_3$
u_3	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$2u_3$	0

3.6.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	e_1	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2	0
e_3	$-e_1$	0	0	0	0	u_3
u_1	$-e_1$	0	0	0	0	u_3
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	$-u_1$	0	$-u_3$	$-u_3$	0	0

4.21.11, $\mu \neq -1$

	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-\mu e_3$	$(1-\mu)e_4$	u_1	0	μu_3
e_2	$-e_2$	0	e_4	0	0	e_2+u_1	0
e_3	μe_3	$-e_4$	0	0	0	$-2e_3$	u_2
e_4	$(\mu-1)e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	e_2+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-e_2-u_1$	$2e_3$	e_4	0	0	$-2u_3$
u_3	$-\mu u_3$	0	$-u_2$	$-e_2-u_1$	0	$2u_3$	0

5.9.2

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	0	e_5	u_1	0	0
e_2	0	0	0	$-e_4$	$-e_5$	0	0	u_3
e_3	$-e_3$	0	0	e_5	0	0	u_1	0
e_4	0	e_4	$-e_5$	0	0	e_5	$2e_4$	u_2
e_5	$-e_5$	e_5	0	0	0	0	e_5	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	$-e_5$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	0	$-u_1$	$-2e_4$	$-e_5$	u_1	0	$2u_3$
u_3	0	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

Для доказательства этой теоремы из трехмерных нередуктивных однородных пространств, приведенных в работах [3, 4], выберем те, которые не допускают эквиаффинных связностей.

Далее будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. Прямыми вычислениями получаем, что в случае 6.3.2 локально эквиаффинная связность (без кручения) имеет вид

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{tr}\Lambda(u_1)\neq 0$, пара не допускает эквиаффинной связности.

Аналогично получаем, что для случая, когда $\mathfrak{g}$ разрешима, локально эквиаффинные связности имеют вид, указанный в табл. 1.

Таблица 1

Локально эквиаффинная связность (без кручения)

Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
5.9.2, 3.12.2, 3.13.6, $\mu\neq 0,1/2,-1$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
4.19.2	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu\neq 1/2,-1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
3.6.2, 2.8.7, $\lambda\neq 0,-1,1/2$	$\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=0$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&r_{2,3}\\0&-1&0\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
3.28.2	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$

Окончание табл. 1

Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
2.7.2	$\begin{pmatrix}-1/2&p_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{1,2}&q_{1,2}&0\\0&q_{2,2}&0\\0&0&p_{1,2}\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&p_{1,2}&0\end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=0$	$\begin{pmatrix}-1/2&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-3p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}p_{1,3}&0&r_{1,3}\\0&-3p_{1,3}&0\\-1/2&0&2p_{1,3}\end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=1/2$	$\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&r_{2,3}\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$

Здесь $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j}\in\mathbb{R}$ (при $i,j=\overline{1,3}$). Для получения этого результата достаточно обратить внимание, что аффинные связности имеют вид, указанный в табл. 2.

Таблица 2

Аффинная связность

Пара	Аффинная связность
5.9.2, 3.12.2, 3.13.6, $\mu\neq 0,1,-1,1/2$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
4.19.2	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu\neq 0,1,1/2,-1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu=1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu=0$	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&p_{1,3}\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{1,1}&0\\0&1&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}$

Окончание табл. 2

Пара	Аффинная связность
4.21.11, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
3.6.2, 2.8.7, $\lambda\neq 0,1,-1,1/2$	$\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=1$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=0$	$\begin{pmatrix}0&-1&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&q_{2,3}\\0&0&1\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3}&r_{2,3}\\0&-1&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=-1$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&p_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{2,3}&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
3.28.2	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$
2.7.2	$\begin{pmatrix}-1/2&p_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1}&q_{1,2}&0\\0&q_{2,2}&0\\0&0&q_{1,1}\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&p_{1,2}&0\end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=1$	$\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&p_{2,3}\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{2,3}&0&0\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=0$	$\begin{pmatrix}-1/2&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&r_{1,3}\\0&r_{2,2}&0\\-1/2&0&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=1/2$	$\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&r_{2,3}\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$

Тензоры Риччи имеют вид (в остальных случаях тензор Риччи нулевой), указанный в табл. 3.

Таблица 3

Тензор Риччи

Пара	Тензор Риччи
4.21.11, $\mu=0$	$Ric=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2p_{1,3}-2r_{1,1}\\0&2p_{1,3}+2r_{1,1}&2p_{1,3}^2\end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=0$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2q_{2,3}+4p_{1,3}+2r_{1,1}\\0&-4p_{1,3}+2q_{2,3}-2r_{1,1}&-5r_{2,3}+p_{1,3}^2+q_{2,3}^2\end{pmatrix}$
2.7.2	$Ric=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-q_{1,2}+2p_{1,2}q_{2,2}-2q_{1,1}p_{1,2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=0$	$\begin{pmatrix}0&0&B\\0&0&0\\-p_{1,3}/2-r_{1,1}-q_{2,3}/2&0&A\end{pmatrix},$ $A=-2r_{1,3}+p_{1,3}^2+q_{2,3}r_{1,1}+q_{2,3}p_{1,3}-r_{2,2}q_{2,3},$ $B=q_{2,3}/2+p_{1,3}/2+r_{1,1}$

При этом тензор кручения T (описываем через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$, в остальных случаях нулевой) имеет вид, указанный в табл. 4.

Таблица 4

Тензор кручения

Пара	Тензор кручения
4.21.11, $\mu=1$, 3.13.6, $\mu=1$	$(0,0,0),(0,0,0),\left(2q_{1,3},0,0\right)$
4.21.11, $\mu=0$	$(0,0,0),\left(p_{1,3}-r_{1,1},0,0\right),\left(0,p_{1,3}-r_{1,1},0\right)$
2.8.7, $\lambda=1$	$(0,0,0),\left(0,2p_{2,3},0\right),(0,0,0)$
3.13.6, $\mu=0$	$(0,0,0),\left(p_{1,3}-r_{1,1},0,0\right),$ $\left(0,2q_{2,3}-r_{1,1}-p_{1,3},0\right)$
2.7.2	$\left(p_{1,2}-q_{1,1},0,0\right),(0,0,0),$ $\left(0,0,q_{1,1}-p_{1,2}\right)$
2.8.7, $\lambda=0$	$(0,0,0),\left(p_{1,3}-r_{1,1},0,0\right),$ $\left(0,q_{2,3}-r_{2,2},0\right)$

Прямыми вычислениями получаем, что нет таких параметров, при которых $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$ ($T=0$), и, соответственно, пары не допускают эквиаффинных связностей.

Заключение. Приведено в явном виде описание всех трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, которые допускают инвариантные связности, но эти связности не являются эквиаффинными. Особенность методов, представленных в работе, заключается в применении чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложение в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Список литературы

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т.
2. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.
3. Можей Н. П. Трехмерные нередуктивные однородные пространства неразрешимых групп Ли // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2017. № 4 (61). С. 20–26.
4. Можей Н. П. Связности на нередуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2017. № 5 (61). С. 7–16.
5. Можей Н. П. Трехмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 4 (16). С. 413–421.
6. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995. 384 с.
7. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. 1954. № 1 (76). С. 33–65.

References

1. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 t.* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol. (In Russian).
2. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.
3. Mozhey N. P. Three-dimensional non-reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, no. 4 (61), pp. 20–26 (In Russian).
4. Mozhey N. P. Connections in non-reductive homogeneous spaces with an unsolvable group of transformation. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, no. 5 (61), pp. 7–16 (In Russian).
5. Mozhey N. P. Three-dimensional Homogeneous Spaces, Not Admitting Invariant Connections. *Izv. Saratov univ. (N. S.). Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika* [News of Saratov University. New ser. Ser.: Mathematics. Mechanics. Computer science], 2016, no. 4 (16), pp. 413–421 (In Russian).
6. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fiz.-mat. lit. Publ., 1995. 384 p. (In Russian).
7. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. Journ. Math.*, 1954, no. 1 (76), pp. 33–65.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 15.11.2023