

В. С. Вихренко, Я. Г. Грода

**КИНЕМАТИКА СОСТАВНОГО
И ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЙ**

**Учебное пособие по теоретической механике
и теории механизмов и машин
для студентов механических специальностей**

Минск БГТУ 2005

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В. С. Вихренко, Я. Г. Грода

КИНЕМАТИКА СОСТАВНОГО И ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

**Учебное пособие по теоретической механике
и теории механизмов и машин
для студентов механических специальностей**

Минск 2005

УДК 531.8
ББК 22.21
В 55

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

Рецензенты:

заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики
Белорусского государственного университета профессор,
доктор физико-математических наук *М. А. Журавков*;
доцент кафедры теоретической механики
Белорусского национального технического университета
кандидат технических наук *Н. И. Горбач*

Вихренко, В. С.

В 55 Кинематика составного и плоскопараллельного движений:
Учеб. пособие по теоретической механике и теории механизмов и машин для студентов механических специальностей /
В. С. Вихренко, Я. Г. Грода. – Мн. : БГТУ, 2005. – 82 с.

ISBN 985-434-559-9

В пособии изложены основные методы исследования кинематики плоскопараллельного движения и рассмотрены примеры кинематических расчетов наиболее распространенных плоских механизмов. Наряду с аналитическими и графоаналитическими методами, основанными на теоремах сложения скоростей и ускорений, рассмотрен прямой геометрический метод замкнутых контуров, позволяющий легко алгоритмизировать расчеты на основе введения передаточных функций и обеспечить оптимальные условия для использования ЭВМ.

УДК 531.8(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 985-434-559-9

© Учреждение образования
«Белорусский государственный
технологический университет», 2005

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее распространенных видов движения, реализуемых в разнообразных механизмах, является плоскопараллельное. Изучению кинематики этого вида движения уделяется значительное внимание в курсах теоретической механики и теории механизмов и машин. При этом ввиду широкого разнообразия плоских механизмов используется ряд специфических методов, требующих свободного владения многими геометрическими представлениями, в связи с чем студенты испытывают определенные трудности при изучении данного вида движения. Представляется целесообразным изложить весь комплекс вопросов, связанных с кинематикой плоскопараллельного движения, и основные используемые методы исследования в одном пособии.

Ведущим методом исследования кинематики плоскопараллельного движения является теория составного движения с выбором подвижной поступательно движущейся системы отсчета, что упрощает запись теоремы сложения ускорений (отсутствует ускорение Кориолиса) и определение переносных и относительных характеристик движения. Для расчета скоростей точек и звеньев плоских механизмов на основе теоремы сложения скоростей разработан весьма эффективный метод мгновенных центров скоростей, тогда как для расчета ускорений, как правило, непосредственно используется теорема сложения ускорений.

Широкое разнообразие плоских механизмов не позволяет обойтись применением только поступательно движущейся подвижной системы отсчета. При рассмотрении кулачковых, кулисных (с подвижной направляющей) и планетарных механизмов целесообразно использовать системы отсчета которые движутся более сложным образом.

Особенности кинематического расчета различных типов механизмов наряду с изложением основ методов расчета отражены в первых четырех главах пособия. Значительное внимание во второй и третьей главах отводится графоаналитическим методам, обеспечивающим наглядность и простоту исследования движения сложных плоских механизмов. Эти методы важны для выработки у студентов инженерной интуиции.

Вместе с тем широкое распространение и доступность быстродействующих компьютеров привели к разработке новых простых и

универсальных методов численного исследования движения плоских механизмов, в основе которых лежит метод замкнутых контуров: по опорным точкам механизма строятся замкнутые контуры. После проектирования контуров на выбранные оси формируются уравнения, обеспечивающие возможность исследования кинематики механизмов. Эти методы рассмотрены в заключительной главе пособия.

Ввиду широкого использования геометрических представлений приведем некоторые наиболее часто используемые положения.

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

При $\gamma = \pi/2$ (прямой угол) теорема косинусов переходит в теорему Пифагора ($c^2 = a^2 + b^2$), а теорема синусов – в определение синуса угла как отношения противолежащего катета к гипотенузе: $\sin \gamma = 1$, $\sin \alpha = a/c$, $\sin \beta = b/c$.

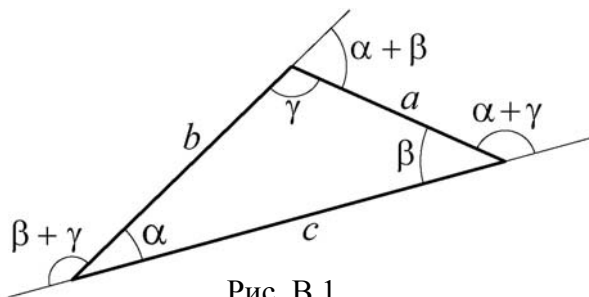


Рис. В.1

На рис. В.1 продемонстрирован тот факт, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним. Сумма углов треугольника $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

При решении задач часто возникает необходимость найти диагональ параллелограмма (рис. В.2) по известным сторонам a и b . По теореме косинусов для $\triangle ADC$ находим

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}.$$

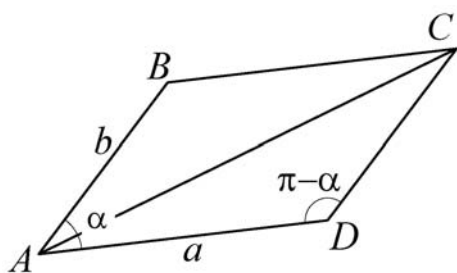


Рис. В.2

Здесь важно отметить, что под знаком корня перед последним слагаемым возникает знак «+» в отличие от стандартной формулировки теоремы косинусов, так как угол α является дополнительным к π : углу, входящему в формулировку теоремы.

При определении значений углов часто используются свойства углов, образованных пересечением двух параллельных прямых третьей. На рис. В.3 указаны одинаковые углы.

Кроме этого, часто применяется теорема о равенстве углов меж-

ду взаимно перпендикулярными прямыми (рис. В.4).

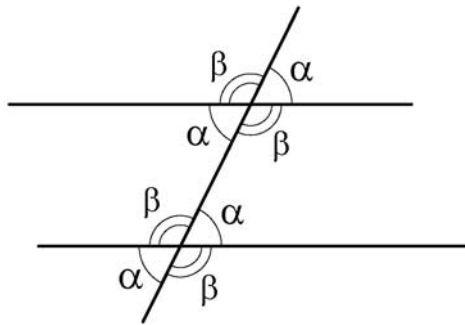


Рис. В.3

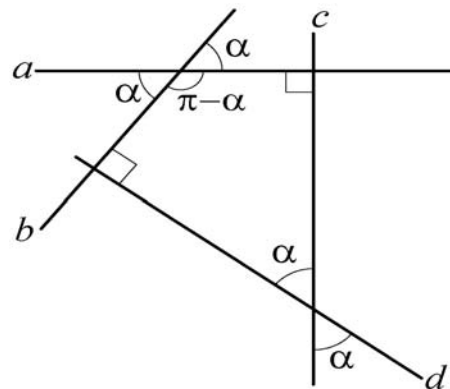


Рис. В.4

Теорема легко доказывается на основании того, что сумма углов четырехугольника равна 2π . (Докажите теорему!)

Для определения соотношений между тригонометрическими функциями удобно использовать тригонометрический круг (рис В.5), представляющий окружность единичного радиуса ($R = 1$) с осями косинусов, синусов, тангенсов и котангенсов углов. На рисунке точками обозначены соответствующие функции угла α и продемонстрировано, что $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

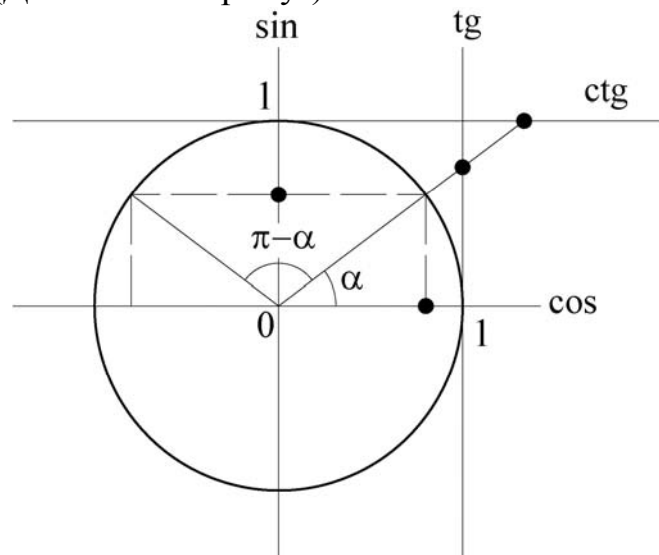


Рис. В.5

и $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$. Можно записать множество подобных соотношений для углов $\pi/2 \pm \alpha$, $3\pi/2 \pm \alpha$ и т. д.

Авторы выражают благодарность ассистенту Р. Н. Ласовскому, принявшему активное участие в подготовке пособия к изданию, и старшему преподавателю В. П. Бадееву за полезные замечания по содержанию рукописи.

1. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ

1.1. Теоремы сложения скоростей и ускорений: основные результаты

По постановке задачи или по сути происходящих явлений движение материальных объектов бывает необходимо (или удобно) исследовать в одних системах отсчета, тогда как исходная информация задана в других, движущихся относительно первых. В этом случае говорят о *составном* (или *сложном*) движении. Иногда для изучения движения приходится вводить более двух движущихся друг относительно друга («вложенных» друг в друга) систем отсчета. В настоящем пособии ограничимся простейшим случаем. Более сложные ситуации могут быть рассмотрены по методу индукции.

Введем две системы отсчета, с которыми свяжем декартовы системы координат. Одна из них, $Oxyz$, предполагается *условно неподвижной* и называется *абсолютной* системой координат. Вторая, $O'x'y'z'$, движется относительно первой и называется *подвижной* системой координат. Аналогичная терминология используется и для соответствующих им систем отсчета.

Движение материальных объектов в подвижной системе отсчета называется *относительным*, тогда как движение относительно условно неподвижной системы отсчета – *абсолютным*. Движение подвижной системы отсчета относительно абсолютной называется *переносным*. В некоторых случаях, по умолчанию, движение в абсолютной системе отсчета не оговаривается. Например, можно сказать, что движение подвижной системы отсчета называется переносным.

Рассмотрим пример. По железнодорожному полотну движется (поступательно) вагон со скоростью $v_B = 20$ м/с. По вагону движется человек со скоростью $v_{ч} = 1$ м/с в направлении движения вагона. Необходимо определить скорость движения человека относительно полотна железной дороги.

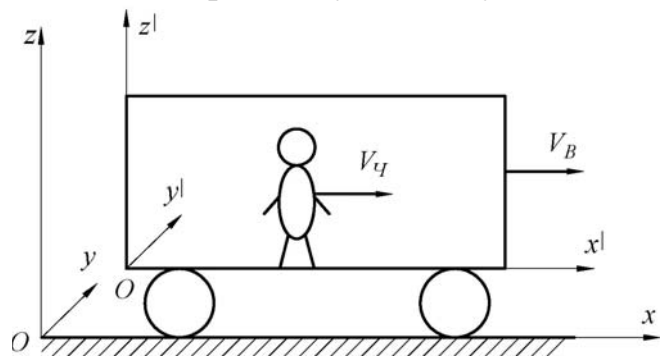


Рис. 1.1

Для решения задачи

условно неподвижную (абсолютную) систему координат $Oxyz$ свяжем с полотном железной дороги, а подвижную $O'x'y'z'$ – с вагоном (рис. 1.1). Тогда относительное движение человека происходит со скоростью $v_{\text{ч}}$. Поскольку переносное движение является поступательным, переносная скорость равна скорости вагона $v_{\text{в}}$. Легко показать (сделайте это), что искомая скорость человека относительно полотна железной дороги $v = v_{\text{в}} + v_{\text{ч}} = 21$ м/с. В случае поступательного переносного движения результат легко получить и в более общей, векторной форме

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{в}} + \mathbf{v}_{\text{ч}},$$

то есть, при любом взаимном расположении векторов $\mathbf{v}_{\text{в}}$ и $\mathbf{v}_{\text{ч}}$.

В общем случае *теорема сложения скоростей* для точки записывается в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \quad (1.1)$$

Здесь $de' = a_{ED}^n / \mu_a$ – абсолютная скорость точки при ее движении в неподвижной системе отсчета; \mathbf{v}_r – относительная скорость точки, определяемая в подвижной системе отсчета. *Переносная скорость \mathbf{v}_e* (скорость движения точки вместе с подвижной системой) *равна скорости той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент времени совпадает рассматриваемая точка.*

Теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса) содержит в правой части три слагаемых

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C, \quad (1.2)$$

где \mathbf{a} , \mathbf{a}_e , \mathbf{a}_r – абсолютное, переносное и относительное ускорения точки, соответственно, причем, аналогично скорости, переносное ускорение определяется как ускорение точки подвижной системы отсчета, совпадающей в данный момент с движущейся точкой.

Ускорение Кориолиса \mathbf{a}_C определяется как удвоенное векторное произведение переносной угловой скорости на относительную линейную скорость:

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r. \quad (1.3)$$

Рассмотрим пример. По образующей AB прямого кругового конуса с углом раствора $2\alpha = 60^\circ$ (рис. 1.2) движется точка согласно закону $AM = s = 0,6 + 0,4\sin[(5\pi/6)t]$. Конус вращается относительно вертикальной оси ED по закону $\varphi = (\pi/3)t^3$, причем φ является двугранным углом между плоскостями, проходящими через ось вращения

конуса. Одна из них (Π) перпендикулярна плоскости рисунка и неподвижна в лабораторной (абсолютной) системе отсчета, а вторая (Π') содержит образующую AB .

Необходимо определить в момент времени $t = t_1 = 1$ с скорость и ускорение т. M в лабораторной системе отсчета.

Решение задачи выполняется в следующей последовательности.

1. Выбираем системы координат.

Неподвижной будем считать лабораторную систему координат $Exyz$, а подвижную $Ox_1y_1z_1$ свяжем с вращающимся конусом.

2. Определим положение точки в момент времени t_1 и проанализируем виды движения.

Переносное движение – вращение конуса относительно вертикальной оси по закону $\varphi = (\pi/3)t^3$. В момент времени $t = t_1 = 1$ с угол поворота конуса $\varphi = \varphi_1 = \pi/3$ рад.

Относительное движение точки является прямолинейным вдоль образующей AB конуса по закону $s = 0,6 + 0,4\sin[(5\pi/6)t]$. При $t = t_1$ находим $s_1 = AM_1 = 0,8$ м.

Для определения вида переносного движения вводим в рассмотрение т. M_1^* , принадлежащую конусу (т. е. подвижной системе отсчета) и совпадающую в данный момент времени t_1 с движущейся т. M . Движение т. M_1^* и является переносным движением т. M . Как известно, при вращении тела относительно неподвижной оси его точки описывают окружности. Поэтому в переносном движении т. M движется

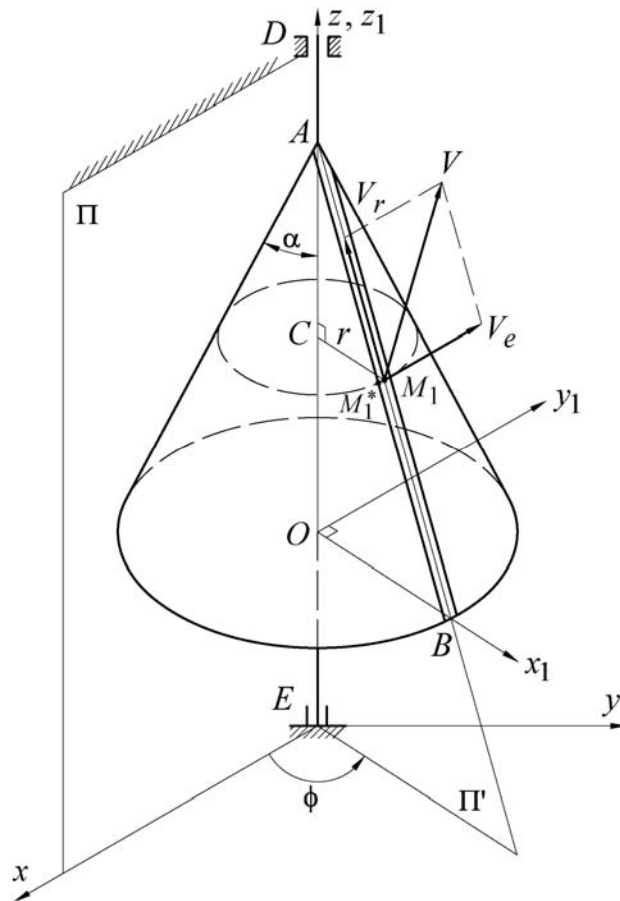


Рис. 1.2

по окружности с центром в т. C и радиусом $r = CM_1 = AM_1 \sin \alpha = 0,4$ м. Точка C является основанием перпендикуляра, опущенного из т. M_1^* (или M_1) на ось вращения EA .

В абсолютном движении т. M описывает сложную кривую на поверхности конуса в полосе шириной 0,8 м, верхний край которой находится на расстоянии 0,2 м от вершины A конуса.

3. Определяем скорость движения т. M .

Для этого используем теорему сложения скоростей (1.1). Для прямолинейного относительного движения находим

$$v_r = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6} t. \quad (1.4)$$

При $t = 1$ с находим $v_r = -\pi\sqrt{3}/6 \cong -0,907$ м/с. Общее положение т. M на рис. 1.2 указывает, что положительное направление отсчета расстояний направлено по образующей AB вниз. Поэтому относительная скорость по модулю равна $\tilde{v}_r = |v_r| = 0,907$ м/с и направлена по образующей вверх.

Для определения переносной скорости используем одну из формул связи линейных и угловых характеристик:

$$v_e = \omega_e r. \quad (1.5)$$

Угловая скорость переносного движения

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = \pi t^2. \quad (1.6)$$

При $t = t_1$ находим $\omega_e = \pi \cong 3,1415$ рад/с, так что $v_e = 0,4\pi \cong 1,256$ м/с. Направлена скорость по касательной к окружности переносного движения в сторону положительного направления измерения угла φ .

Скорости v_e и v_r взаимно перпендикулярны, поэтому модуль абсолютной скорости т. M

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} \cong 1,549 \text{ м/с.}$$

Направление скоростей указано на рис. 1.2.

При необходимости, используя, в частности, двойное проецирование, можно определить проекции абсолютной скорости на оси подвижной или неподвижной систем координат. Например,

$$v_x = -\tilde{v}_r \sin \alpha \cos \varphi - v_e \sin \varphi,$$

$$v_y = -\tilde{v}_r \sin \alpha \sin \varphi + v_e \cos \varphi,$$

$$v_z = v_r \cos \alpha. \quad (1.7)$$

Используя численные значения, находим $v_x = -1,314$ м/с, $v_y = 0,235$ м/с, $v_z = 0,785$ м/с. По этим проекциям модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cong 1,55$ м/с, что, естественно, соответствует полученному выше результату.

4. Определение ускорения движения.

Здесь используется теорема сложения ускорений (1.2). При прямолинейном движении относительное ускорение

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = -\frac{5\pi^2}{18} \sin \frac{5\pi}{6} t. \quad (1.8)$$

При $t = 1$ с находим $a_r = -1,37$ м/с². Модуль этого ускорения $\tilde{a}_r = |a_r| = 1,371$ м/с², направлено оно вверх по образующей AB (рис. 1.3).

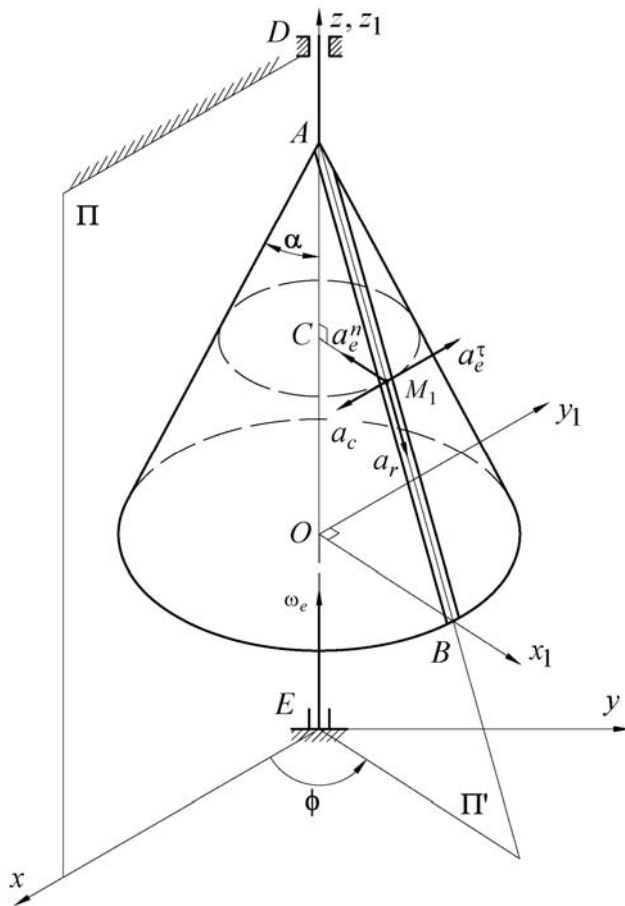


Рис. 1.3

При расчете относительного ускорения необходимо учесть, что в виду криволинейности движения оно разлагается на касательную и нормальную составляющие:

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_e^\tau + \mathbf{a}_e^n, \quad (1.9)$$

Причем

$$a_e^\tau = \varepsilon_e r = 2\pi \cdot 0,4 \cong 2,51 \text{ м/с}^2,$$

$$a_e^n = \omega_e^2 r = 0,4\pi^2 \cong 3,95 \text{ м/с}^2.$$

Направления этих ускорений указаны на рис. 1.3.

Для определения ускорения Кориолиса, согласно уравнению (1.3), необходимо определить направление вектора угловой скорости переносного движения ω_e . Этот вектор направляется вдоль оси вращения так, чтобы с положительного его

конца вращение наблюдалось происходящим против хода часовой стрелки (или можно воспользоваться правилом правого винта). В дан-

ном случае вектор ω_e направлен вверх вдоль EA .

Для определения направления векторного произведения удобно воспользоваться *правилом правой руки*: большой палец направляют вдоль первого вектора произведения (в данном случае ω_e), указательный – вдоль второго (\mathbf{v}_r), отогнутый перпендикулярно первым двум средний палец указывает направление ускорения Кориолиса. Это правило универсально и может быть использовано для определения направления вектора, получаемого как результат векторного произведения любых двух других векторов.

Для определения направления ускорения можно также воспользоваться *правилом Жуковского*: вектор относительной скорости \mathbf{v}_r следует спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и в этой плоскости повернуть проекцию на угол 90° по направлению переносного вращения. Результат не зависит от используемого метода, и в данной задаче \mathbf{a}_C направлено в сторону, противоположную вектору \mathbf{v}_e . Величина ускорения Кориолиса

$$a_C = 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, \mathbf{v}_r) = 2\omega_e v_r \sin \alpha = \pi \cdot 0,907 = 2,85 \text{ м/с}^2.$$

Для определения величины и направления ускорения т. M спроецируем уравнение

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e^\tau + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (1.10)$$

на оси подвижной системы координат:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= \tilde{a}_r \sin \alpha, \\ a_{y_1} &= a_e^\tau - a_C, \\ a_{z_1} &= -\tilde{a}_r \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подставляя численные значения, находим $a_{x_1} = 0,686 \text{ м/с}^2$, $a_{y_1} = -0,336 \text{ м/с}^2$, $a_{z_1} = -1,187 \text{ м/с}^2$. В результате абсолютное ускорение

$$a = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2 + a_{z_1}^2} \cong 1,412 \text{ м/с}^2. \quad (1.12)$$

Аналогично можно получить проекции ускорения на оси неподвижной системы координат $Exyz$.

1.2. Расчет кулачковых механизмов

Теория составного движения позволяет эффективно рассмотреть кинематику кулачковых и кулисных механизмов. Общий подход состоит в том, что подвижную систему координат связывают с кулачком

или кулисой.

В качестве примера рассмотрим кулачковый механизм с поступательно движущимся кулачком в форме полукруга радиуса R и качающимся коромыслом OA длины l , снабженным роликом радиуса r с осью вращения, проходящей через т. A (см. рис. 1.4).

Дано: $x_c = x = 0,5 - 0,2\sin\pi t$, $l = OA = 0,8$ м, $R = 0,4$ м, $r = 0,1$ м, $OB = 1,2$ м.

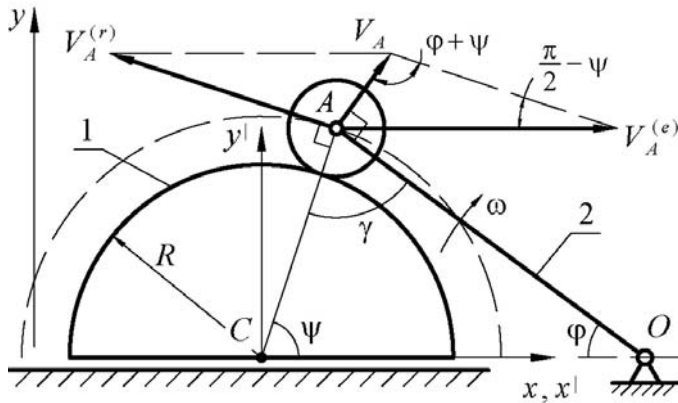


Рис. 1.4

Необходимо определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε коромысла OA в момент времени $t_1 = (5/6)$ с.

Выберем подвижную систему координат $Sx'y'$, связанную с кулачком, и рассмотрим абсолютное движение (в системе координат Bxy) т. A .

Решение задачи начинаем с определения положения механизма в данный момент времени t_1 с. Расстояние $BC = x_1 = 0,5 - 0,2\sin\pi t_1 = 0,5 - 0,2 \cdot 0,5 = 0,4$ м. Далее, $OC = L = 1,2 - 0,4 = 0,8$ м. В $\triangle OAC$ известны все три стороны, что позволяет определить углы φ и ψ . Для произвольного положения механизма используя теорему косинусов

$$(R + r)^2 = l^2 + L^2 - 2l \cdot L \cdot \cos\varphi$$

получим

$$\cos\varphi = [l^2 + L^2 - (R + r)^2] / 2lL.$$

Подставляя численные значения, находим

$$\cos\varphi = [0,64 + 0,64 - 0,25] / 1,28 = 0,8047, \varphi = 36^\circ 25', \sin\varphi = 0,5937.$$

Угол ψ проще определить по теореме синусов:

$$\sin\psi = [l / (R + r)] \sin\varphi = 0,9499, \psi = 71^\circ 47', \cos\psi = 0,3125,$$

а угол $\gamma = \pi - \psi - \varphi = 71^\circ 48'$. Как и следовало ожидать, поскольку в данном положении $\triangle OAC$ является равнобедренным, $\psi = \gamma$ (разность между углами ψ и γ в одну минуту обусловлена принятой точностью вычислений).

Далее необходимо установить все виды движения т. A . В

абсолютном движении она описывает часть окружности радиуса l с центром в т. O . В переносном движении (вместе с поступательно движущейся системой координат, связанной с кулачком) ее траектория является отрезком прямой, проходящей через т. A параллельно оси x . В относительном движении траекторией является окружность радиуса $R + r$ с центром в т. C .

1. Расчет скоростей.

В соответствии с теоремой сложения скоростей

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_A^{(e)} + \mathbf{v}_A^{(r)}. \quad (1.13)$$

Известной по величине является переносная скорость, равная скорости движения кулачка:

$$v_A^{(e)} = v^{(e)} = \dot{x}, \quad \dot{x} = -0,2\pi \cos \pi t.$$

При $t = t_1$ находим $v_A^{(e)} = -0,2\pi \cos(5\pi/6) = 0,1\pi\sqrt{3} = 0,544$ м/с.

Скорости направляются вдоль касательных к соответствующим траекториям движения, и на рисунке векторы скоростей построены для $v_A^{(e)} > 0$.

В векторном треугольнике скоростей известны все углы и одна сторона – переносная скорость т. A . Две другие скорости определяем по теореме синусов:

$$\frac{v_A}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)} = \frac{v_A^{(r)}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{v_A^{(e)}}{\sin(\psi + \varphi)},$$

откуда находим

$$v_A = \frac{\cos \psi}{\sin(\psi + \varphi)} v_A^{(e)} = \frac{\cos \psi}{\sin \gamma} v_A^{(e)} = \frac{0,3125}{0,9499} \cdot 0,544 = 0,179 \text{ м/с,}$$

$$v_A^{(r)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \gamma} v_A^{(e)} = \frac{0,8047}{0,9499} \cdot 0,544 = 0,461 \text{ м/с.}$$

Угловая скорость движения коромысла

$$\omega = v_A / OA = 0,179 / 0,8 = 0,224 \text{ рад/с.}$$

Относительная скорость будет необходима для вычисления относительного ускорения.

2. Расчет ускорений.

Теорема сложения ускорений при поступательном переносном движении имеет вид

$$\mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^\tau = \mathbf{a}_A^{(e)} + \mathbf{a}_A^{\tau(r)} + \mathbf{a}_A^{n(r)}. \quad (1.14)$$

Абсолютное и относительное ускорения т. A разложены на составляющие, тогда как ее переносное движение является прямолинейным. Кроме того, при поступательном переносном движении ускорение Кориолиса равно нулю.

Вычислим алгебраические величины составляющих ускорений.

$$a_A^{(e)} = \ddot{x} = 0, 2\pi^2 \sin \pi t.$$

$$\text{При } t = t_1 \text{ находим } a_A^{(e)} = 0, 1\pi^2 = 0, 987 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = v_A^2 / OA = 0, 040 \text{ м/с}^2, \quad a_A^{n(r)} = (v_A^{(r)})^2 / (R + r) = 0, 425 \text{ м/с}^2.$$

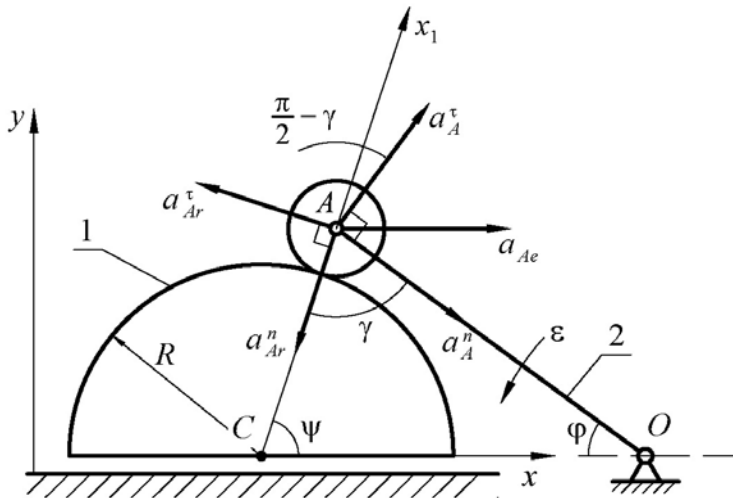


Рис. 1.5

В отличие от нормальных ускорений, определяемых соответствующими скоростями, касательные ускорения можно вычислить, лишь используя теорему сложения ускорений (1.14). В этом векторном уравнении не известны по величине два слагаемых. Векторное уравнение на

плоскости эквивалентно двум алгебраическим уравнениям, получаемым проецированием на две не параллельные друг другу оси. Как уже было отмечено, неизвестными являются касательные ускорения $a_A^{\tau(r)}$ и a_A^τ .

Чтобы избежать решения системы двух уравнений, следует выбрать оси, перпендикулярные одному из неизвестных векторов. Так, выбрав ось x_1 вдоль CA и спроецировав на нее уравнение (1.14), получим

$$a_A^\tau \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) - a_A^n \cos \gamma = a_A^{(e)} \cos(\pi - \varphi - \gamma) - a_A^{n(r)}.$$

Отсюда находим касательное ускорение т. A :

$$a_A^\tau = [a_A^n \cos \gamma - a_A^{(e)} \cos(\varphi + \gamma) - a_A^{n(r)}] / \sin \gamma.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$a_A^\tau = [0, 04 \cdot 0, 3125 + 0, 987 \cdot \cos 71^\circ 47' - 0, 425] / 0, 9499 = -0, 109 \text{ м/с}^2.$$

Знак « \leftarrow » свидетельствует о том, что в действительности ускоре-

ние a_A^τ направлено в сторону, противоположную указанной на рисунке. Угловое ускорение коромысла

$$\varepsilon = \frac{|a_A^\tau|}{OA} = 0,136 \text{ рад/с}^2.$$

На рисунке указываем действительное направление углового ускорения, так как использован модуль касательного ускорения (см. рис. 1.5). Вращение коромысла является замедленным, поскольку угловые скорость и ускорение направлены во взаимно противоположные стороны.

Второе неизвестное ускорение $a_A^{\tau(r)}$ нет необходимости определять, поскольку на поставленные вопросы ответы получены.

1.3. Расчет простейших кулисных механизмов

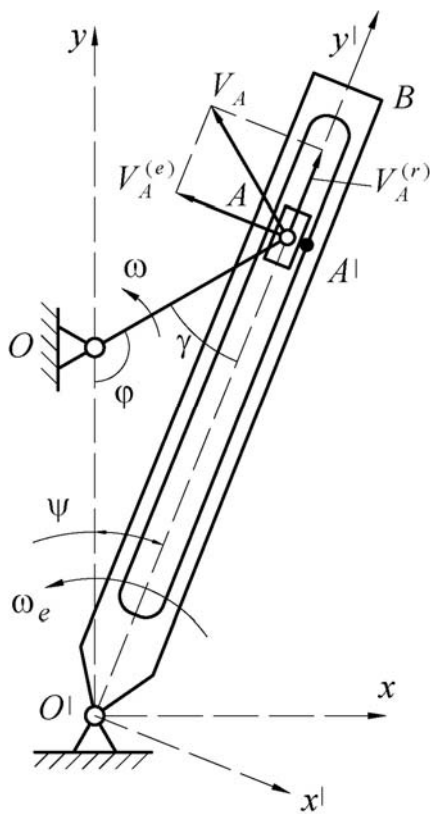


Рис. 1.6

Кулису можно рассматривать как подвижную направляющую. Строгое ее определение будет дано в курсе теории механизмов и машин. Кинематический расчет кулисных механизмов выполняется аналогично рассмотренному выше расчету кулачкового механизма, причем подвижная система координат связывается с кулисой или камнем.

Рассмотрим пример. Механизм с качающейся кулисой O_1B приводится в движение кривошипом OA , вращающимся с постоянной угловой скоростью $\omega = 6 \text{ рад/с}$ (рис. 1.6). Камень 2 скользит вдоль прямолинейной прорези кулисы. Требуется определить угловую скорость и ускорение кулисы в момент времени, когда угол $\varphi = 120^\circ$. Длина кривошипа $OA = r = 0,6 \text{ м}$, расстояние между осями вращения $O_1O = l = 1,0 \text{ м}$.

Определим необходимые для дальнейшего геометрические характеристики механизма. Введем обозначение $O_1A = R$ и найдем величину этого отрезка

$$R = O_1A = \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos 120^\circ} = \sqrt{1,36 + 0,6} = 1,4 \text{ м}.$$

По теореме синусов находим

$$\sin \psi = \frac{r}{R} \sin \varphi = \frac{0,6 \sqrt{3}}{1,4 \cdot 2} = 0,371, \quad \cos \psi = 0,929, \quad \psi = 21^\circ 47',$$

$$\gamma = 180^\circ - \varphi - \psi = 38^\circ 13', \quad \sin \gamma = 0,619, \quad \cos \gamma = 0,786.$$

Выбираем подвижную систему координат $Ox'y'$, связанную с кулисой, и рассматриваем абсолютное движение т. A , принадлежащей камню (в рассматриваемой конструкции механизма эта точка совпадает с осью вращения, принадлежащей кривошипу OA). Траектория абсолютного движения – окружность радиуса OA с центром в т. O . Для определения характеристик переносного движения следует рассмотреть т. A' , принадлежащую кулисе и в данный момент времени совпадающую с т. A (поперечным размером кулисы пренебрегаем). Траектория переносного движения – окружность радиуса $O_1A = R$ с центром в т. O_1 . В относительном движении т. A движется прямолинейно вдоль прорези кулисы, т. е. вдоль оси O_1y' .

В соответствии с найденными траекториями движения на рис. 1.6 построены векторы, входящие в теорему сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_A^{(e)} + \mathbf{v}_A^{(r)}. \quad (1.15)$$

В этом уравнении абсолютная скорость т. A известна по направлению и по величине $v_A = \omega r = 3,6$ м/с.

Переносная и относительная скорости известны только по направлению. Поскольку векторный параллелограмм является прямоугольником, находим эти скорости:

$$v_A^{(r)} = v_A \sin \gamma = 3,6 \cdot 0,619 = 2,23 \text{ м/с},$$

$$v_A^{(e)} = v_A \cos \gamma = 3,6 \cdot 0,786 = 2,83 \text{ м/с}.$$

По известной переносной скорости находим угловую скорость кулисы:

$$\omega_{\text{кул}} = \frac{v_A^{(e)}}{O_1A} = \frac{2,83}{1,4} = 2,02 \text{ рад/с}.$$

Относительная скорость т. A будет необходима при вычислении ускорения Кориолиса.

Для вычисления углового ускорения кулисы воспользуемся теоремой сложения ускорений:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{Ae}^n + \mathbf{a}_{Ae}^\tau + \mathbf{a}_{Ar} + \mathbf{a}_{Ac}. \quad (1.16)$$

Поскольку кривошип вращается равномерно, абсолютное уско-

рение т. A имеет только нормальную составляющую:

$$a_A = a_A^n = \omega^2 r = 21,6 \text{ м/с}^2.$$

По известной угловой скорости кулисы вычисляем переносное нормальное ускорение:

$$a_{Ae}^n = \omega_{\text{кул}}^2 \cdot R = 2,02^2 \cdot 1,4 = 5,71 \text{ м/с}^2.$$

По результатам расчета скоростей определяем ускорение Кориолиса:

$$a_{Ac} = 2 \left| \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_A^{(r)} \right| = 2 \omega_{\text{кул}} v_A^{(r)} \sin 90^\circ = 2 \cdot 2,02 \cdot 2,23 = 9,01 \text{ м/с}^2.$$

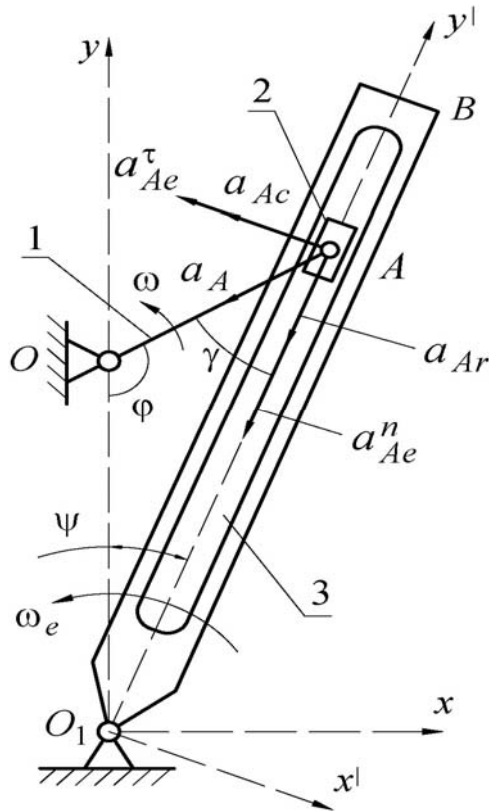


Рис. 1.7

Вектор переносной угловой скорости (угловой скорости кулисы) направлен вдоль оси вращения, проходящей через т. O_1 перпендикулярно плоскости рисунка. Для плоской задачи направление ускорения Кориолиса проще всего определяется по правилу Жуковского: вектор относительной скорости следует повернуть на прямой угол по направлению переносного вращения (см. рис. 1.7).

Оставшиеся неизвестные переносное касательное и относительное ускорения можно найти, решая векторное уравнение (1.16). Для ответа на поставленный в условии задачи вопрос достаточно найти a_{Ae}^τ . Проецируем уравнение (1.16) на ось O_1x' :

$$-a_A \sin \gamma = -a_{Ae}^\tau - a_{Ac}.$$

Отсюда

$$a_{Ae}^\tau = a_A \sin \gamma - a_{Ac} = 21,6 \cdot 0,619 - 9,01 = 4,36 \text{ м/с}^2.$$

Угловое ускорение кулисы

$$\varepsilon_{\text{кул}} = \frac{a_{Ae}^\tau}{O_1A} = \frac{4,36}{1,4} = 3,11 \text{ рад/с}^2.$$

Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания

1. Дайте определения переносного движения.
2. Дайте определения абсолютного, переносного и относительного движений точки.
3. Сформулируйте теорему сложения скоростей и дайте определения входящих в нее величин.
4. Как определяется переносная скорость точки?
5. Сформулируйте теорему сложения ускорений и дайте определения входящих в нее величин.
6. На какие составляющие разлагается переносное ускорение при вращательном переносном движении?
7. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?
8. Как определяется направление ускорения Кориолиса?
9. Сформулируйте правило правой руки и правило Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса.
10. Какие существуют способы определения величины и направления абсолютных скорости и ускорения при известных их составляющих?
11. Какой прием используется для расчета кулачковых и кулисных механизмов?
12. Как определить, достаточно ли данных для решения векторных уравнений, выражающих теоремы сложения скоростей и ускорений?
13. Решите задачу, приведенную в п. 1.1 (рис. 1.2) при условии, что телом вращения является цилиндр радиуса $R = OB = 0,6$ м, а т. M движется по его образующей. Законы движения тела вращения и точки по образующей те же, что и в рассмотренном примере.
14. Решите задачу, приведенную в п. 1.2 (рис. 1.4) при условии, что кулачок имеет форму прямоугольного треугольника CEF , причем катет CF расположен вдоль оси x и острый угол FCE равен 30° . Закон движения т. C $x_C = x = 0,8 + 0,2 \sin \pi t$. Остальные данные остаются без изменений.
15. Решите задачу, приведенную в п. 1.3 (рис. 1.6) при условии, что кулиса движется поступательно и имеет направляющую, расположенную вдоль оси x . Угол наклона прорези кулисы BCD (точки C и D на рис. 1.6 отсутствуют) к оси x составляет 60° ($\angle BCx = 60^\circ$, причем т. C расположена на пересечении оси прорези кулисы и оси Ox). Остальные данные остаются без изменений.

Примечание: При решении задач 13 – 15 необходимо изобразить схему механизма и из условий задач п. 1.1 – 1.3 взять недостающие данные.

2. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАДАНИЕ ДВИЖЕНИЯ, НАХОЖДЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

2.1. Определения и задание закона движения

Плоскопараллельным называют движение твердого тела, при котором все его точки описывают траектории, лежащие в параллельных плоскостях (в дальнейшем будем называть их *плоскостями траекторий*).

Из приведенного определения следует, что все точки тела, лежащие в одной из плоскостей траекторий, остаются в этой плоскости в течение всего времени движения тела. Рассмотрим две параллельные плоскости траекторий и две т. A и B , принадлежащие телу и лежащие на некотором перпендикуляре к плоскостям. Длина отрезка AB определяет расстояние между плоскостями, и это расстояние является минимальным из длин всех отрезков, соединяющих любые две точки, принадлежащие параллельным плоскостям. Следовательно, отрезок AB и прямая, проведенная через т. A и B , остаются перпендикулярными плоскостям траекторий во все время движения тела, т. е. указанные перпендикуляры движутся поступательно.

Все точки поступательно движущегося тела (и, как частного случая, прямой) описывают одинаковые, но смещенные друг относительно друга траектории и в произвольный момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения. Поэтому достаточно рассмотреть движение одной из точек построенной прямой. Тело состоит из бесчисленного множества таких прямых, параллельных друг другу (перпендикулярных плоскостям траекторий). Подчеркнем, что траектории, скорости и ускорения точек, принадлежащих разным прямым, не являются одинаковыми, за исключением случая, когда движение тела является поступательным. Однако для изучения движения всех прямых, составляющих твердое тело и перпендикулярных плоскостям траекторий, достаточно изучить движение точек их пересечения с некоторой плоскостью траекторий, т. е. фактически изучить движение плоской фигуры в ее плоскости.

Плоская фигура, движение которой необходимо изучить, может быть построена как сечение тела одной из плоскостей траекторий или как проекция тела на такую плоскость (рис. 2.1). Законы движения плоских фигур 1 и 2, построенных на рис. 2.1, в своих плоскостях эквивалентны, хотя очертания фигур различны.

Размер и очертания плоской фигуры не влияют на характер ее движения. Чтобы снять трудности, связанные с очертаниями плоской фигуры, мысленно предполагают, что она имеет достаточно большой, в принципе, неограниченный размер. Можно представить, что на плоские фигуры, изображенные на рис. 2.1, наклеены большие листы картона, увеличивающие площадь плоской фигуры до необходимых размеров.

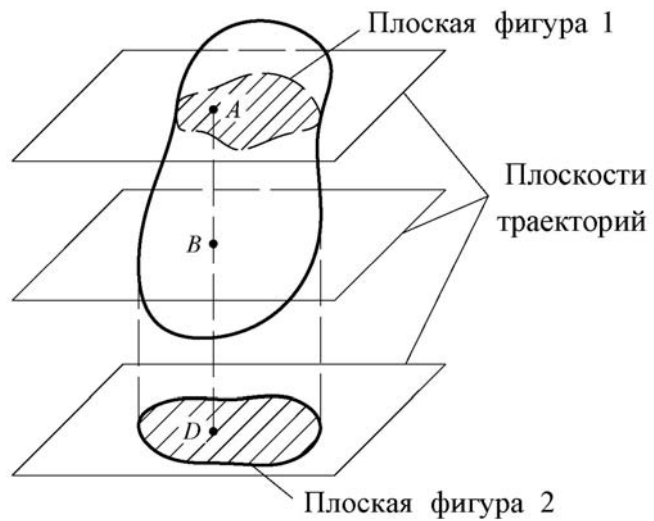


Рис. 2.1

Далее рассмотрим движение плоской фигуры в своей плоскости (рис. 2.2). Положение плоской фигуры полностью определяется заданием координат двух ее т. A и B , поскольку положение любой другой точки определяется построением треугольника с известными тремя сторонами. Однако четыре введенных параметра – координаты x_A, y_A, x_B, y_B – не являются независимыми. Для твердого тела расстояние между двумя его точками не изменится при его движении. Поэтому координаты точек удовлетворяют уравнению связи:

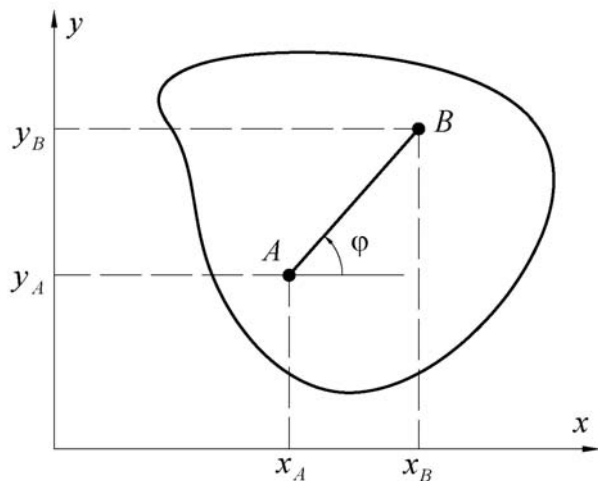


Рис. 2.2

$$(x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 = AB^2, \quad (2.1)$$

где AB – длина отрезка AB . Отсюда следует, что число степеней свободы плоской фигуры $w = 4$ (параметра) – 1 (связь) = 3, и во многих случаях удобнее пользоваться тремя независимыми параметрами вместо четырех координат двух точек. В качестве таких независимых параметров обычно выбирают координаты одной из точек плоской фигуры (например, A) и угол φ , который составляет какая-либо прямая, жестко связанная с телом (например, AB), с некоторым фиксирован-

ным на плоскости направлением (например, осью x). В таком случае закон движения тела задается в виде

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Точку A называют *полюсом* плоской фигуры.

2.2. Представление плоскопараллельного движения суммой двух движений. Теорема сложения скоростей и теорема о проекциях скоростей

Рассмотрим движение плоской фигуры с точки зрения составного движения. С этой целью введем подвижную систему координат $Ax'y'$ с началом в полюсе A плоской фигуры и потребуем, чтобы введенная система координат двигалась *поступательно* (см. рис. 2.3).

Тем самым плоскопараллельное движение тела представлено суммой двух движений: переносного поступательного движения вместе с полюсом A и относительного вращательного движения относительно полюса A .

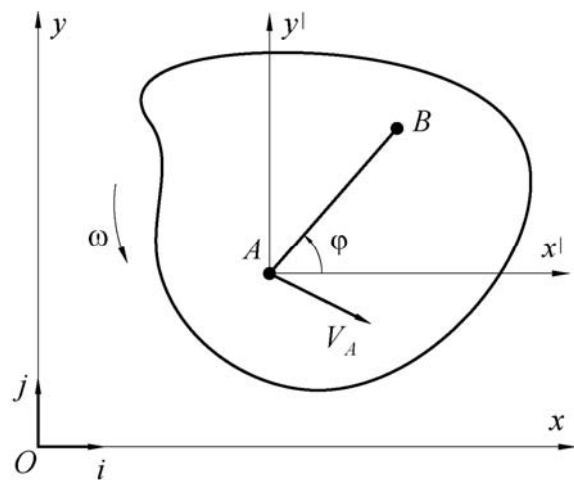


Рис. 2.3

По известному закону движения т. A (первые два уравнения системы (2.2)) определяем скорость полюса

$$\mathbf{v}_A = \dot{x}_A \mathbf{i} + \dot{y}_A \mathbf{j}, \quad (2.3)$$

а также угловую скорость плоской фигуры:

$$\omega = \dot{\varphi} = d\varphi / dt. \quad (2.4)$$

Угловая скорость является характеристикой движения плоской фигуры как целого и не зависит от выбора полюса, тогда как скорости различных точек плоской фигуры не одинаковы.

Теорема сложения скоростей для произвольной т. B имеет вид

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_B^{(e)} + \mathbf{v}_B^{(r)}. \quad (2.5)$$

Ввиду поступательного движения подвижной системы координат

нат все ее точки движутся с одинаковыми скоростями, и поэтому для переносной скорости т. B запишем

$$\mathbf{v}_B^{(e)} = \mathbf{v}_A. \quad (2.6)$$

Для относительной скорости введем специальное обозначение

$$\mathbf{v}_B^{(r)} = \mathbf{v}_{BA}. \quad (2.7)$$

Для краткости будем говорить, что \mathbf{v}_{BA} – это скорость движения т. B относительно полюса A , понимая, что это есть скорость т. B относительно поступательно движущейся системы координат с началом в полюсе A .

Теорема сложения скоростей приобретает вид

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}. \quad (2.8)$$

Модуль относительной скорости определяется по одной из формул связи линейных и угловых характеристик при вращательном движении:

$$v_{BA} = \omega AB. \quad (2.9)$$

Кроме того, $\mathbf{v}_{BA} \perp AB$.

Складывая как векторы \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_{BA} , находим искомую скорость т. B .

Учитывая, что $\mathbf{v}_{BA} \perp AB$ и проецируя уравнение (2.8) на прямую AB , получим

$$\text{Пр}_{AB}(\mathbf{v}_B) = \text{Пр}_{AB}(\mathbf{v}_A). \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) выражает *теорему о проекциях скоростей*: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны.

Рассмотрим в качестве примера шарнирный четырехзвенник (рис. 2.4). Он состоит из трех подвижных звеньев 1, 2, 3 и неподвижного звена, на котором закреплены оси вращения O и O_1 . В данный момент звено 1 расположено горизонтально, звено 3 – вертикально, $\alpha = 60^\circ$. Длины звеньев $OA = l_1 = l$, $AB = l_2 = 2l$, $O_1B = l_3 = 2l$, $l = 0,3$ м. Звено 1 вращается с угловой скоростью $\omega_1 = \omega = 6$ рад/с.

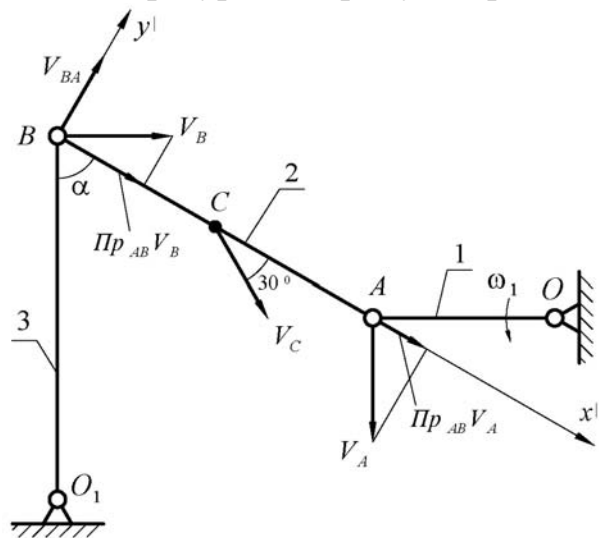


Рис. 2.4

Необходимо определить скорости точек B и C (т. C делит звено AB на равные части $AC = BC$), а также угловые скорости звеньев 2 и 3.

Решение. Назовем точки, принадлежащие нескольким звеньям, *узловыми*. Для рассматриваемого механизма узловыми являются точки A и B . Расчет в первую очередь следует вести для узловых точек, поскольку их принадлежность нескольким звеньям обеспечивает дополнительную информацию об их движении, которая необходима для расчета кинематических характеристик.

Структуру $OABO_1$ следует рассматривать как кинематическую цепь. Звено 1, движение которого задано, принято называть входным. При расчете следует последовательно двигаться вдоль кинематической цепи, начиная с входного звена.

Точка A принадлежит звену 1, вращающемуся относительно неподвижной оси, проходящей через т. O (в дальнейшем будем говорить: вращающемуся относительно т. O). Поэтому

$$v_A = \omega_1 \cdot OA = \omega l, \quad v_A \perp OA.$$

Для определения скорости т. B полезно рассмотреть ее движение из условия принадлежности звену 3, которое вращается относительно т. O_1 . Это позволяет заключить, что $v_B \perp O_1B$. Используя теорему о проекциях, приходим к выводу, что скорость т. B направлена вправо. Приравниваем проекции скоростей:

$$v_B \cos(90^\circ - \alpha) = v_A \cos \alpha.$$

$$\text{Отсюда } v_B = v_A \operatorname{ctg} \alpha = \omega l / \sqrt{3}, \quad \omega_3 = v_B / l_3 = \omega / 2\sqrt{3}.$$

Направление скорости т. C не известно, и для дальнейших вычислений следует определить угловую скорость звена 2. С этой целью воспользуемся теоремой сложения скоростей (2.8). Проецируя ее на ось y' (указана на рис. 2.4), запишем

$$v_B \cos \alpha = -v_A \sin \alpha + v_{BA},$$

$$\text{или } v_{BA} = v_B \cos \alpha + v_A \sin \alpha = \frac{\omega l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \omega l \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\omega l}{\sqrt{3}}.$$

Эти же результаты следуют из рассмотрения векторного треугольника (рис. 2.5), соответствующего уравнению (2.8):

$$v_B = v_A \operatorname{ctg} \alpha = \omega l / \sqrt{3},$$

$$v_{BA} = v_A / \sin \alpha = 2\omega l / \sqrt{3}.$$

Угловая скорость звена 2

$$\omega_2 = v_{BA} / AB = \omega / \sqrt{3}.$$

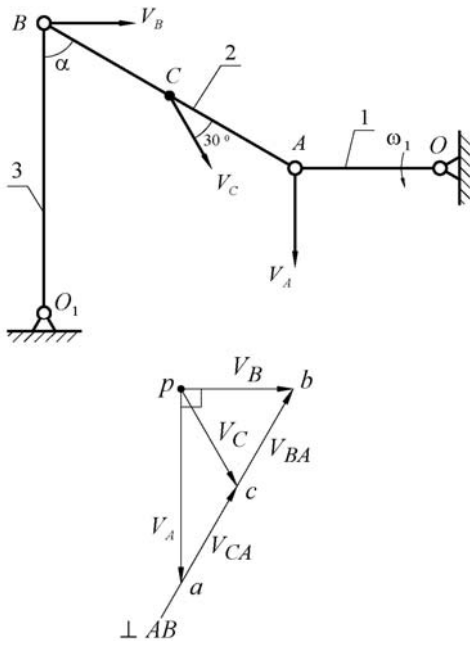


Рис. 2.5

Для определения скорости т. С запишем теорему сложения скоростей

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA}. \quad (2.11)$$

Относительная скорость $v_{CA} = v_{BA} - v_{CA} = \omega_2 AC = \omega l / \sqrt{3}$, или $v_{CA} = v_{BA} / 2$. Результат вычислений по уравнению (2.11) показан на рис. 2.5. Поскольку $v_B = v_{BA} / 2$, Δpbc является равнобедренным и $v_C = v_B = \omega l / \sqrt{3}$. Естественно, этот результат можно получить, проецируя уравнение (2.11), например, на ось Bx' . Скорость т. С составляет угол 60° с направлением скорости т. В или направлена под углом 30° к звену AB .

2.3. Метод мгновенных центров скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Покажем, что МЦС существует, если угловая скорость плоской фигуры не равна нулю. Рассмотрим плоскую фигуру с полюсом A . Заданы вектор скорости полюса \mathbf{v}_A и угловая скорость ω плоской фигуры (рис. 2.6).

Пусть т. C_V является искомым мгновенным центром скоростей, т. е. $v_{C_V} = 0$. Запишем теорему сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_{C_V} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{C_V A}.$$

Используя определение МЦС ($v_{C_V} = 0$), находим скорость т. C_V относительно т. A

$$\mathbf{v}_{C_V A} = -\mathbf{v}_A. \quad (2.12)$$

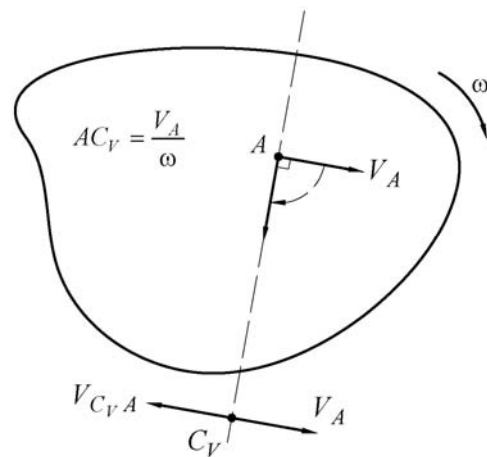


Рис. 2.6

С другой стороны, $\mathbf{v}_{C_V A} \perp AC_V$, или ввиду соотношения (2.12) $AC_V \perp \mathbf{v}_A$. Отсюда следует, что мгновенный центр скоростей плоской фигуры, если он существует, лежит на перпендикуляре к скорости точки, проведенном через эту точку. Вдоль этого перпендикуляра необходимо отложить расстояние

$$AC_V = v_A / \omega \quad (2.13)$$

и таким образом определить положение т. C_V . Следовательно, при $\omega \neq 0$ мгновенный центр существует. Из двух направлений вдоль перпендикуляра к \mathbf{v}_A следует выбрать то, которое будет указано после поворота вектора \mathbf{v}_A на прямой угол по направлению вращения плоской фигуры (см. рис. 2.6). Если т. C_V оказывается за пределами изображенной фигуры, то ее площадь следует мысленно увеличить до необходимых размеров.

В качестве полюса может быть выбрана любая точка плоской фигуры. Отсюда следует, что перпендикуляры к скоростям ее точек должны пересекаться в одной и той же точке, являющейся мгновенным центром скоростей. Этот же вывод следует и из теоремы сложения скоростей, записанной для произвольной т. $B_k (k = 1, 2, \dots)$

$$\mathbf{v}_{B_k} = \mathbf{v}_{B_k C_V}, \quad \mathbf{v}_{B_k C_V} \perp B_k C_V, \quad \mathbf{v}_{B_k} \perp B_k C_V. \quad (2.14)$$

Здесь учтено, что $\mathbf{v}_{C_V} = 0$. Кроме того, скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей:

$$v_{B_k} = v_{B_k C_V} = \omega \cdot B_k C_V, \quad (2.15)$$

или

$$v_{B_2} / v_{B_1} = B_2 C_V / B_1 C_V.$$

На рис. 2.7 показано возможное распределение скоростей точек плоской фигуры.

Получается «ёжик» скоростей с «иголками», приглаженными по направлению вращения тела.

Сформулированные выше выводы совместно с рис. 2.7 позволяют находить положение МЦС в различных частных случаях.

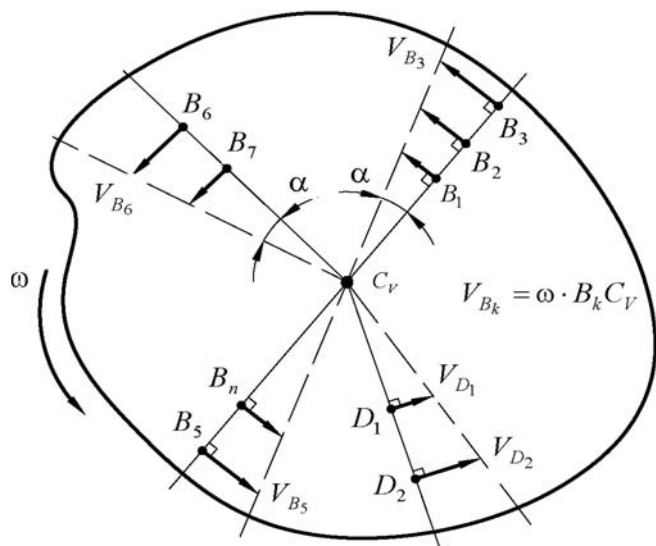


Рис. 2.7

2.3.1. Скорости точек не параллельны друг другу

Известны величина и направление скорости некоторой т. A и направление скорости т. B , причем эти скорости не параллельны друг другу.

Положение МЦС определяется пересечением перпендикуляров к скоростям (рис. 2.8). Угловая скорость $\omega = v_A / AC_V$. Направление вращения определяется по известной скорости $v_{AC_V} = v_A$, $v_B = \omega BC_V = v_A BC_V / AC_V$.

Скорость любой другой точки определяется аналогично рассмотренному при построении рис. 2.7.

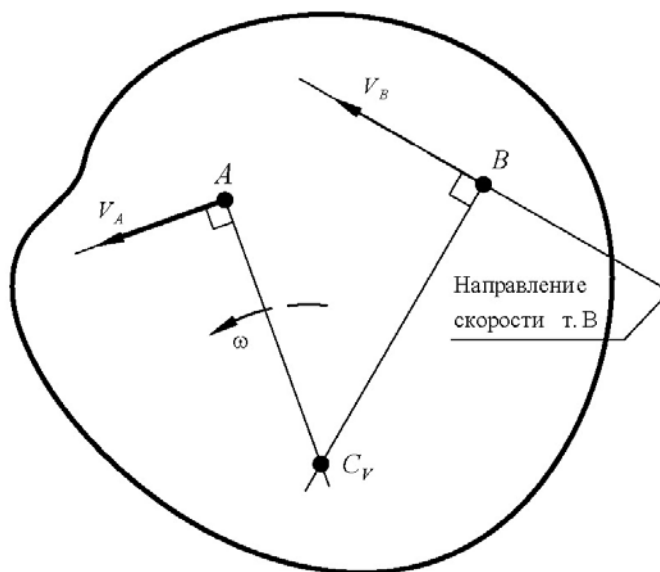


Рис. 2.8

2.3.2. Скорости точек параллельны друг другу и имеют общий перпендикуляр

Заданы величины скоростей двух точек v_A и v_B , причем $v_A \parallel v_B$, $v_A \neq v_B$ и отрезок AB перпендикулярен скоростям (рис. 2.9).

Перпендикуляры к скоростям совпадают, и для определения положения МЦС используется тот факт что скорости точек пропорциональны их расстояниям до МЦС.

Для определения угловой скорости строим линию $EN \parallel AC_V$ и, используя подобие треугольников DEN и DAC_V , находим угловую скорость:

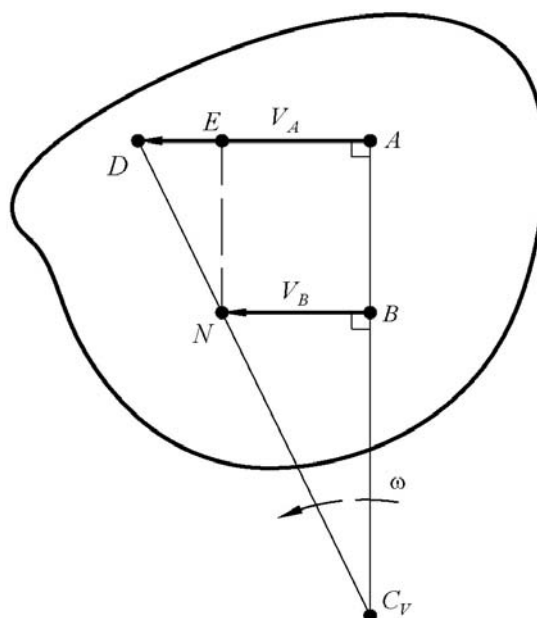


Рис. 2.9

$$\omega = \frac{v_A}{AC_V} = \frac{v_A - v_B}{AB}. \quad (2.16)$$

Отметим, что если v_A и v_B направлены в одну и ту же сторону, то C_V делит отрезок AB внешним образом пропорционально скоростям:

$$\frac{AC_V}{BC_V} = \frac{v_A}{v_B}. \quad (2.17)$$

Однако для использования этого равенства необходимо записать дополнительное соотношение $BC_V = AC_V - AB$, и решать систему двух уравнений для определения AC_V а затем угловой скорости $\omega = v_A / AC_V$. Использование подобия треугольников непосредственно приводит к соотношению (2.16), определяющему угловую скорость, а затем определяется и расстояние до МЦС:

$$AC_V = \frac{v_A}{\omega} = \frac{v_A}{v_A - v_B} AB. \quad (2.18)$$

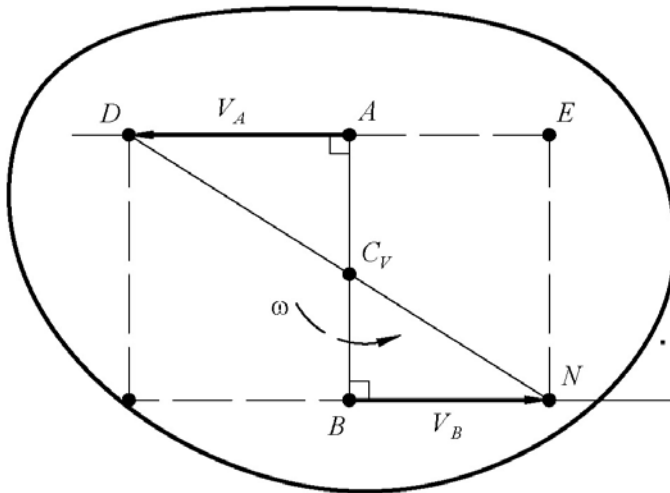


Рис. 2.10

Если скорости антипараллельны (рис. 2.10), МЦС делит отрезок AB внутренним образом пропорционально скоростям. Используя подобие треугольников DEN и DAC_V , находим

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_A}{AC_V} = \\ &= \frac{v_A + v_B}{AB}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$AC_V = \frac{v_A}{\omega} = \frac{v_A}{v_A + v_B} AB. \quad (2.20)$$

2.3.3. Скорости точек параллельны друг другу и не имеют общего перпендикуляра

Скорости т. A и B параллельны и отрезок AB не перпендикулярен скоростям (рис. 2.11).

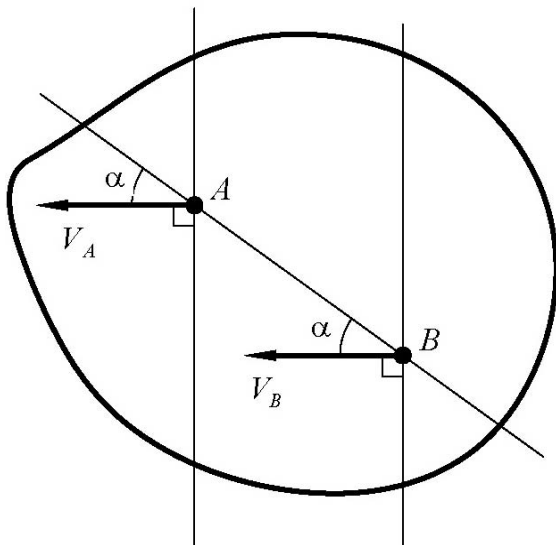


Рис. 2.11

В отличие от предыдущего случая задача о пересечении перпендикуляров к скоростям не имеет решения и МЦС не существует. По существу, метод МЦС в данном случае не может быть использован. Поэтому воспользуемся тем, что углы, составляемые векторами скоростей с линией, проведенной через т. A и B , одинаковы. По теореме о проекциях скоростей \mathbf{v}

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \alpha$$

находим, что модули скоростей равны и, следовательно, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$.

Воспользовавшись далее теоремой сложения скоростей (2.8), найдем, что $v_{BA} = 0$ и $\omega = v_{BA} / AB = 0$.

Рассматривая произвольную т. D тела и используя теорему сложения скоростей, находим

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B, \quad (2.21)$$

так как $v_{DA} = v_{DB} = 0$.

Такое движение (угловая скорость тела в данный момент равна нулю и векторы скоростей всех его точек одинаковы) называется *мгновенно-поступательным*.

Те же результаты могут быть формально получены, если сказать, что МЦС находится в бесконечности (как говорят о пересечении параллельных прямых). Тогда $AC_V = BC_V = \infty$ и

$$\omega = \frac{v_A}{AC_V} = \frac{v_B}{BC_V} = 0. \quad (2.22)$$

Поскольку результат (2.22) эквивалентен полученному при более строгом подходе, но следует после более простых рассуждений, понятие об МЦС используется и при рассмотрении мгновенно-поступательного движения: если МЦС находится в бесконечности, угловая скорость плоской фигуры равна нулю, а скорости всех ее точек в данный момент времени геометрически равны.

2.3.4. Скорости точек равны друг другу и имеют общий перпендикуляр

Пусть векторы скоростей двух точек равны ($\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$) и отрезок AB перпендикулярен скоростям (рис. 2.12).

Хотя перпендикуляры к скоростям совпадают, равенство векторов скоростей точек приводит к $\omega = 0$ и все выкладки полностью эквивалентны п. 2.3.3. МЦС находится в бесконечности, движение — мгновенно-поступательное.

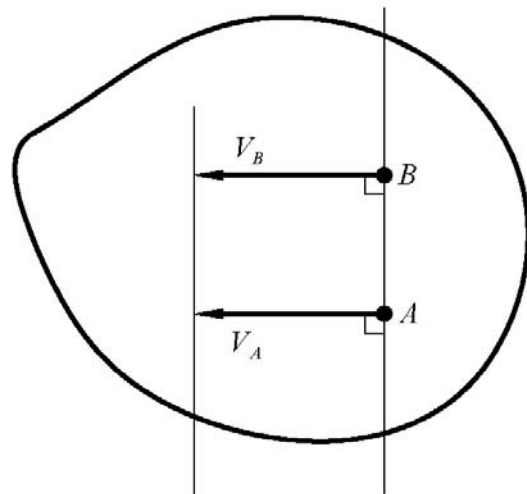


Рис. 2.12

2.3.5. Плоская фигура обкатывается без проскальзывания по неподвижной кривой

При качении плоской фигуры по неподвижной кривой без проскальзывания (рис. 2.13) МЦС находится в точке контакта фигуры и неподвижной кривой.

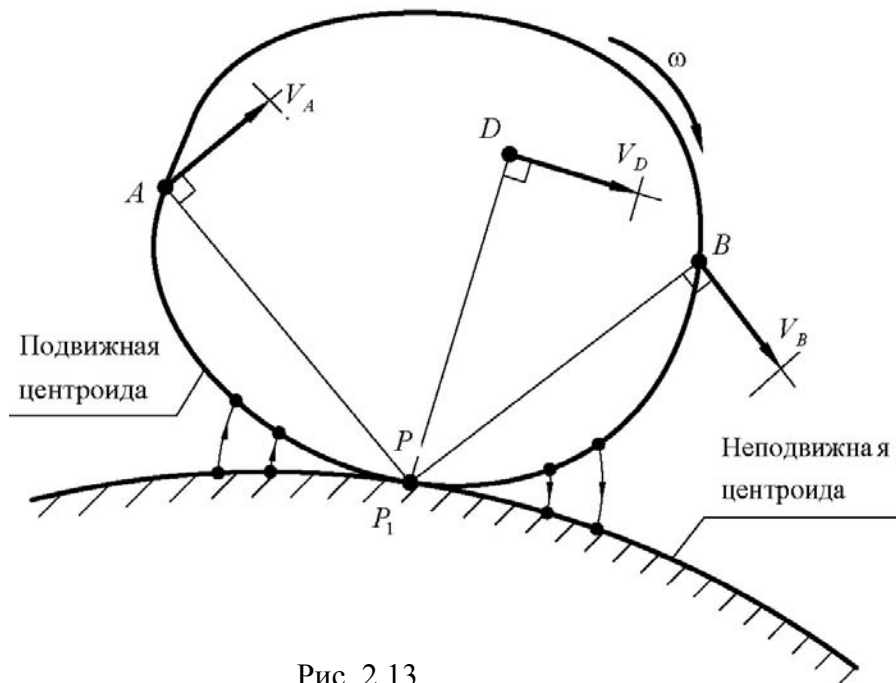


Рис. 2.13

Условие контакта двух тел состоит в том, что проекции скоростей точек, находящихся в контакте, на перпендикуляр к общей касательной плоскости в точке контакта одинаковы. Отсутствие проскальзывания означает, что проекции скоростей точек на общую касательную плоскость также совпадают. Следовательно, скорости т. P , принадлежащей движущейся плоской фигуре, и т. P_1 , совпадающей с т. P , но принадлежащей неподвижной кривой, одинаковы: $v_P = v_{P_1} = 0$ и, таким образом, т. P является мгновенным центром скоростей (символ P наряду с C_V является общепринятым обозначением МЦС).

Скорости любой точки плоской фигуры можно определить, если известна угловая скорость: $v_A = \omega AP$, $v_B = \omega BP$ и т.д.

Отметим, что, например, $v_A \perp AP$. Скорость т. A должна быть направлена по касательной к траектории этой точки. Контур тела не является траекторией лежащих на нем точек, и поэтому скорости точек, как правило, не касательны к контуру. Например, при качении колеса по прямолинейному рельсу точки обода описывают циклоиды.



Рис. 2.14

Точка P_1 , совпадающая с мгновенным центром скоростей, но принадлежащая неподвижной плоскости, называется *мгновенным центром вращения* (МЦВ).

Геометрические места МЦС и МЦВ называют подвижной и неподвижной центроидами, соответственно. На рис. 2.13 и 2.14 их положение легко определяется.

2.4. Примеры использования метода МЦС

2.4.1. Расчет рычажного механизма

На рис. 2.15 показан плоский рычажный механизм. Входное звено OA вращается с угловой скоростью ω_1 и в данный момент времени составляет угол φ с горизонтальной осью Ox . Звено O_1B вертикально, а звено 2 имеет форму прямоугольного треугольника с острым углом $\alpha = \angle ABD$. Ползун E движется вдоль вертикальной направляющей, расположенной на расстоянии b от т. O . Необходимо определить скорости всех обозначенных на рисунке точек и угловые скорости всех звеньев механизма.

Дано: $\omega_1 = 12$ рад/с; $OA = l_1 = 0,2$ м; $AB = l_2 = 0,6$ м; $O_1B = l_3 = 0,4$ м; $DE = l_4 = 0,5$ м; $BK = 0,3BD$; $EC = 0,4DE$; $b = 0,2$; $\varphi = 45^\circ$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$.

Решение задачи следует начинать с анализа структуры механизма. Рассматривая в первую очередь узловые точки, устанавливаем последовательность их изучения: A, B, D, E . В данном случае от ведущего звена 1 до конечного звена – ползуна 5 можно пройти вдоль простой последовательности, без разветвлений. В более сложных механизмах могут быть несколько наиболее удаленных звеньев, что потребует разветвленной схемы рассмотрения задачи.

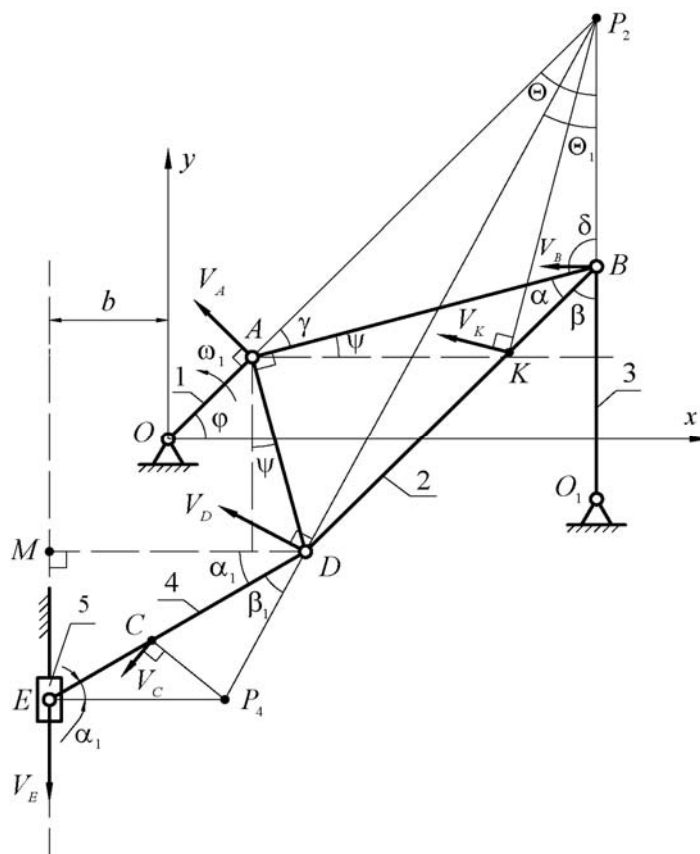


Рис 2 1

Находим скорость т. A :

$$v_A = \omega_1 \cdot OA = 12 \cdot 0,2 = 2,4 \text{ м/с.}$$

Так как т. A описывает окружность с центром в т. O и радиусом

$OA = l_1$, скорость направлена по касательной к траектории или перпендикулярно радиусу OA по направлению вращения звена.

Переходя к рассмотрению звена 2, находим, что т. B принадлежит также звену 3, вращающемуся относительно неподвижной т. O_1 . Следовательно, скорость т. B перпендикулярна радиусу O_1B .

Строим МЦС звена 2 (т. P_2), проводя через точки A и B перпендикуляры к их скоростям или, другими словами, продлевая отрезки OA и O_1B до их пересечения в т. P_2 . Зная положение МЦС звена 2, определяем направление скорости т. D этого звена, для чего соединяем ее с МЦС звена (т. P_2) и восстанавливаем перпендикуляр к отрезку P_2D .

По направлению скорости т. A и учитывая расположение МЦС P_2 определяем, что звено 2 ($\triangle ABD$) вращается по ходу часовой стрелки. В соответствии с этим указываем направления скоростей т. B и D и направление вращения звена 3. Аналогично определяем направление скорости т. K , принадлежащей звену 2.

Затем переходим к рассмотрению движения звена 4. Зная направление скоростей т. D и E (последняя движется вдоль направляющей), находим МЦС звена на пересечении перпендикуляров к скоростям т. D и E , принадлежащих этому звену (т. P_4). По направлению скорости т. D устанавливаем, что звено 4 вращается против хода часовой стрелки, а т. E движется вдоль направляющей вниз. Затем находим направление скорости т. C , восстановив перпендикуляр к отрезку CP_4 , соединяющему эту точку с МЦС звена 4.

Далее переходим к определению величин линейных и угловых скоростей. Для линейных скоростей записываем соотношения, аналогичные уравнению (2.15):

$$\begin{aligned} v_B &= \omega_2 P_2 B, & v_D &= \omega_2 P_2 D, & v_K &= \omega_2 P_2 K; \\ v_E &= \omega_4 P_4 E, & v_C &= \omega_4 P_4 C. \end{aligned}$$

В свою очередь, угловые скорости звеньев

$$\omega_2 = \frac{v_A}{P_2 A}, \quad \omega_3 = \frac{v_B}{O_1 B}, \quad \omega_4 = \frac{v_D}{P_4 D}.$$

Чтобы воспользоваться записанными соотношениями, необходимо найти длины входящих в них отрезков. В $\triangle ABP_2$ находим углы: $\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 105^\circ$, $\gamma = \varphi - \psi$, $\psi = 90^\circ - (\alpha + \beta) = 15^\circ$, $\gamma = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, $\theta = 180^\circ - (\delta + \gamma) = 45^\circ$. По теореме синусов

$$\frac{AP_2}{\sin \delta} = \frac{BP_2}{\sin \gamma} = \frac{AB}{\sin \theta}.$$

Отсюда

$$AP_2 = \frac{\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot AB = \frac{0,966}{0,707} \cdot 0,6 = 0,820 \text{ м},$$

$$BP_2 = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot AB = \frac{0,6}{\sqrt{2}} = 0,424 \text{ м},$$

$$\omega_2 = \frac{2,4}{0,82} = 2,927 \text{ рад/с}, \quad v_B = 1,241 \text{ м/с}, \quad \omega_3 = \frac{1,241}{0,4} = 3,10 \text{ рад/с}.$$

Для определения расстояния P_2D рассмотрим ΔP_2BD . По теореме косинусов

$$P_2D = \sqrt{(P_2B)^2 + (BD)^2 - 2P_2B \cdot BD \cos(\alpha + \delta)};$$

$$BD = AB / \cos \alpha = 0,6 \cdot 2 / \sqrt{3} = 0,693 \text{ м};$$

$$P_2D = \sqrt{0,424^2 + 0,693^2 - 2 \cdot 0,424 \cdot 0,693 \cos 145^\circ} = 1,07 \text{ м};$$

$$v_D = 2,927 \cdot 1,07 = 3,13 \text{ м/с}.$$

Расстояние P_2K может быть найдено по ΔP_2BK .

Для рассмотрения ΔDEP_4 необходимо найти $\angle DP_2B = \theta_1$ и расстояние

$$DM = b + OA \cos \varphi + AD \sin \psi = 0,431 \text{ м}.$$

По теореме синусов

$$\frac{P_2D}{\sin(\alpha + \delta)} = \frac{BD}{\sin \theta_1},$$

или

$$\sin \theta_1 = \frac{BD}{P_2D} \sin(\alpha + \delta) = \frac{0,693}{1,068} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,459, \quad \theta_1 = 27^\circ 19'.$$

Далее находим

$$\cos \alpha_1 = \frac{DM}{DE} = \frac{0,431}{0,5} = 0,862,$$

$$\alpha_1 = 30^\circ 27', \quad \beta_1 = 90^\circ - \alpha_1 - \theta_1 = 32^\circ 17'.$$

Используя теорему синусов

$$\frac{P_4E}{\sin \beta_1} = \frac{P_4D}{\sin \alpha_1} = \frac{DE}{\sin(180^\circ - \alpha_1 - \beta_1)},$$

находим

$$P_4E = \frac{\sin \beta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} DE = 0,3 \text{ м}, \quad P_4D = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} DE = 0,285 \text{ м}.$$

Таким образом,

$$\omega_4 = \frac{v_D}{P_4 D} = \frac{3,04}{0,474} = 10,98 \text{ рад/с},$$

$$v_E = \omega_4 P_4 E = 10,982 \cdot 0,3 = 3,30 \text{ м/с}.$$

Расстояния $P_2 K$ и $P_4 C$ могут быть определены по теореме косинусов, записанной для $\Delta K B P_2$ и $\Delta C E P_4$, соответственно. Это позволит определить скорость т. K и C .

Рассмотренный пример показывает, что аналитическое решение задачи является достаточно громоздким и сопряжено с многочисленными геометрическими расчетами. Поэтому на практике прибегают к графо–аналитическим методам. Например, при использовании метода МЦС чертеж, соответствующий рис. 2.15, следует выполнить в масштабе, который, с одной стороны, обеспечивал бы достаточную точность измерения расстояний, а с другой – не приводил к слишком большому размеру рисунка.

В рассмотренном примере удобно воспользоваться *масштабным коэффициентом* (в дальнейшем называемым *масштабом*) $\mu = 0,1$ м/мм. Звено 1 в этом случае будет изображаться отрезком в 20 мм. Измеряя расстояния точек до соответствующих мгновенных центров скоростей на чертеже и переводя их с помощью масштаба в натуральные единицы, определяем искомые скорости.

2.4.2. Кинематика механизма с подвижными осями вращения

Водило OC_3 вращается с угловой скоростью ω_n относительно неподвижной оси, проходящей через т. O (см. рис. 2.16). Оно приводит в движение колеса 2 и 3. В свою очередь колесо 1 вращается с угловой скоростью ω_1 в сторону, противоположную вращению водила. Движение колес происходит без проскальзывания. Необходимо определить угловые скорости вращения колес 2 и 3 и линейные скорости т. D и E .

Дано: $R_1 = 0,2$ м, $R_2 = 0,1$ м, $R_3 = 0,15$ м, $\varphi = 30^\circ$, $\omega_n = 20$ рад/с, $\omega_1 = 40$ рад/с, $C_2 D \perp OC_2$, $C_3 E \parallel Ox$.

Решение. Движение без проскальзывания означает, что точки касания колес имеют геометрически равные скорости. Таковыми являются т. A для колес 1 и 2 и т. B для колес 2 и 3. Кроме этого, узловыми

точками являются т. C_2 и C_3 , одновременно принадлежащие водилу и одному из колес.

Находим скорости точек колеса 2:

$$v_A = \omega_1 R_1 = 8 \text{ м/с},$$

$$v_{C_2} = \omega_H (R_1 + R_2)$$

м/с.

Учитывая скорость колеса 2 (см. пункт 2.3.2)

$$\omega_2 = \frac{v_A + v_{C_2}}{R_2} = \frac{14}{0,1} = 140$$

рад/с.

Скорость т. B направлена перпендикулярно водилу, что следует из теоремы сложения скоростей, рассматривая т. B принадлежащей звену 2 или 3. Для определения скорости т. B удобно записать теорему сложения скоростей в проекции на направление ее скорости:

$$v_B = v_{C_2} + v_{BC_2}; \quad v_{BC_2} = \omega_2 \cdot R_2 = 14 \text{ м/с}, \quad v_B = 6 + 14 = 20 \text{ м/с}.$$

Для определения угловой скорости колеса 3 находим скорость его центра C_3 из условия принадлежности этой точки водилу:

$$v_{C_3} = \omega_H (R_1 + 2R_2 + R_3) = 20 \cdot 0,55 = 11 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость колеса 3 (см. п. 2.3.2)

$$\omega_3 = \frac{v_B - v_{C_3}}{R_3} = \frac{9}{0,15} = 60 \text{ рад/с}.$$

Направления вращения колес 2 и 3 определяем по распределению скоростей точек относительно соответствующих мгновенных центров скоростей.

Положения МЦС колес 2 и 3 легко определяются расстояниями

$$P_2 C_2 = \frac{v_{C_2}}{\omega_2} = \frac{6}{140} = 0,043 \text{ м}, \quad P_3 C_3 = \frac{v_{C_3}}{\omega_3} = \frac{11}{60} = 0,183 \text{ м}.$$

Далее определяем расстояние

$$P_2 D = \sqrt{P_2 C_2^2 + R_2^2} = 0,109 \text{ м}$$

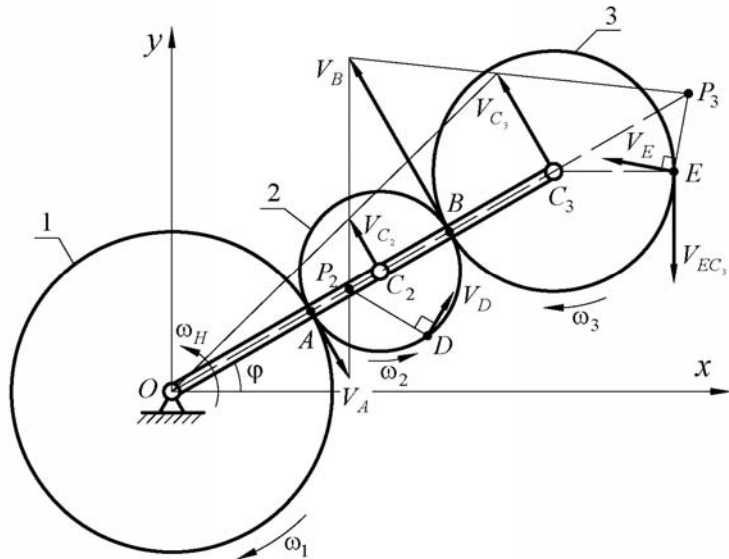


Рис. 2.16

и скорость т. D :

$$v_D = \omega_2 P_2 D = 140 \cdot 0,109 = 15,2 \text{ м/с.}$$

Учитывая, что $\Delta C_3 P_3 E$ косоугольный, скорость т. E проще определить с помощью теоремы сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_{C_3} + \mathbf{v}_{EC_3}, \quad v_{EC_3} = \omega_3 \cdot R_3 = 9 \text{ м/с.}$$

Проецируя теорему сложения скоростей на оси координат, находим

$$v_{Ex} = -v_{C_3} \sin 30^\circ = -5,5 \text{ м/с}, \quad v_{Ey} = v_{C_3} \cos 30^\circ - v_{EC_3} = 0,526 \text{ м/с},$$

$$v_E = \sqrt{5,5^2 + 0,526^2} = 5,53 \text{ м/с.}$$

Отметим также, что для угловых скоростей колес могут быть получены соотношения, выражающие их через исходные величины:

$$\omega_2 = \frac{v_A + v_{C_2}}{R_2} = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_H (R_1 + R_2)}{R_2},$$

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2} \omega_1 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \omega_H; \quad (2.23)$$

$$\omega_3 = \frac{v_B - v_{C_3}}{R_3} = \frac{v_{C_2} + v_{BC_2} - v_{C_3}}{R_3} =$$

$$= \frac{\omega_H (R_1 + R_2) + \omega_2 \cdot R_2 - \omega_H (R_1 + 2R_2 + R_3)}{R_3} =$$

$$= \frac{\omega_H (-R_2 - R_3) + [\omega_1 R_1 + (R_1 + R_2) \omega_H]}{R_3} = \frac{R_1 \omega_1 + (R_1 - R_3) \omega_H}{R_3},$$

$$\omega_3 = \frac{R_1}{R_3} \omega_1 + \left(\frac{R_1}{R_3} - 1\right) \omega_H. \quad (2.24)$$

Соотношения (2.23), (2.24) полезны тем, что при переменных угловых скоростях их можно дифференцировать для определения угловых ускорений, поскольку множителями при угловых скоростях выступают постоянные значения отношений радиусов колес.

2.5. План скоростей

Метод мгновенных центров скоростей позволяет эффективно решать многие задачи по определению скоростей точек плоских механизмов, привлекая, в том числе, и графо-аналитические методы. Однако этот метод сопряжен с необходимостью нахождения расстояний до МЦС, которые по

условию задачи определять, как правило, не требуется. Использование планов скоростей дает возможность избежать вычисления избыточных характеристик.

2.5.1. Рычажный механизм

Построение плана скоростей основывается на использовании теоремы сложения скоростей (2.8). Рассмотрим построение плана скоростей на примере рычажного механизма, изображенного на рис. 2.15. Условие задачи приведено в п. 2.4.1.

Решение задачи начинается с построения в масштабе кинематической схемы механизма (рис. 2.17).

Для определения скорости т. B записываем векторное уравнение

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}. \quad (2.25)$$

В этом уравнении известна величина скорости т. A ($v_A = \omega_1 OA = 2,4$ м/с) и направления всех векторов: $\mathbf{v}_A \perp OA$, $\mathbf{v}_B \perp O_1B$, $\mathbf{v}_{BA} \perp AB$.

Для графического представления скоростей выбираем масштаб $\mu_v = 0,04$ (м/с)/мм. Такой масштаб позволяет разместить план скоростей на листе формата А4. Выбираем произвольный полюс P и откладываем из этого полюса отрезок $pa = v_A/\mu_v = 61,75$ мм параллельно скорости v_A (рис. 2.17). В соответствии с уравнением (2.25) к этому отрезку следует прибавить отрезок $ab = v_{BA}/\mu_v$, причем $ab \parallel v_{BA}$. Поскольку относительная скорость $\mathbf{v}_{BA} \perp AB$, то и $ab \perp AB$. Но величина относительной скорости не известна. Поэтому рассмотрим левую часть уравнения (2.25). Направление скорости т. B известно. Поэтому через т. P проводим линию, параллельную v_B (т. е. перпендикулярную O_1B), а через т. a – линию, перпендикулярную AB (т. е. параллельную v_{BA}). Пересечение этих линий определяет т. b , а отрезки pb и ab соответствуют скоростям v_B и v_{BA} . Измерив полученные отрезки, находим скорости

$$v_B = \mu_v pb, \quad v_{BA} = \mu_v ab \quad \text{и} \quad \omega_2 = v_{BA} / AB.$$

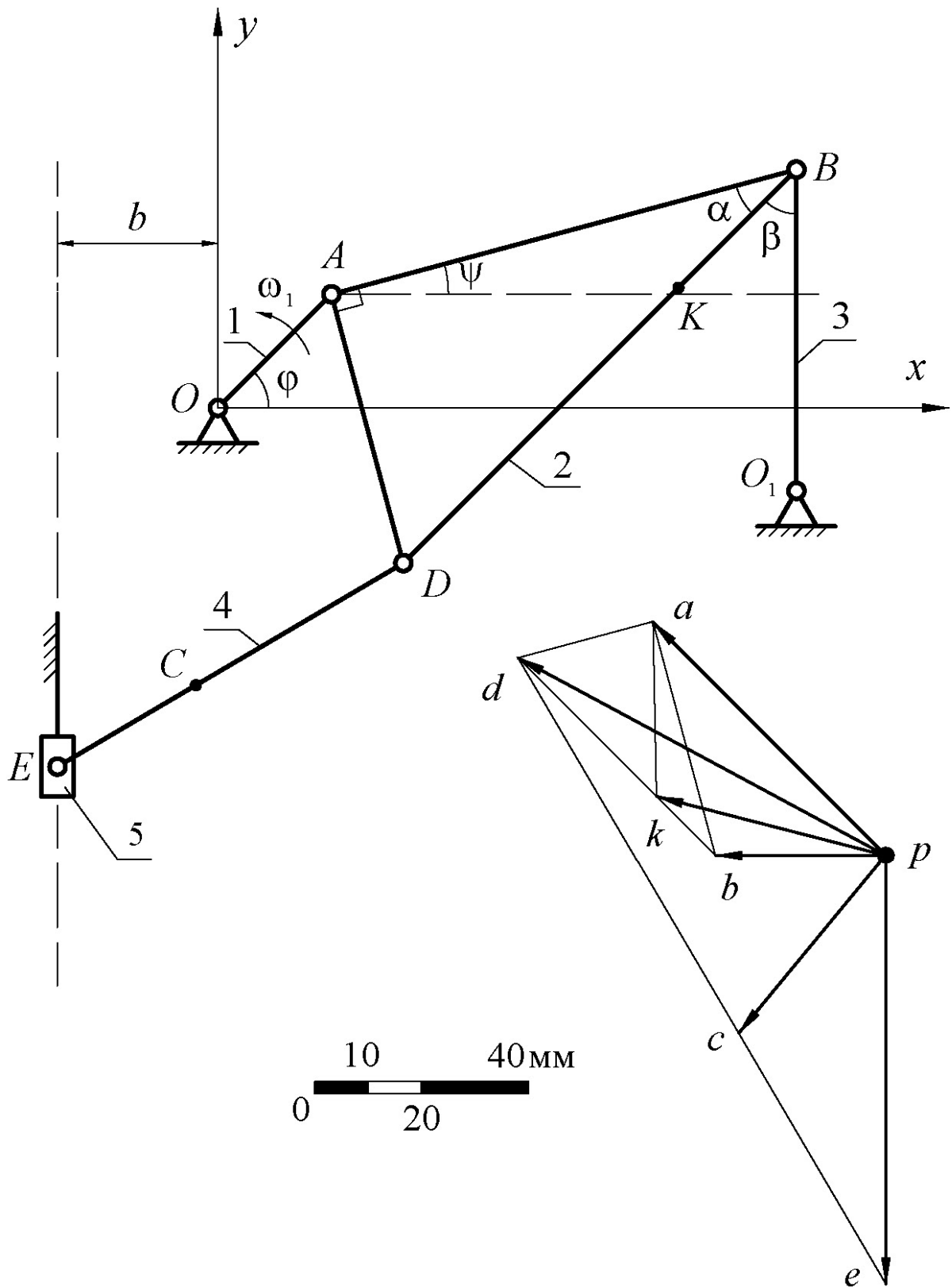


Рис. 2.17

В рассматриваемом случае

$$pb = 31,9 \text{ мм}, \quad ab = 45,2 \text{ мм}, \quad v_B = 1,24 \text{ м/с}, \quad v_{BA} = 1,76 \text{ м/с},$$

$$\omega_2 = \omega_{AB} = 2,93 \text{ рад/с}, \quad \omega_3 = v_B / O_1B = 3,10 \text{ рад/с}.$$

Полученные результаты совпадают с результатами аналитических вычислений, выполненных в разделе 2. Некоторое несоответствие (около процента) может быть связано с точностью построений плана скоростей.

Для определения скорости т. D записываем два векторных соотношения:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{DA}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{DB}. \quad (2.27)$$

На плане скоростей уже есть отрезки pa и pb , соответствующие векторам скоростей v_A и v_B . Для построения т. d следует построить отрезки $ad \perp AD$ (соответствующий скорости v_{DA}) и $bd \perp BD$ (соответствующий скорости v_{DB}). Пересечение линий, проведенных через т. a и b перпендикулярно соответственно AD и BD определяет искомую точку d .

На основании выполненного построения находим

$$v_D = \mu_v pd = 3,035 \text{ м/с}.$$

Далее определяем скорость т. E , записав теорему сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{ED}.$$

На плане скоростей через т. p проводим линию, параллельную направляющей (или скорости т. E), а через т. d – линию, перпендикулярную звену DE (или параллельную относительной скорости v_{ED}). Пересечение этих линий определяет положение т. e и соответствующие скорости:

$$v_E = \mu_v pe = 3,12 \text{ м/с}, \quad v_{ED} = \mu_v de = 5,28 \text{ м/с},$$

$$\omega_4 = \frac{v_{ED}}{DE} = 10,6 \text{ рад/с}.$$

Стороны ad , ab и bd на плане скоростей перпендикулярны сторонам AD , AB и BD $\triangle ABD$. Поскольку углы между взаимно перпендикулярными линиями одинаковы, $\triangle abd$ подобен $\triangle ABD$ ($\triangle abd \sim \triangle ABD$), причем порядок следования вершин A, B, D и a, b, d одинаков (в данном случае – по ходу часовой стрелки).

Рассмотрим методику определения скорости промежуточной точки, в качестве которой выберем т. K звена 2. Точка K лежит на

прямой BD . Запишем теорему сложения скоростей

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{KB},$$

и сопоставим ее с уравнением (2.27).

Записываем относительные скорости $v_{KB} = \omega_2 KB$, $v_{DB} = \omega_2 DB$, используя которые, находим

$$\frac{v_{KB}}{v_{DB}} = \frac{KB}{DB} = \frac{\mu_v kb}{\mu_v db} \Rightarrow \frac{kb}{db} = \frac{KB}{DB} = 0,3.$$

Это означает, что т. k на плане скоростей делит отрезок bd в той же пропорции, что и т. K отрезок BD звена 2 механизма. Аналогично находим положение т. c на прямой ed плана скоростей:

$$\frac{ec}{ed} = \frac{EC}{ED} = 0,4.$$

После построения т. k и c находим скорости т. K и C :

$$v_K = \mu_v \cdot pk = 1,72 \text{ м/с}, \quad v_C = \mu_v \cdot pc = 1,68 \text{ м/с}$$

Подводя итог, сформулируем теорему подобия: *если на плане скоростей известны положения двух точек, относящихся к некоторому звену механизма, положения остальных точек, соответствующих этому звену, определяются построением фигур подобия, отражающих расположение точек на самом звене.*

Из приведенного примера построения плана скоростей следует, что абсолютные скорости точек изображаются в виде векторов-лучей, выходящих из полюса p , а относительные – в виде векторов, соединяющих соответствующие точки. Вместе с тем направление векторов на плане скоростей не обозначается, во-первых, с целью упрощения рисунка, а во-вторых, чтобы обеспечить возможность представлять различные формы записи теоремы сложения ускорений. Например,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}.$$

Сопоставляя рис. 2.15 и 2.17, можно отметить, что план скоростей существенно компактнее рисунка с мгновенными центрами скоростей. На плане скоростей, как и на рис. 2.15, можно определить углы и найти все скорости аналитически, решая соответствующие треугольники. Однако преимущество графических представлений (метод МЦС на рис. 2.15 и план скоростей на рис. 2.17) состоит в том, что, используя масштабы расстояний и скоростей, все результаты могут быть получены путем измерения отрезков на рисунках без громоздких аналитических вычислений.

2.5.2. Кулисный механизм

Наличие связей, допускающих не только вращательное, но и поступательное взаимное движение звеньев механизма друг относительно друга, привносит существенные особенности в методы расчета таких плоских механизмов. Основная из особенностей состоит в том, что в кинематических расчетах оказывается удобным *не ограничиваться* лишь *поступательно движущимися подвижными системами координат* (которые только и использовались в разделе 2 вплоть до данного места) при формулировке теорем сложения скоростей и ускорений, а действовать по аналогии с вычислениями, изложенными в п. 1.3 для кулисного механизма простой структуры (см. рис. 2.18).

Рассмотрим механизм, изображенный на рис. 2.18. Он содержит кулису O_2KE в виде стержня, изогнутого под прямым углом в т. K . Заданы размеры: $OA = 0,2$ м, $AB = 0,6$ м, $O_1B = 0,4$ м, $AD = 0,3$ м, $KD = 0,4$ м, $O_2K = 0,3$ м, $KE = 0,6$ м, $DN = 0,25$ м, $\omega_1 = 12$ рад/с. Отрезки AB и EK параллельны и составляют угол $\beta = 15^\circ$ с горизонтальной линией, $\varphi = 45^\circ$.

В отличие от рис. 2.15 отрезок AD вертикален. В т. D расположен ползун, который может смещаться вдоль стержня KE и вращаться относительно звена ADB . К ползуну жестко присоединен стержень DN , составляющий угол $\gamma = 45^\circ$ с направляющей KE . Необходимо определить линейные скорости обозначенных на рис. 2.18 точек и угловые скорости всех звеньев.

Построение скоростей точек A , B и D осуществляется аналогично показанному на рис. 2.17 и описанному в пп. 2.5.1. На плане скоростей отрезок pd_2 соответствует скорости т. D_2 , принадлежащей звену 2 ($\triangle ABD$). Для определения скорости т. D_4 , принадлежащей кулисе O_2KE (звено 4), выберем подвижную систему координат $Kx'y'$, связав ее с кулисой. Запишем теорему сложения скоростей для т. D_2 , используя обозначения, принятые в теории плоскопараллельного движения:

$$\mathbf{v}_{D_2} = \mathbf{v}_{D_4} + \mathbf{v}_{D_2D_4}. \quad (2.28)$$

Здесь \mathbf{v}_{D_4} является переносной скоростью т. D_2 , так как т. D_4 принадлежит подвижной системе координат и в данный момент совпадает с т. D_2 . Поскольку подвижная система координат связана со звеном 4, вращающимся относительно т. O_2 , скорость т. D_4 перпендикулярна радиусу O_2D_4 ($\mathbf{v}_{D_4} \perp O_2D_4$).

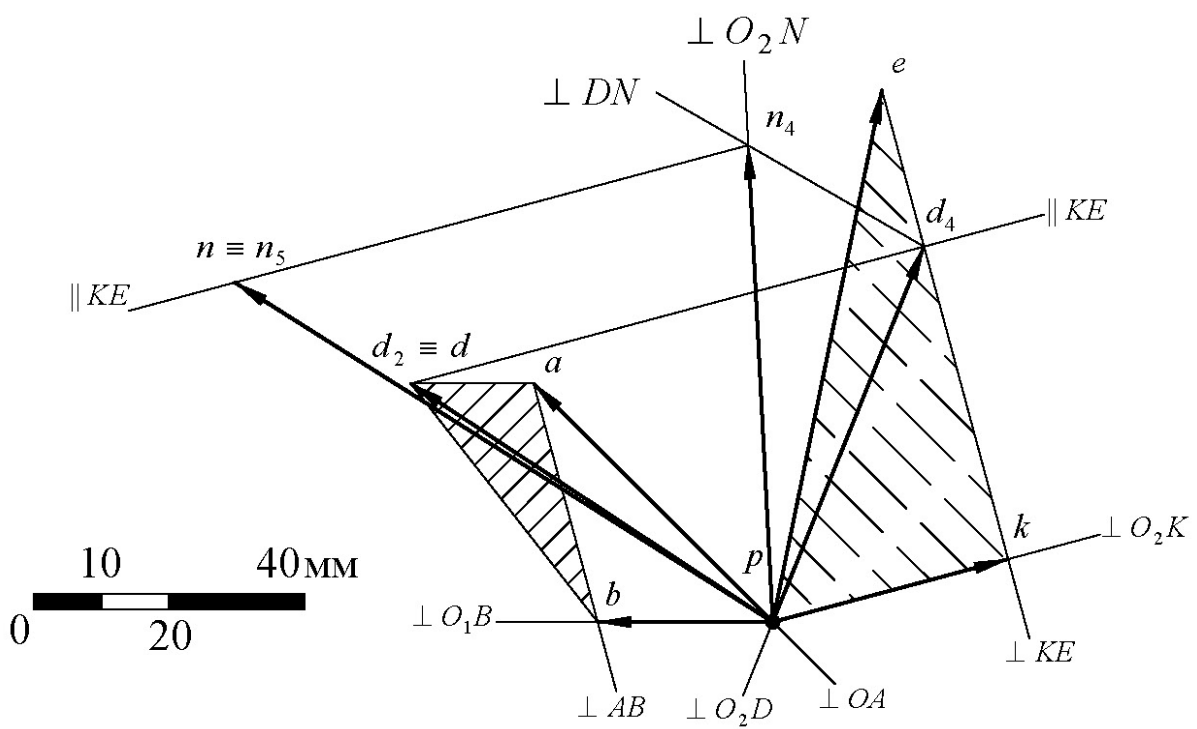
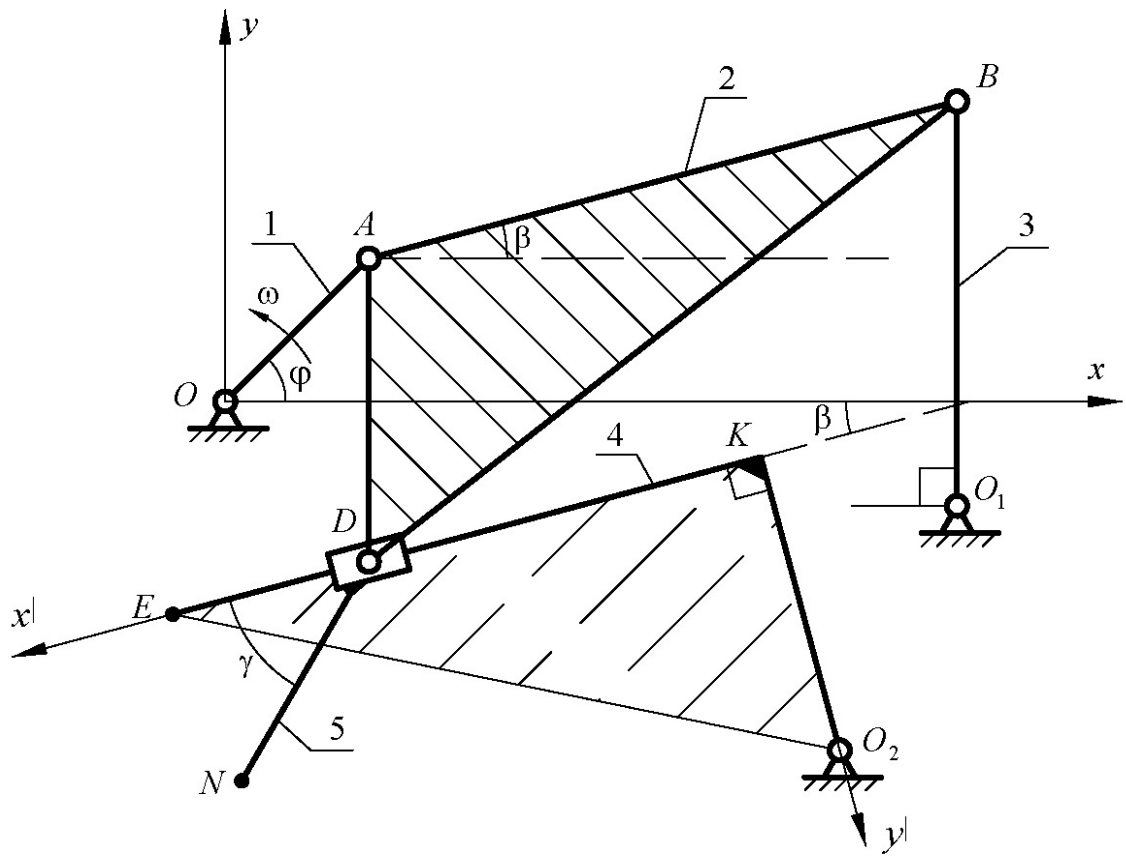


Рис. 2.18

Относительная скорость $\mathbf{v}_{D_2D_4}$ должна быть определена в подвижной системе координат $Kx'y'$. Поскольку ползун D движется вдоль стержня KE , $\mathbf{v}_{D_2D_4} \parallel KE$.

Для определения скорости т. D_4 перепишем соотношение (2.28) в виде

$$\mathbf{v}_{D_4} = \mathbf{v}_{D_2} - \mathbf{v}_{D_2D_4}, \quad (2.29)$$

или равнозначного ему уравнения

$$\mathbf{v}_{D_4} = \mathbf{v}_{D_5} + \mathbf{v}_{D_2D_5}.$$

В последней записи фигурирует скорость т. D_4 относительно т. D_5 , что означает (см. абзац после уравнения (2.5)) скорость т. D_4 в системе координат, связанной с телом 5 и с началом в т. D_5 . Отметим, что в уравнении (2.29) рассматривалась т. D_2 , принадлежащая звену 2, и с равным успехом можно было рассмотреть т. D_5 , принадлежащую звену 5, поскольку эти точки совпадают в течение всего времени движения ($D_5 \equiv D_2$). В отличие от этого в уравнении (2.30) должно присутствовать указание на подвижную систему отсчета, т. е. звено 5, движение которого отличается от движения звена 2. Здесь рассматривается ситуация, когда подвижная система отсчета связана с камнем, а не кулисой. Преимущество такого выбора в том, что в уравнении (2.30) в правой части стоит знак плюс, тогда как в уравнении (2.31) – минус.

Через т. p плана скоростей проводим прямую, перпендикулярную отрезку O_2D (т. е. параллельную скорости \mathbf{v}_{D_4}), а через т. d – параллельную отрезку KE (параллельно $\mathbf{v}_{D_2D_4}$) до их взаимного пересечения в т. d_4 .

Для определения скорости т. K проводим через т. p прямую, перпендикулярную O_2K (параллельную скорости т. K), и, пользуясь теоремой сложения скоростей (вращение относительно неподвижной оси является частным случаем плоскопараллельного движения и все теоремы последнего применимы к вращательному движению)

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_{D_4} + \mathbf{v}_{KD_4},$$

проводим через т. d_4 прямую, перпендикулярную KD (параллельную \mathbf{v}_{KD_4}). Пересечение этих двух прямых определяет т. k . Легко видеть, что $\Delta pd_4k \sim \Delta O_2DK$, как и должно быть в соответствии с теоремой подобия, сформулированной в конце пп. 2.5.1. Далее продлеваем отрезок kd_4 и откладываем на нем расстояние d_4e в соответствии с пропорцией $d_4e : kd_4 = DE : KD$.

Для определения скорости т. N запишем теорему сложения скоростей, используя $Kx'y'$ в качестве подвижной системы координат:

$$\mathbf{v}_{N_5} = \mathbf{v}_{N_4} + \mathbf{v}_{N_5N_4}. \quad (2.31)$$

Ввиду поступательного движения звена 5 по отношению к подвижному звену 4 для относительной скорости запишем $\mathbf{v}_{N_5N_4} = \mathbf{v}_{D_5D_4} = \mathbf{v}_{D_2D_4}$ ($D_5 \equiv D_2$). Для построения т. n_4 воспользуемся теоремой сложения скоростей

$$\mathbf{v}_{N_5} = \mathbf{v}_{N_4} + \mathbf{v}_{N_5N_4}, \quad (2.32)$$

а также тем, что звено 4 вращается относительно неподвижной оси и $\mathbf{v}_{N_4} \perp O_2N$. Точка n_4 определится пересечением прямых $d_4n_4 \perp DN$ и $pn_4 \perp O_2N$.

Далее откладываем отрезок $nn_4 = d_2d_4$ ($n \equiv n_5$) параллельно d_2d_4 .

Измеряя отрезки и используя масштаб $\mu_v = 0,048$ (м/с)/мм, находим скорости всех точек

$$v_B = 1,24 \text{ м/с}, \quad v_{D_2} = 3,08 \text{ м/с}, \quad v_{D_4} = 2,88 \text{ м/с}, \quad v_K = 1,73 \text{ м/с},$$

$$v_E = 3,86 \text{ м/с}, \quad v_N = 4,52 \text{ м/с},$$

и относительные скорости:

$$v_{BA} = 1,76 \text{ м/с}, \quad v_{D_2D_4} = 3,77 \text{ м/с}.$$

Угловые скорости звеньев

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{AB} = 2,93 \text{ рад/с}, \quad \omega_3 = \frac{v_B}{O_1B} = 3,10 \text{ рад/с},$$

$$\omega_4 = \omega_5 = \frac{v_{D_4}}{O_2D} \left(= \frac{v_K}{O_2K} \right) = 5,76 \text{ рад/с}.$$

Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания

1. Какое движение твердого тела называют плоскопараллельным?
2. Почему для описания плоскопараллельного движения тела достаточно изучить движение плоской фигуры?
3. Сколько степеней свободы имеет тело в плоскопараллельном движении? Как задают закон плоскопараллельного движения тела?
4. Каким приемом пользуются, чтобы избежать ограничений, обусловленных размером и очертаниями плоской фигуры?
5. В рамках каких представлений изучают движение плоской фигуры? Как обычно выбирают подвижную систему координат?

6. Суммой каких движений представляют плоскопараллельное движение? Почему?

7. Какой вид имеет теорема сложения скоростей в плоскопараллельном движении? Какие используют обозначения? Как кратко называют составляющие скорости и каково их полное определение?

8. Как направлена и чему равна скорость т. B относительно т. A , если обе точки принадлежат плоской фигуре, движущейся с угловой скоростью ω ?

9. Как формулируется теорема о проекциях скоростей?

10. Какие используются методы для расчета скоростей точек плоской фигуры?

11. Что называют мгновенным центром скоростей плоской фигуры?

12. Как определяется положение МЦС при условии, что скорости двух точек плоской фигуры не параллельны друг другу?

13. Как определяется положение МЦС, если скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу? Рассмотрите различные случаи.

14. Скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу. Как найти угловую скорость, не определяя расстояние до МЦС? Проиллюстрируйте ответ.

15. Скорости двух точек плоской фигуры антипараллельны. Как найти угловую скорость, не определяя расстояния до МЦС? Проиллюстрируйте ответ.

16. Какие характерные особенности распределения скоростей плоской фигуры Вы можете назвать?

17. Что называют узловыми точками механизма? Каков порядок кинематического расчета механизма?

18. На каких теоретических предпосылках основано построение плана скоростей механизма?

19. Постройте план скоростей для определения скорости т. D_4 , (рис. 2.18), используя уравнение (2.30).

20. Постройте план скоростей для определения скорости т. D_4 , (рис. 2.18), не используя теорему подобия.

21. Постройте план скоростей для определения скорости т. N , (рис. 2.18), используя уравнение (2.32) и теорему сложения скоростей для т. N_5 , выбрав в качестве полюса т. D .

22. Постройте план скоростей центрального кривошипно-ползунного механизма (ось направляющей ползуна проходит через

ось вращения кривошипа) при соотношении длин кривошипа и шатуна $1 : 3$ при угле в 60° поворота кривошипа от направляющей ползуна. Определите скорость центра шатуна. Длина кривошипа $0,2$ м, частота вращения 300 об/мин. Выполните построения также для угла поворота кривошипа 90° , 180° . Проверьте вычисления с помощью метода МЦС.

23. Как выбирают подвижную систему координат при рассмотрении кинематики кулисного механизма? Какие существуют возможности выбора подвижной системы координат и в чем их особенности?

24. Постройте план скоростей кулисного механизма, изображенного на рис. 1.6, и определите скорость т. B , если $O_1B = 2$ м при $\varphi = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$.

25. Постройте план скоростей кулачкового механизма, изображенного на рис. 1.4, и дайте ответ на вопросы сопровождающей этот рисунок задачи.

26. Решите задачу, сопровождающую рис. 2.4, методом МЦС. Сопоставьте результат с приведенным решением.

3. УСКОРЕНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

3.1. Рычажные механизмы

В отличие от нескольких методов, используемых для расчета скоростей (теорема о проекциях скоростей двух точек, метод мгновенных центров скоростей, теорема сложения скоростей, план скоростей), при расчете ускорений применяются, в основном, лишь два метода – теорема сложения ускорений и план ускорений, – причем второй является графической реализацией первого.

В качестве примера рассмотрим механизм, изображенный на рис. 3.1 (2.15, 2.17). Для определения ускорения узловой т. B запишем теорему сложения ускорений, используя в качестве подвижной поступательно движущуюся систему координат $Ax'y'$ с началом в полюсе A :

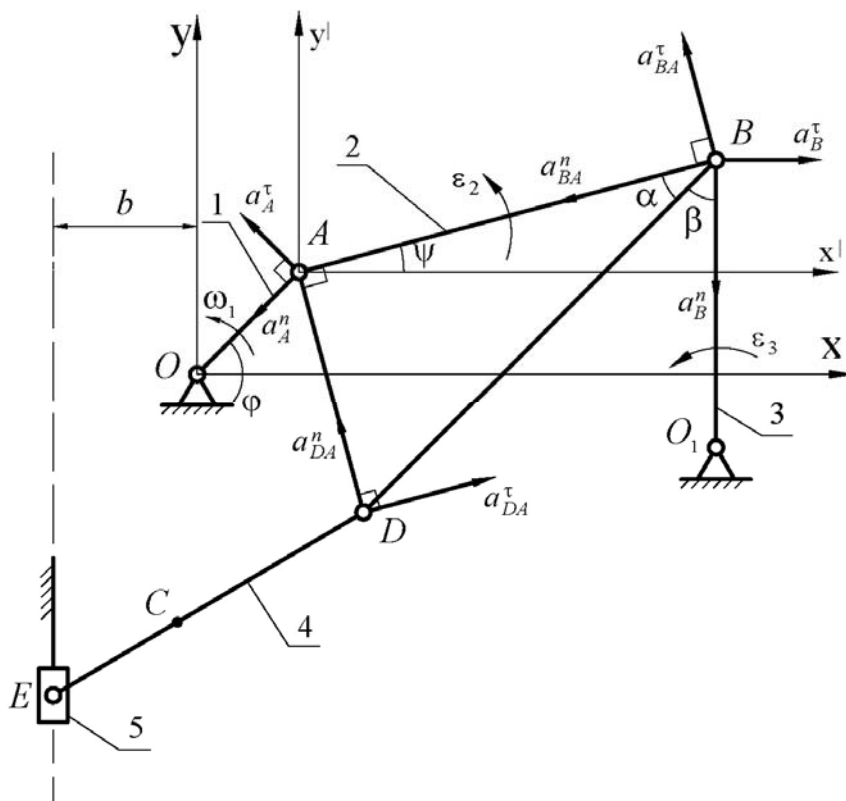


Рис. 3.1

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^{(e)} + \mathbf{a}_B^{(r)} + \mathbf{a}_B^{(c)}, \quad (3.1)$$

где ускорение Кориолиса $\mathbf{a}_B^{(c)} = 0$, поскольку переносное движение является поступательным ($\omega_e = 0$); переносное ускорение $\mathbf{a}_B^{(e)} = \mathbf{a}_A$ в силу той же причины; относительное ускорение $\mathbf{a}_B^{(r)} = \mathbf{a}_{BA}$ является ускорением т. B относительно т. A (точнее, относительно поступательно

движущейся системы координат $Ax'y'$ с началом в полюсе A – см. обсуждение относительной скорости в п. 2.2). В относительном движении звено 2 вращается вокруг полюса A . Поэтому относительное ускорение можно представить суммой касательного и нормального ускорений:

$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^\tau, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a}_{BA}^n = \omega_2^2 AB, \quad \mathbf{a}_{BA}^\tau = \varepsilon_2 AB. \quad (3.3)$$

В свою очередь, т. A принадлежит вращающемуся звену 1. Поэтому

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^\tau, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{a}_A^n = \omega_1^2 OA, \quad \mathbf{a}_A^\tau = \varepsilon_1 OA. \quad (3.5)$$

Аналогичные соотношения могут быть записаны для ускорения т. B , рассматривая ее принадлежащей вращающемуся звену 3:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^\tau, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{a}_B^n = \omega_3^2 O_1 B, \quad \mathbf{a}_B^\tau = \varepsilon_3 O_1 B. \quad (3.7)$$

В результате теорема сложения ускорений (3.1) приобретает вид

$$\underline{\underline{\mathbf{a}_B}} + \underline{\underline{\mathbf{a}_B^\tau}} = \underline{\underline{\mathbf{a}_A}} + \underline{\underline{\mathbf{a}_A^\tau}} + \underline{\underline{\mathbf{a}_{BA}^n}} + \underline{\underline{\mathbf{a}_{BA}^\tau}}. \quad (3.8)$$

Обсудим вопрос: *достаточно ли информации для решения векторного уравнения (3.8)?*

Отметим, что вектор на плоскости может быть задан двумя алгебраическими величинами (например, его проекциями на оси координат или модулем и направлением вектора, задаваемым углом с некоторым фиксированным направлением на плоскости). Направления всех векторов, входящих в уравнение (3.8), известны: нормальные ускорения направлены вдоль соответствующих звеньев к оси вращения, касательные ускорения перпендикулярны им (рис. 2.19). В знак этого для удобства дальнейшего анализа *подчеркнем все слагаемые в уравнении (3.8) одной чертой.*

Нормальные составляющие ускорений определяются угловыми скоростями звеньев [соотношения (3.3), (3.5), (3.7)], которые были вычислены при расчете скоростей (см. пп. 2.4.1, 2.5.1) либо заданы по условию задачи. Поэтому *все нормальные ускорения в (3.8) следует подчеркнуть второй чертой.*

Звено 1 (OA) является входным, и его движение предполагается заданным, т. е. его угловое ускорение и, следовательно, величина ус-

кореня a_A^τ известны. Это позволяет подчеркнуть в уравнении (3.8) вектор a_A^τ второй чертой. Следует отметить, что направление вектора a_A^τ соответствует направлению углового ускорения звена 1, тогда как направления векторов a_B^τ и a_{BA}^τ указываются произвольно вдоль перпендикуляров к соответствующим звеньям, исходя, например, из наличия места на рисунке.

В результате выполненного анализа *на поставленный выше вопрос можно ответить утвердительно*. Действительно, в уравнении (3.8) остались неизвестными значения двух касательных ускорений a_B^τ и a_{BA}^τ , которые подчеркнуты лишь одной чертой. Поскольку векторное уравнение на плоскости эквивалентно двум алгебраическим, имеющейся информации достаточно для решения уравнения (3.8). Угловые ускорения звеньев 2 и 3 определяются по соотношениям (3.5) и (3.7) после решения уравнения (3.8). Рассмотрим методы решения векторного уравнения (3.8).

3.1.1. Аналитическое решение

Предположим, что входное звено 1 вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 12$ рад/с. Следовательно, $\varepsilon_1 = 0$ и $a_A^\tau = 0$.

Учитывая, что в качестве неизвестных в уравнении (3.8) выступают a_B^τ и a_{BA}^τ , проецируем уравнение (3.8) на направления, перпендикулярные этим векторам:

На ось Ay' (которая перпендикулярна вектору a_B^τ):

$$-a_B^n = -a_A^n \sin \varphi + a_A^\tau \cos \varphi - a_{BA}^n \sin \psi + a_{BA}^\tau \cos \psi. \quad (3.9)$$

Решая это уравнение относительно неизвестного касательного ускорения, находим

$$a_{BA}^\tau = \frac{a_A^n \sin \varphi - a_B^n - a_A^\tau \cos \varphi + a_{BA}^n \sin \psi}{\cos \psi}. \quad (3.10)$$

Вычислив абсолютные величины нормальных ускорений

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 28,8 \text{ м/с}^2, \quad a_B^n = \omega_3^2 l_3 = 3,85 \text{ м/с}^2, \quad a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = 5,14 \text{ м/с}^2.$$

и учитывая, что $a_A^\tau = 0$, определяем $a_{BA}^\tau = 18,5 \text{ м/с}^2$ и $\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_2 = 30,8 \text{ рад/с}^2$.

Второе уравнение составим, проецируя на линию, направлен-

ную вдоль отрезка AB , перпендикулярную ускорению a_{BA}^τ . При таком решении уравнения (3.8) возможная ошибка, допущенная при определении a_{BA}^τ , не скажется при определении ускорения a_B^τ :

$$-a_B^n \cos(\alpha + \beta) + a_B^\tau \sin(\alpha + \beta) = -a_A^n \cos(\varphi - \psi) - a_A^\tau \sin(\varphi - \psi) - a_{BA}^n,$$

или

$$a_B^\tau = a_B^n \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) - \frac{a_A^n \cos(\varphi - \psi) + a_A^\tau \sin(\varphi - \psi) + a_{BA}^n}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (3.11)$$

Подставив значения, получим $a_B^\tau = -30,1 \text{ м/с}^2$ и $\varepsilon_3 = |a_B^\tau|/l_3 = 75,3 \text{ рад/с}^2$.

Как было отмечено, первоначально направления касательных ускорений a_B^τ и a_{BA}^τ выбирались произвольно. В результате вычислений оказалось, что направление ускорения a_{BA}^τ указано правильно, тогда как ускорение a_B^τ в действительности направлено в сторону, противоположную указанному на рисунке. Не следует вносить исправления на рисунке, так как указанное направление совместно с отрицательным значением соответствующего ускорения однозначно определяют его действительное направление. Но при определении углового ускорения звена использован модуль касательного ускорения, и на рисунке указано действительное направление ε_3 .

После определения углового ускорения ε_2 звена 2 можно переходить к определению ускорения произвольной точки этого звена, например узловой т. D . Этого нельзя было сделать до определения ускорения т. B , так как т. D принадлежит, помимо звена 2, звену 4, которое движется плоскопараллельно. Характер движения звена 4 не позволяет получить какую-либо информацию о движении т. D , так что в теореме сложения ускорений

$$\underline{a_D} = \underline{a_A^n} + \underline{a_A^\tau} + \underline{a_{DA}^n} + \underline{a_{DA}^\tau} \quad (3.12)$$

в правой части содержатся две неизвестные величины и, следовательно, в его правой части все слагаемые должны быть подчеркнуты двумя черточками. Это можно сделать только в том случае, когда ε_2 известно:

$$a_{DA}^n = \omega_2^2 AD = \omega_2^2 AB \operatorname{tg} \alpha = 2,968 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{DA}^{\tau} = \varepsilon_2 AD = \varepsilon_2 AB \operatorname{tg} \alpha = 10,665 \text{ м/с}^2.$$

Проецируя уравнение (3.12) на оси координат, находим

$$a_{Dx} = -a_A^n \cos \varphi - a_{DA}^n \sin \psi + a_{DA}^{\tau} \cos \psi,$$

$$a_{Dy} = -a_A^n \sin \varphi + a_{DA}^n \cos \psi + a_{DA}^{\tau} \sin \psi.$$

Подставляя значения, получим

$$a_{Dx} = -10,8 \text{ м/с}^2, \quad a_{Dy} = -14,7 \text{ м/с}^2,$$

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = 18,3 \text{ м/с}^2.$$

Далее следует записать теорему сложения ускорений для узловой т. E и после определения углового ускорения звена 4 найти ускорение промежуточной т. C .

3.1.2. Мгновенный центр ускорений

По аналогии с мгновенным центром скоростей определим мгновенный центр ускорений (МЦУ) как т. Q плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю: $a_Q = 0$.

Покажем, что в общем случае такая точка существует. Пусть известно ускорение a_A полюса A плоской фигуры и ее угловая скорость ω и ускорение ε (рис. 3.2). Запишем для т. A теорему сложения ускорений, используя в качестве полюса МЦУ, предполагая, что он существует:

$$a_A = a_Q (= 0) + a_{AQ}^n + a_{AQ}^{\tau}. \quad (3.13)$$

Находим составляющие относительного ускорения т. A относительно т. Q :

$$a_{AQ}^n = \omega^2 AQ, \quad a_{AQ}^{\tau} = \varepsilon AQ.$$

Учитывая, что эти составляющие взаимно перпендикулярны,

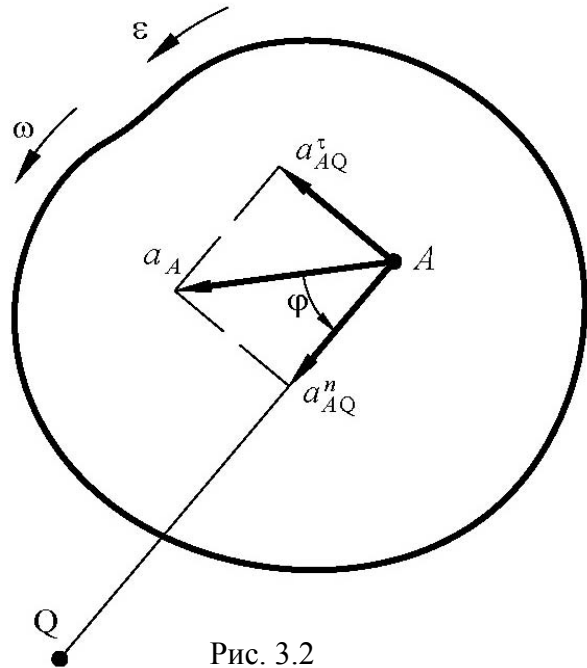


Рис. 3.2

находим угол φ между полным $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{AQ}$ и нормальным \mathbf{a}_{AQ}^n ускорениями:

$$\operatorname{tg}\varphi = a_{AQ}^\tau / a_{AQ}^n = \varepsilon / \omega^2, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(\varepsilon / \omega^2). \quad (3.14)$$

По построению (рис. 3.2) видно, что отрезок AQ составляет угол φ с вектором ускорения т. A , причем этот угол откладывается от вектора \mathbf{a}_A по направлению углового ускорения (см. также рис. 3.3).

После определения положения МЦУ легко определить ускорение произвольной точки плоской фигуры с помощью уравнения, аналогичного (3.13). Распределение ускорений точек плоской фигуры показано на рис. 3.4. Аналогично распределению скоростей ускорения точек пропорциональны их расстояниям до МЦУ:

$$a_B = \sqrt{(a_{BQ}^n)^2 + (a_{BQ}^\tau)^2} = BQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad (3.15)$$

но, в отличие от распределения скоростей, ускорения составляют с направлением на МЦУ угол φ , как правило, не равный прямому. Именно ввиду этого обстоятельства возникают сложности в определении положения МЦУ. Чтобы определить угол φ , необходимо знать, согласно соотношению (3.13), угловое ускорение ε .

В частном случае мгновенно-поступательного движения ($\omega = 0$) $\varphi = \pi/2$ и положение МЦУ определяется пересечением перпендикуляров к направлениям ускорений двух точек звена. Пример приведен на рис. 3.5 для кривошипно-ползунного механизма при $\omega_1 = \operatorname{const}$. При этом

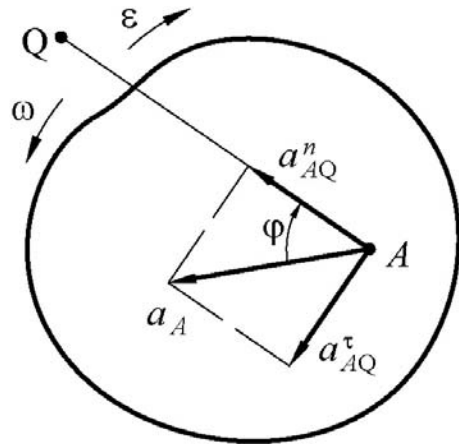


Рис. 3.3

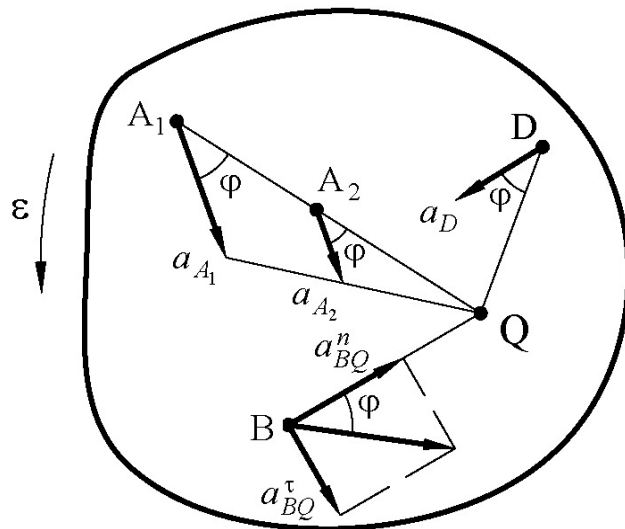


Рис. 3.4

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB} &= a_A / AQ = \\ &= \omega^2 l_1 / \sqrt{l_2^2 - l_1^2} = \\ &= 50,9 \text{ рад/с}^2 \\ &(l_1 = OA, l_2 = AB). \end{aligned}$$

В общем случае необходимо определить как угловую скорость, так и угловое ускорение звена прежде, чем можно будет определить положение его МЦУ. Для этого, как правило, нужно решить векторное уравнение вида (3.8). Воспользовавшись рассмотренным в пп. 3.1.1 примером, для звена 2 находим МЦУ, определив угол

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\varepsilon_2}{\omega_2} = 74^\circ 27'.$$

Положение МЦУ показано на рис. 3.6. После построения МЦУ определяются ускорения других точек звена. Например, для звена 2 $a_D = Q_2 D \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}$.

Метод МЦУ рационально использовать, если необходимо определять ускорения нескольких точек одного звена.

3.1.3. План ускорений

Построение плана ускорений основано на графическом решении уравнений вида (3.8) или (3.12).

Двигаясь вдоль кинематической цепи, сперва построим план ускорений звена 2 в соответствии с уравнением (3.8). Для этого выберем полюс π и начнем строить (рис. 3.7) правую часть уравнения (3.8), выбрав масштаб ускорений $\mu_a = 0,96 \text{ (м/с}^2\text{)/мм}$.

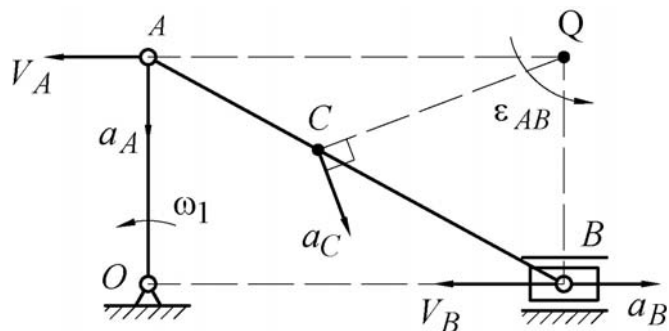


Рис. 3.5

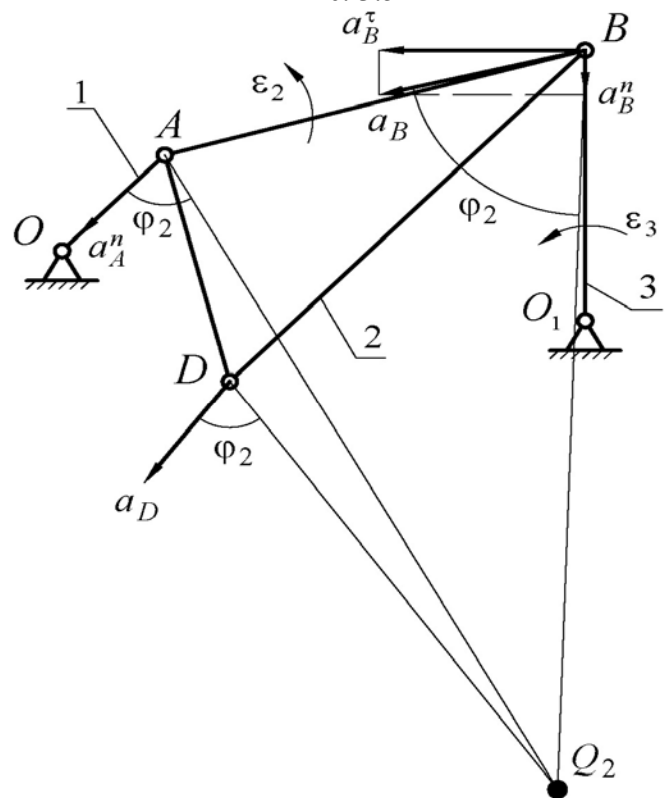


Рис. 3.4

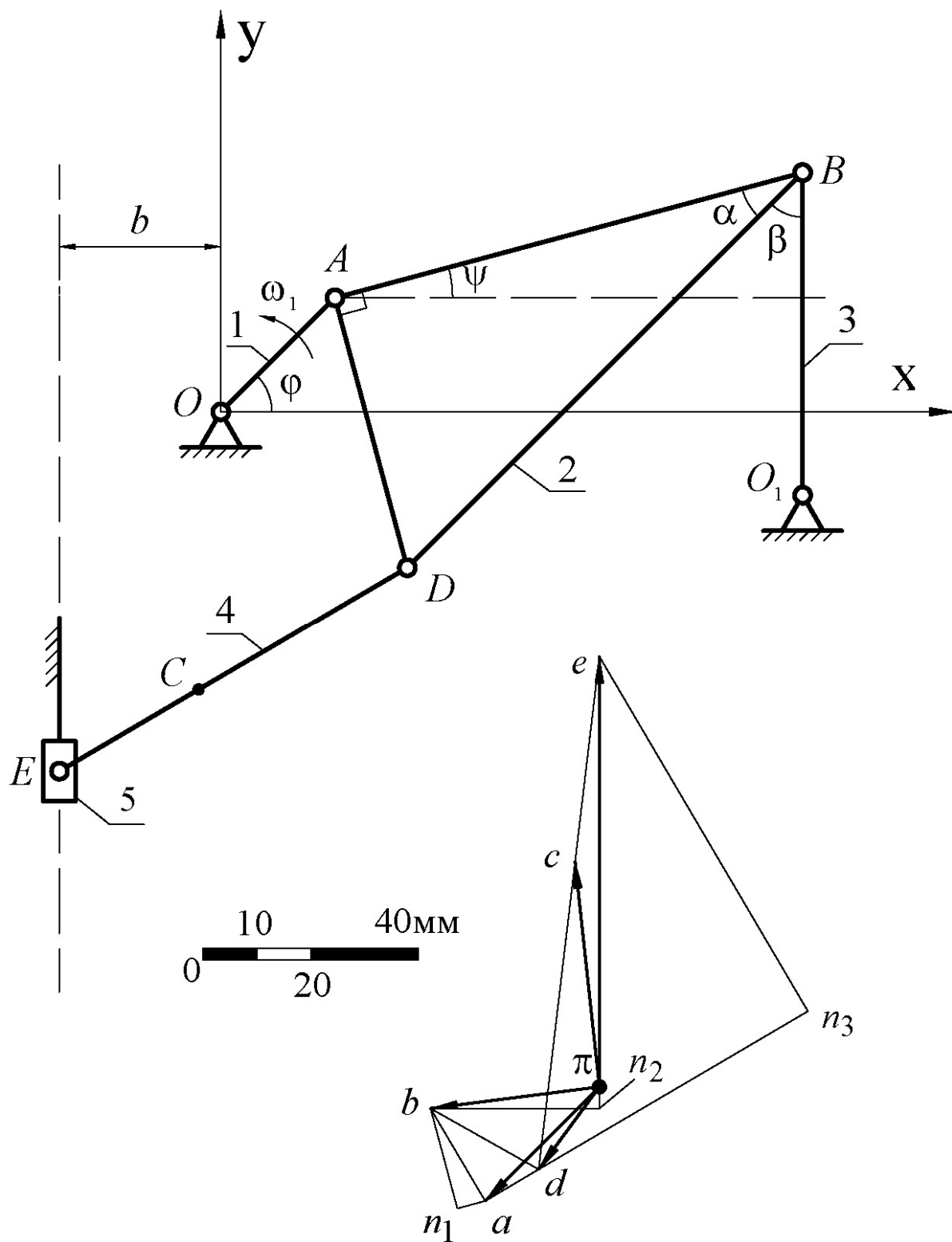


Рис. 3.7

Ускорение a_A^n направлено параллельно звену OA . Соответственно, из точки π откладываем отрезок $\pi a = a_A^n / \mu_a = 30$ мм. Так как $a_A^\tau = 0$, к этому отрезку прибавляем $an_1 = a_{BA}^n / \mu_a = 5,37$ мм, направленный параллельно отрезку AB от т. B к т. A . Через полученную т. n_1 проводим линию, перпендикулярную отрезку AB (параллельную касательному ускорению a_{BA}^τ).

Затем переходим к построению левой части уравнения (3.8). Из т. π откладываем отрезок $\pi n_2 = a_B^n / \mu_a = 4$ мм, параллельный отрезку O_1B в направлении от B к O_1 , совпадающем с направлением нормального ускорения a_B^n . Через полученную т. n_2 проводим прямую, перпендикулярную звену O_1B , т. е. параллельную касательному ускорению a_B^τ .

Пересечение двух построенных прямых определяет т. b (это позволяет найти решение уравнения (3.8)):

$$a_B^\tau = \mu_a n_2 b = 30,1 \text{ м/с}^2, \quad a_{BA}^\tau = \mu_a n_1 b = 18,5 \text{ м/с}^2, \\ a_B = \mu_a \pi b = 30,4 \text{ м/с}^2.$$

Полученные величины в пределах точности выполненных построений согласуются с результатами, найденными в пп. 3.1.1. По ускорениям a_B^τ и a_{BA}^τ определяются величины и направления угловых ускорений ε_2 и ε_3 по соотношениям, приведенным после уравнения (3.9).

Прежде чем переходить к определению ускорения т. D звена 2, отметим, что ускорение a_{BA} т. B относительно т. A составляет угол

$$\varphi_2 = \arctg(a_{BA}^\tau / a_{BA}^n) = 74^\circ 26'$$

с направлением отрезка BA , причем этот угол откладывается по направлению углового ускорения ε_2 . Это тот же угол, который обсуждался в пп. 3.1.2 при построении МЦС. На плане скоростей направление отрезка BA представлено отрезком ab . Следовательно, полное ускорение a_{BA} составляет угол φ с направлением отрезка BA_2 , откладываемый *против* направления углового ускорения ε_2 . Естественно, этот результат соответствует полученному в разделе 3.1.2, где угол φ_2 откладывался *от вектора ускорения* к направлению на МЦУ (совпадающему с нормальной составляющей относительного ускорения a_{BQ}^n) по направлению углового ускорения.

Аналогично можно рассмотреть ускорения a_{DA} и a_{DB} . Которые

будут повернуты на угол φ_2 , откладываемый против направления углового ускорения ε_2 от отрезка DA в первом случае и от отрезка DB – во втором. На плане ускорений прямые, параллельные \mathbf{a}_{DA} и \mathbf{a}_{DB} , должны проходить через т. a и b , соответственно. Пересечение этих прямых в соответствии с теоремами сложения ускорений $\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{DA}$ и $\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{DB}$ определит т. d , образовав $\Delta abd \propto \Delta ABD$, причем Δabd повернут на угол φ_2 против направления углового ускорения ε_2 по отношению к ΔABD . Таким образом, теорема подобия, сформулированная в конце пп. 2.5.1 для плана скоростей, остается справедливой и для плана ускорений с той лишь разницей, что в первом случае $\varphi = \pi/2$, тогда как во втором $\varphi = \text{arctg}(\varepsilon/\omega^2)$.

Определив ускорение т. D ($a_D = \mu_a \pi d$), можно переходить к рассмотрению звена DE . Для этого запишем теорему сложения ускорений для узловой т. E :

$$\underline{\mathbf{a}}_E = \underline{\mathbf{a}}_D + \underline{\mathbf{a}}_{ED}^n + \underline{\mathbf{a}}_{ED}^\tau. \quad (3.16)$$

В этом векторном уравнении направления всех векторов известны, а в качестве неизвестных выступают модули ускорений \mathbf{a}_E и \mathbf{a}_{ED}^τ . Для построения правой части уравнения (3.16) из т. d плана ускорений откладываем отрезок $dn_3 = a_{ED}^n / \mu_a = 58,0$ мм по направлению отрезка ED и через полученную т. n_3 проводим прямую, перпендикулярную ED (параллельную касательному ускорению \mathbf{a}_{ED}^τ). Переходя к построению левой части уравнения (3.16), проводим через полюс π прямую, параллельную ускорению \mathbf{a}_E (которое ориентировано вдоль направляющей). Пересечение построенных двух прямых определяет т. e и, соответственно, ускорения

$$a_E = \mu_a \pi e = 76,8 \text{ м/с}^2, \quad a_{ED}^\tau = \mu_a n_3 e = 73,4 \text{ м/с}^2,$$

а также угловое ускорение звена 4:

$$\varepsilon_4 = a_{ED}^\tau / ED = 146,9 \text{ рад/с}^2.$$

Окончательно, используя теорему подобия, находим т. c на плане ускорений из пропорции $ec/ed = EC/ED$, или $ec = (FC/ED) ed = ed/3 = 38,4$ мм и $a_c = \mu_a \pi c = 40,4 \text{ м/с}^2$.

3.2. Кулисный механизм

Как было отмечено выше, для расчета скоростей механизма, в котором наложенные связи допускают относительное поступательное движение подвижных звеньев, целесообразно использовать не только поступательно движущиеся системы координат. Это же замечание справедливо и по отношению к расчету ускорений. Основное внимание уделим построению плана ускорений, поскольку пример аналитического расчета простого кулисного механизма был дан в п. 1.3. Для более сложных механизмов аналитический расчет можно будет провести на основании записанных ниже уравнений, используемых для построения планов ускорений. Следует иметь в виду, что при аналитическом подходе основная трудность состоит в решении задач геометрии по определению углов и длин отрезков, необходимых в процессе определения скоростей и ускорений.

Для иллюстрации метода сначала рассмотрим построение плана ускорений для простого механизма, а затем исследуем систему более сложной структуры.

3.2.1. План ускорений простого механизма

Используем в качестве примера механизм, изображенный на рис. 1.6. Условие задачи, сформулированное в п. 1.3 сохраним.

В отличие от п. 1.3, подвижную систему координат свяжем с камнем 2 и используем систему обозначений, введенную в пп. 2.5.2. Теорема сложения ускорений (1.16) в этом случае примет вид

$$\underline{\underline{\mathbf{a}_{A_3}^n}} + \underline{\underline{\mathbf{a}_{A_3}^\tau}} = \underline{\underline{\mathbf{a}_{A_2}^n}} + \underline{\underline{\mathbf{a}_{A_2}^\tau}} + \underline{\underline{\mathbf{a}_{A_3A_2}}} + \underline{\underline{\mathbf{a}_{A_3A_2}^c}}. \quad (3.17)$$

Рассматривается абсолютное движение т. A_3 , принадлежащей звену 3 (кулисе). Тогда ускорение т. A_2 , принадлежащей звену 2 (с которым связана подвижная система координат) и совпадающей в данный момент с т. A_3 , является переносным ускорением. Поскольку звено 1 вращается относительно неподвижной оси, проходящей через т. O перпендикулярно плоскости рисунка и $A_2 \equiv A_1$, переносное ускорение раскладывается на две составляющие (нормальную и касательную). Ускорение $\mathbf{a}_{A_1A_2}$ является относительным ускорением, направленным, как и относительная скорость, вдоль оси y' . Подвижная система координат находится в плоскопараллельном движении с угловой скоростью $\omega_2 = \omega_3$, поэтому ускорение Кориолиса

$$\mathbf{a}_{A_3A_2}^c = 2\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{v}_{A_3A_2} \quad (3.18)$$

Направления всех векторов, входящих в уравнение (3.17), известны. Поэтому все слагаемые в нем можно подчеркнуть одной чертой.

До решения уравнения (3.17) по условию задачи или по результатам расчета скоростей в п. 1.3 известны величины $a_{A_1}^n = a_A^n = 21,6 \text{ м/с}^2$, $a_{A_3}^n = \omega_3^2 OA = 5,71 \text{ м/с}^2$, $a_{A_3 A_2}^c = 9,01 \text{ м/с}^2$. Они определяются лишь угловой скоростью $\omega_1 = \omega$ ведущего звена и не зависят от его углового ускорения. Последнее определяет касательное ускорение т. A_1 $a_{A_2}^\tau = \varepsilon_1 OA = 0$, поскольку $\omega_1 = \text{const}$. Соответствующие четыре вектора в уравнении (3.17) подчеркнуты второй чертой. В качестве неизвестных остаются модули двух ускорений: $a_{A_3}^\tau$ и $a_{A_3 A_2}$.

Для построения плана ускорений выбираем масштаб ускорений $\mu_a = 0,18 \text{ (м/с}^2\text{)/мм}$ и полюс π и, начиная с этого полюса, строим поочередно левую и правую части уравнения (3.17) (см. рис. 3.8).

Откладываем отрезок $\pi a_{3n} = a_{A_3}^n / \mu_a = 31,7 \text{ мм}$ параллельно AO_1 и перпендикулярно ему проводим линию, соответствующую касательному ускорению т. A_3 .

Затем переходим к правой части уравнения (3.17). Ус-

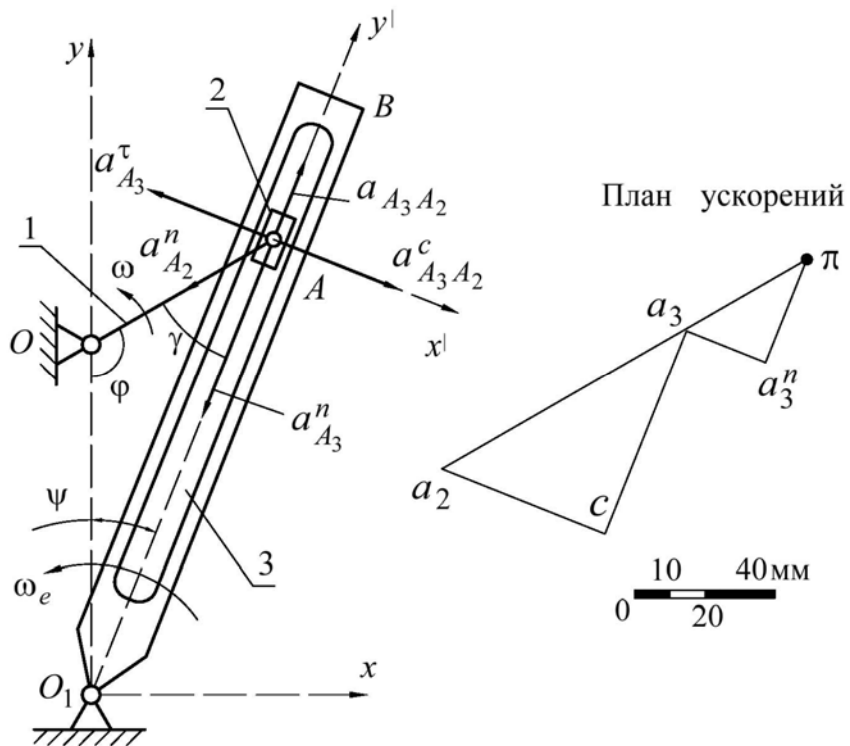


Рис. 3.8

корению $a_{A_2}^n$ ставим в соответствие отрезок $\pi a_2 = a_{A_2}^n / \mu_a = 120 \text{ мм}$, направленный параллельно отрезку AO . Через полученную т. a_2 проводим отрезок $a_2 c = a_{A_3 A_2}^c / \mu_a = 50 \text{ мм}$. Направление этого отрезка противополо-

ложно ускорению Кориолиса, найденному в п. 1.3, потому что здесь используется иная подвижная система координат и относительные скорости взаимно противоположны ($v_{A_3A_2} = -v_{A_2A_3}$). Через полученную т. c проводим линию, параллельную оси O_1x' в соответствии с направлением относительного ускорения.

Пересечение двух построенных линий определяет т. a_3 и величину ускорения $a_{A_3} = \mu_a \pi a_3 = 7.0 \text{ м/с}^2$. Наряду с этим касательное ускорение $a_{A_3}^\tau = \mu_a a_{3n} a_3 = 4,36 \text{ м/с}^2$ и, следовательно, угловое ускорение звена 3 $\varepsilon_3 = a_{A_3}^\tau / O_1A = 3,12 \text{ рад/с}^2$.

3.2.2. Рычажный механизм, содержащий кулису

Вспользуемся примером, рассмотренным в пп. 2.5.2. Схема механизма приведена на рис. 2.18. Исходные данные задачи сохраняются, включая постоянство угловой скорости ведущего звена. Расчет ускорений, включая т. D_2 звена 2, повторяет построения, выполненные в пп. 3.1.3. Отличие состоит в том, что $\triangle ABD$ в данном случае является прямоугольным. Это обстоятельство учтено при использовании теоремы подобия.

В пп.3.1.3 т. D_2 и D_4 , принадлежащие звеньям 2 и 4, имеют в течение всего времени движения одинаковые векторы скоростей и ускорений и являются фактически одной точкой. В рассматриваемом примере т. D_2 движется относительно т. D_4 вдоль отрезка KE , если выбрать подвижную систему координат, связанную с кулисой O_2KE .

Для расчета кинематических характеристик звена 4 (кулисы) свяжем с ним подвижную систему координат $Dx'y'$ и запишем теорему сложения ускорений для т. D_4 :

$$\underline{\underline{a_{D_4}^n}} + \underline{\underline{a_{D_4}^\tau}} = \underline{\underline{a_{D_5}}} + \underline{\underline{a_{D_4D_5}}} + \underline{\underline{a_{D_4D_5}^c}}, \quad a_{D_5} = a_{D_2}. \quad (3.19)$$

Здесь ускорение т. D_2 определено предыдущим построением. Нормальную составляющую переносного ускорения $a_{D_4}^n$ и ускорение Кориолиса т. D_2 определим опираясь на результаты расчета скоростей, полученные в пп. 2.5.2:

$$a_{D_4}^n = \omega_4^2 O_2D = 16,6 \text{ м/с}^2, \\ a_{D_2}^c = 2\omega_5 \times v_{D_4D_5}, \quad \omega_5 = \omega_4, \quad v_{D_4D_5} = -v_{D_2D_4}, \quad a_{D_2}^c = 2\omega_4 v_{D_2D_4}.$$

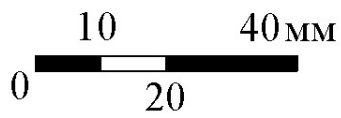
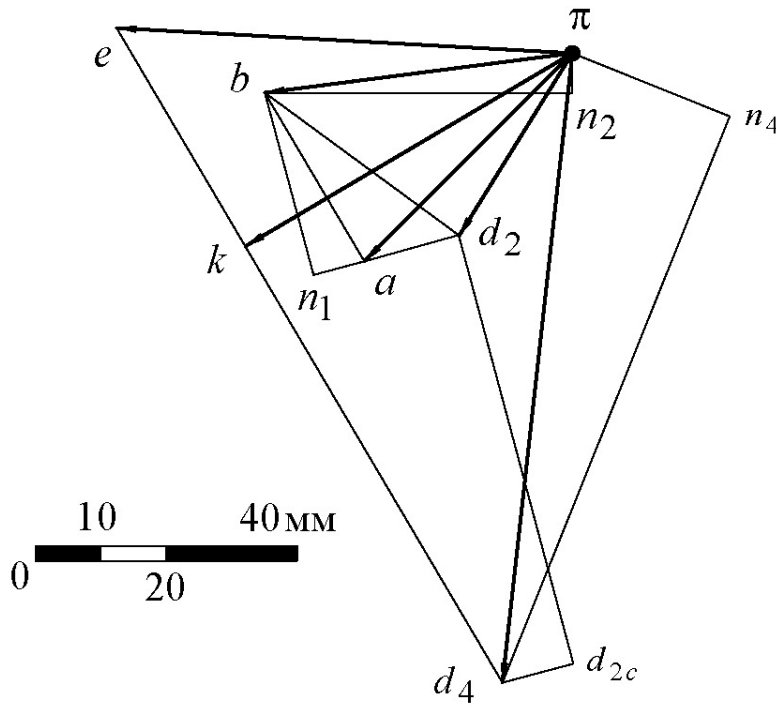
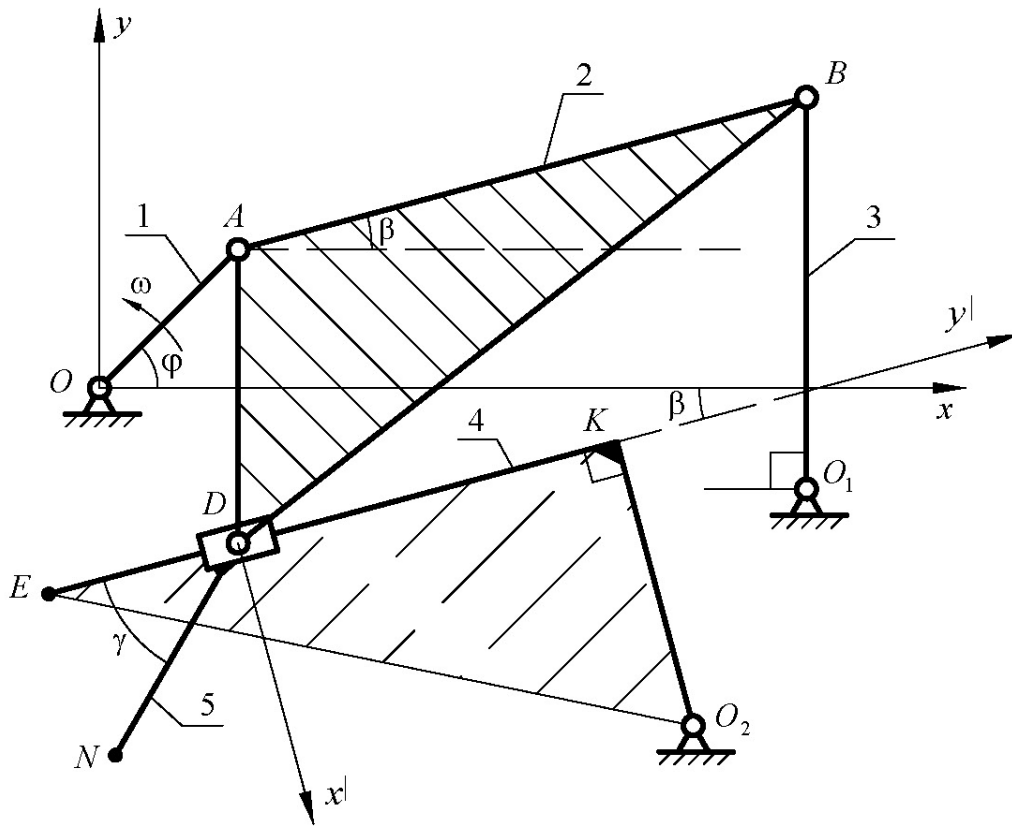


Рис. 3.9

Первое из этих ускорений направлено вдоль DO_2 , тогда как второе перпендикулярно отрезку KE и направлено вверх в соответствии с правилом Жуковского (или правой руки).

На имеющейся части плана ускорений, содержащей т. d_2 , откладываем отрезок $d_{2c} = a_{D_2}^c / \mu_a = 43,11 / 0,64 = 67,4$ мм в направлении ускорения Кориолиса (перпендикулярно отрезку KE вниз).

Через полученную т. d_{2c} проводим прямую, параллельную отрезку KE , соответствующую не известному по величине относительному ускорению $a_{D_2D_4}$. Тем самым правая часть уравнения (3.19) построена.

Для построения левой части из полюса π откладываем отрезок $\pi n_4 = a_{D_4}^n / \mu_a = 25,92$ мм, соответствующий нормальному ускорению $a_{D_4}^n$, и направленный параллельно отрезку D_4O_2 . Прямая, проведенная через т. n_4 перпендикулярно этому отрезку, соответствует не известному по величине касательному ускорению $a_{D_4}^\tau$.

Пересечение полученных двух прямых определяет положение т. d_4 и, соответственно, ускорение т. D_4

$$a_{D_4} = \mu_a \pi d_4 = 62,0 \text{ м/с}^2,$$

а также касательную составляющую ускорения:

$$a_{D_4}^\tau = \mu_a n_4 d_4 = 59,7 \text{ м/с}^2.$$

Последняя позволяет определить угловое ускорение звена 4:

$$\varepsilon_4 = a_{D_4}^\tau / O_2D = 119,4 \text{ рад/с}^2.$$

Точка O_2 неподвижна, и ее ускорение равно нулю. На плане ускорений ей соответствует полюс π . Таким образом, для звена 4 имеем две т. $\pi(O_2)$ и $d_4(D_4)$. Используя теорему подобия, строим фигуру $\pi k d_4 e \propto O_2 K D_4 E$ и находим ускорения соответствующих точек:

$$a_K = \mu_a \pi k = 37,2 \text{ м/с}^2, \quad a_E = \mu_a \pi e = 44,7 \text{ м/с}^2.$$

Определение кинематических характеристик звена 5 и принадлежащей ему т. N предлагается студенту выполнить самостоятельно.

Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания

1. Какие методы используются для расчета ускорений плоских механизмов?
2. Какой вид имеет теорема сложения ускорений в плоскопарал-

лельном движении? Какие используются обозначения? Как кратко называют составляющие ускорения и каково их полное определение?

3. На какие составляющие разлагается ускорение т. В относительно т. А? Как эти составляющие направлены и чему они равны?

4. Чему равно ускорение Кориолиса в теореме сложения ускорений плоского движения? Почему?

5. При скольких неизвестных разрешимо векторное уравнение на плоскости? Как производится анализ разрешимости теоремы сложения ускорений?

6. Почему расчету ускорений точек плоского механизма должен предшествовать расчет скоростей?

7. Почему сначала необходимо выполнить расчет ускорений узловых точек звена и только затем – промежуточных?

8. Какие существуют методы решения векторного уравнения, выражающего теорему сложения ускорений? В чем состоят их достоинства и недостатки?

9. Какие сведения из геометрии часто используются при аналитическом решении теоремы сложения ускорений?

10. Почему проекция ускорения любой точки плоской фигуры на ось, проходящую через эту точку из полюса, не может быть больше проекции ускорения полюса на эту ось?

11. Какую точку называют мгновенным центром ускорений?

12. Перечислите известные Вам способы определения положения мгновенного центра ускорений.

13. Может ли мгновенный центр ускорений совпадать с мгновенным центром скоростей?

14. В чем состоит сложность определения положения МЦУ по сравнению с МЦС? В каком случае для определения положения МЦУ не требуется нахождения углового ускорения плоской фигуры?

15. Что можно сказать о распределении ускорений плоской фигуры?

16. В каких случаях рационально использовать метод мгновенного центра ускорений?

17. Какие теоретические положения лежат в основе построения плана ускорений?

18. Как вводится масштабный коэффициент (масштаб) ускорений? Как определяют ускорения точек с помощью масштаба ускорений?

19. В чем состоит теорема подобия, используемая при построении

нии плана ускорений?

20. В чем состоит особенность расчета ускорений кулисного механизма?

21. Как выбирают подвижную систему координат при расчете кулисного механизма? В чем состоит ее принципиальное отличие от подвижных систем координат, используемых для расчета рычажных механизмов? К каким последствиям это приводит?

22. Постройте план ускорений для механизма, изображенного на рис. 3.5, и определите ускорение т. C по условию сопровождающего рисунка примера.

23. Рассмотрите пример, сопровождающий рис. 2.5, методом плана ускорений.

24. Рассмотрите пример, сопровождающий рис. 2.5, методом плана ускорений при угле поворота кривошипа 120° , 180° (угол отсчитывается от направления OB против хода часовой стрелки).

25. Определите кинематические характеристики звена 5 и принадлежащей ему т. N в задаче, сопровождающей рис. 3.9.

4. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ.

4.1. Теоремы сложения угловых скоростей и ускорений

Рассмотрим систему двух тел (рис. 4.1), одно из которых вращается с угловой скоростью ω_1 относительно неподвижной оси Oz , проходящей через т. O , перпендикулярно плоскости рисунка, а второе вращается относительно оси $O_1z' // Oz$, причем т. O_1 принадлежит телу 1, и известна угловая скорость ω_{2r} тела 2 относительно тела 1. Необходимо определить абсолютную угловую скорость тела 2.

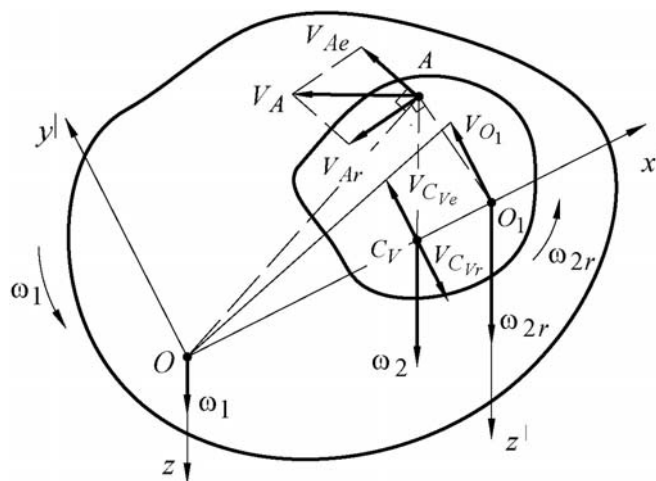


Рис. 4.1

Покажем, что тело 2 совершает плоскопараллельное движение. Для этого рассмотрим некоторую т. A этого тела. Подвижную систему координат $Ox'y'$ свяжем с телом 1 и запишем теорему сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{Ae} + \mathbf{v}_{Ar}. \quad (4.1)$$

Переносная скорость т. A лежит в плоскости рисунка и $\mathbf{v}_{Ae} \perp OA$. Ее относительная скорость также лежит в плоскости рисунка и $\mathbf{v}_{Ar} \perp O_1A$. Следовательно, абсолютная скорость т. A также лежит в плоскости рисунка, и это утверждение справедливо для любого момента времени. Это доказывает, что траектория т. A является плоской кривой. Так как т. A была выбрана произвольно, это утверждение справедливо для любой точки плоской фигуры 2. Такие же рассуждения можно повторить для точки тела 2, лежащей в любой плоскости, перпендикулярной оси вращения Oz . Это доказывает, что тело 2 движется плоскопараллельно.

При плоскопараллельном движении существует мгновенный центр скоростей C_V (МЦС). Определим его положение. Если угловые скорости ω_1 и ω_{2r} положительны, обе плоские фигуры вращаются

против направления хода часовой стрелки. По теореме сложения скоростей

$$\mathbf{v}_{C_V} = \mathbf{v}_{C_Ve} + \mathbf{v}_{C_Vr} \quad (4.2)$$

и так как $\mathbf{v}_{C_V} = 0$, то $\mathbf{v}_{C_Ve} = -\mathbf{v}_{C_Vr}$. Чтобы переносная и относительная скорости были направлены в противоположные стороны, МЦС должен находиться *между* т. O и O_1 . Далее, $v_{C_Ve} = \omega_1 OC_V$, $v_{C_Vr} = \omega_2 O_1 C_V$.

Приравнивая модули относительной и переносной скоростей, находим

$$\omega_1 OC_V = \omega_{2r} O_1 C_V, \quad (4.3)$$

или

$$\frac{OC_V}{O_1 C_V} = \frac{\omega_{2r}}{\omega_1}. \quad (4.4)$$

МЦС делит отрезок OO_1 внутренним образом в отношении, обратно пропорциональном соответствующим угловым скоростям.

Определим угловую скорость тела 2. Скорость т. O_1 $v_{O_1} = \omega_1 \cdot OO_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{v_{O_1}}{O_1 C_V} = \omega_1 \frac{OO_1}{O_1 C_V} = \omega_1 \frac{OC_V + O_1 C_V}{O_1 C_V} = \\ &= \omega_1 \left(1 + \frac{OC_V}{O_1 C_V} \right) = \omega_1 \left(1 + \frac{\omega_{2r}}{\omega_1} \right). \end{aligned}$$

Окончательно находим

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_{2r}.$$

Отметим, что угловая скорость ω_1 является скоростью движения подвижной системы отсчета и переносной угловой скоростью ($\omega_{2e} = \omega_1$).

Если угловые скорости ω_1 и ω_{2r} направлены в противоположные стороны, то C_V делит отрезок OO_1 внешним образом (рис. 4.2).

Из равенства модулей скоростей $v_{C_V} = v_{C_Vr}$ следует:

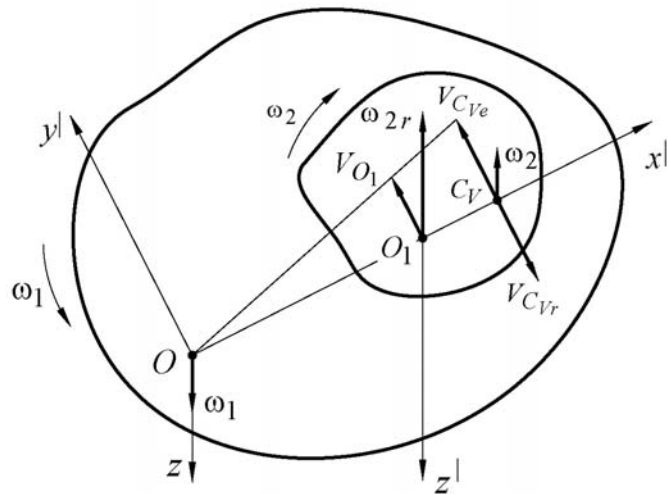


Рис. 4.2

$$\omega_1 OC_V = \omega_{2r} O_1 C_V,$$

или

$$\frac{\omega_{2r}}{\omega_1} = \frac{OC_V}{O_1 C_V}.$$

Кроме этого,

$$\omega_2 = -\frac{v_{O_1}}{O_1 C_V} = -\omega_1 \frac{OC_V - O_1 C_V}{\omega_1 C_V} = \omega_1 - \omega_{2r}.$$

Следовательно, МЦС делит отрезок OO_1 внутренним (если направления ω_1 и ω_{2r} совпадают) или внешним (если направления ω_1 и ω_{2r} противоположны) образом обратно пропорционально соответствующим угловым скоростям.

Оба случая объединяются векторным соотношением

$$\omega_2 = \omega_{2e} + \omega_{2r}, \quad \omega_{2e} = \omega_1, \quad (4.5)$$

которое выражает теорему сложения угловых скоростей.

При сложении вращений относительно параллельных осей вектор абсолютной угловой скорости (ω_2) равен сумме векторов переносной ($\omega_1 + \omega_{2e}$) и относительной (ω_{2r}) угловых скоростей. Вектор ω_2 определяет мгновенную ось вращения тела 2, проходящую через т. C_V , которая делит отрезок OO_1 внутренним или внешним образом обратно пропорционально угловым скоростям ω_1 и ω_{2r} .

Поскольку теорема сложения угловых скоростей справедлива в любой момент времени, уравнение (4.5) можно дифференцировать, что позволяет записать теорему сложения угловых ускорений:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \epsilon_{2e} + \epsilon_{2r}, \\ \epsilon_{2e} &= \epsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}, \quad \epsilon_{2r} = \frac{d\omega_{2r}}{dt}. \end{aligned}$$

Следует только иметь в виду, что мгновенная ось ускорений не совпадает с мгновенной осью скоростей и для угловых ускорений отсутствует геометрическая интерпретация сложения двух параллельных скользящих векторов.

4.2. Метод Виллиса

Теорему сложения угловых скоростей удобно использовать для расчета планетарных механизмов.

Рассмотрим механизм с двумя степенями свободы (рис. 4.3).

Заданы числа зубьев колес z_1, z_2, z_3, z_4 и угловые скорости первого и четвертого колес ω_1 и ω_4 . Необходимо определить угловую скорость водила ω_H .

Сложность расчета планетарного механизма состоит в том, что ось вращения сателлитов 2–3 подвижна и нельзя воспользоваться соотношением обратной пропорциональности угловых скоростей зацепляющихся колес

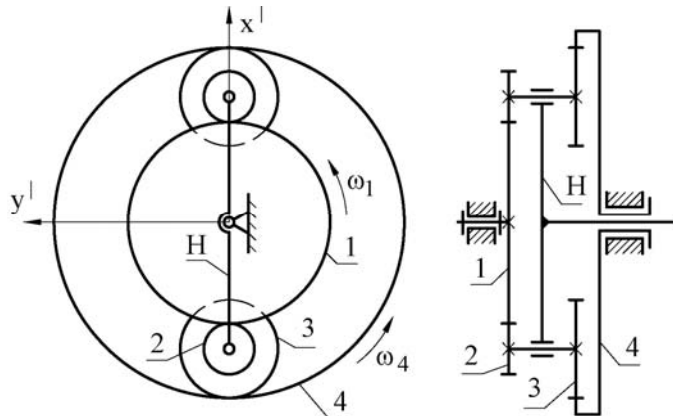


Рис. 4.3

их радиусам. Можно применить метод МЦС, как это было продемонстрировано при решении задачи в пп. 2.4.2. Но этот метод сопряжен с громоздкими расчетами.

Метод Виллиса состоит в том, что подвижная система координат выбирается связанной с водилом. Оси вращения всех колес в подвижной системе координат неподвижны, что позволяет записать для относительных угловых скоростей простые соотношения обратной пропорциональности радиусам зацепляющихся колес.

В рассматриваемом случае

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = \frac{r_4}{r_3}, \quad \text{где } \omega_{ir} = \omega_i - \omega_H. \quad (4.6)$$

В первом случае зацепление является внешним (точка контакта колес 1 и 2 расположена между их центрами), так что зацепляющиеся колеса вращаются в противоположные стороны, что учитывается знаком минус в правой части. Во втором случае зацепление внутреннее (точка контакта колес 3 и 4 расположена на прямой вне их центров) и направления относительного вращения колес совпадают. Следует подчеркнуть, что в методе Виллиса целесообразно строго придерживаться правила знаков для угловых скоростей – положительный знак соответствует вращению против хода часовой стрелки.

По условию задачи заданы числа зубьев колес, тогда как в соотношения (4.6) входят их радиусы. Связь между числом зубьев и ра-

диусом задается модулем колес. По определению модуль m равен отношению шага зубьев колеса к числу π :

$$m = h_t / \pi. \quad (4.7)$$

Учитывая, что шаг зубьев равен отношению длины окружности к числу зубьев, получим

$$m = \pi d / \pi z = d / z. \quad (4.8)$$

Поскольку зацепляющиеся колеса должны иметь одинаковый шаг зубьев, их модули также должны быть одинаковы. Поэтому для зацепляющихся колес

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (4.9)$$

т. е. отношение радиусов равно отношению чисел зубьев.

Отметим, что соотношения (4.8) и (4.9) справедливы для так называемых нулевых колес, которые наиболее широко используются. Определение нулевых колес будет дано в курсе ТММ.

При проектировании зубчатых зацеплений важно соблюсти условия соосности. Например, в рассматриваемом механизме расстояние между осями сателлитов можно определить через диаметры колес 1 и 2 или 3 и 4:

$$d_1 + d_2 = d_4 - d_3. \quad (4.10)$$

Пусть модули колес 1 и 2 равны m_1 , а колес 3 и 4 – m_4 . Тогда

$$(z_1 + z_2)m_1 = (z_4 - z_3)m_4. \quad (4.11)$$

Поскольку числа зубьев являются целыми числами, а модули зацепления в соответствии со стандартом могут принимать лишь вполне определенные значения, в общем случае при различающихся m_1 и m_4 удовлетворить соотношению (4.11) трудно. Поэтому, как правило, модули обеих пар колес выбирают одинаковыми ($m_1 = m_4$), и тогда условие соосности приобретает простой и легко реализуемый вид:

$$z_1 + z_2 = z_4 - z_3. \quad (4.12)$$

Полагаем, что условие соосности соблюдено. Часто по условию задачи известно лишь минимально необходимые числа зубьев. Числа зубьев остальных колес определяются с помощью условий соосности.

Далее отметим, что зубчатые колеса 2 и 3 жестко связаны между собой и являются одним телом. Поэтому $\omega_{2r} = \omega_{3r}$. Перемножая соот-

ношения, входящие в выражение (4.6), получим

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{4r}} = -\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = i_{14}^H. \quad (4.13)$$

По определению отношение угловых скоростей колес в передаче называют передаточным отношением. Выражением (4.13) задано передаточное отношение i_{14}^H от колеса к колесу в системе координат, связанной с водилом H . При переходе наблюдателя в подвижную систему координат водило по отношению к нему является неподвижным. Поэтому часто говорят, что передаточное отношение i_{14}^H является передаточным отношением от колеса к колесу при *остановленном* водиле.

Соотношение (4.13), переписанное в виде

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = i_{14}^H, \quad i_{14}^H = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}, \quad (4.14)$$

называют *формулой Виллиса*. Для определения угловой скорости водила перепишем эту формулу как $\omega_1 - \omega_H = i_{14}^H(\omega_4 - \omega_H)$, откуда

$$\omega_H = \frac{\omega_1 - i_{14}^H \omega_4}{1 - i_{14}^H}. \quad (4.15)$$

После определения ω_H угловая скорость сателлитов $\omega_2 = \omega_3$ может быть определена по любому из уравнений (4.6).

Соотношение (4.15) выражает угловую скорость водила через угловые скорости колес 1 и 4, причем коэффициенты при угловых скоростях являются константами. Поэтому угловое ускорение водила определяется дифференцированием по времени соотношения (4.15):

$$\varepsilon_H = \frac{\varepsilon_1 - i_{14}^H \varepsilon_4}{1 - i_{14}^H}. \quad (4.16)$$

В задаче исходными угловыми скоростями могут быть ω_H и ω_1 или ω_H и ω_4 . Незвестная угловая скорость определяется решением уравнения (4.14) или (4.15) относительно соответствующей неизвестной.

Примечание: Угловая скорость ω связана с частотой вращения n через постоянный множитель: $\omega = \pi n / 30$. Поэтому во всех соотношениях угловые скорости могут быть заменены на частоты вращения. Например, уравнение (4.15) может быть переписано в виде

$$n_H = \frac{n_1 - i_{14}^H n_4}{1 - i_{14}^H}. \quad (4.17)$$

4.3. Определение скоростей и ускорений точек сателлита

Для определения скорости и ускорения т. B (см. рис. 4.4) определим угловую скорость и угловое ускорение сателлита. Для этого воспользуемся формулой Виллиса:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = i_{12}^H = -\frac{z_2}{z_1}. \quad (4.18)$$

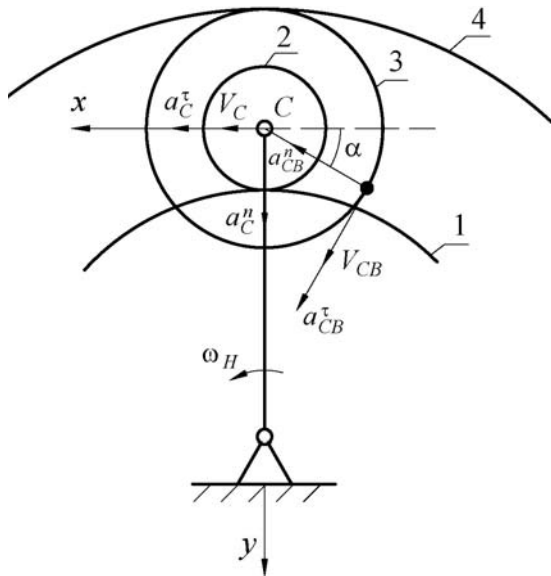


Рис. 4.4

Откуда получим

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 + \omega_H(i_{12}^H - 1)}{i_{12}^H}, \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_H(i_{12}^H - 1)}{i_{12}^H}. \quad (4.20)$$

Для определения скорости и ускорения т. B выберем в качестве полюса центр сателлита т. C и запишем теоремы сложения скоростей и ускорений:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{CB}, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{CB} = \\ &= \mathbf{a}_C^n + \mathbf{a}_C^\tau + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^\tau, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\mathbf{v}_C = \omega_H(r_1 + r_2), \quad \mathbf{v}_{CB} = \omega_2 r_3; \quad (4.23)$$

$$\mathbf{a}_C^n = \omega_H^2(r_1 + r_2), \quad \mathbf{a}_C^\tau = \varepsilon_H(r_1 + r_2), \quad \mathbf{a}_{CB}^n = \omega_2^2 r_3, \quad \mathbf{a}_{CB}^\tau = \varepsilon_2 r_3. \quad (4.24)$$

Направления векторов, входящих в (4.21) и (4.22), показаны на рис. 4.4. Для определения искомых величин необходимо провести геометрическое сложение определенных выше векторов. Для скорости это сложение может быть выполнено по правилу параллелограмма, что позволяет записать для модуля скорости т. B выражение

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{(v_C)^2 + (v_{CB})^2 + 2v_C v_{CB} \sin \alpha} = \\ &= \sqrt{\omega_H^2(r_1 + r_2)^2 + \omega_2^2 r_3^2 + 2\omega_H \omega_2 (r_1 + r_2) r_3 \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Скорость т. B может быть также определена по методу МЦС.

Для определения модуля ускорения т. B наиболее рациональным является проектирование входящих в правую часть соотношения (4.22) величин на оси декартовой системы координат. В ее качестве

может быть выбрана система координат, оси x и y которой направлены по ускорениям \mathbf{a}_C^τ и \mathbf{a}_C^n , соответственно (см. рис. 4.4). Тогда, проектируя уравнение (4.22) на эти оси, получаем

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= a_C^\tau + a_{CB}^n \cos \alpha + a_{CB}^\tau \sin \alpha = \\ &= \varepsilon_H (r_1 + r_2) + \omega_2^2 r_3 \cos \alpha + \varepsilon_2 r_3 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} a_{By} &= a_C^n - a_{CB}^n \sin \alpha + a_{CB}^\tau \cos \alpha = \\ &= \omega_H^2 (r_1 + r_2) - \omega_2^2 r_3 \sin \alpha + \varepsilon_2 r_3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.27)$$

а модуль ускорения т. B определяется по теореме Пифагора:

$$a_{Bx} = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}. \quad (4.28)$$

Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания

1. Какие движения называются относительным и переносным при сложении вращательных движений тела вокруг параллельных осей?
2. Как направлены вектора относительной, переносной и абсолютной угловых скоростей при сложении вращательных движений тела вокруг параллельных осей?
3. Что называется мгновенной осью вращения?
4. Как формулируется теорема сложения угловых скоростей?
5. Где расположен МЦС плоской фигуры, если переносная и относительная угловые скорости направлены (а) в одну сторону? (б) в противоположные стороны? Проиллюстрируйте ответ.
6. В чем состоит суть метода Виллиса? Как и почему выбирают подвижную систему координат?
7. Как записывается формула Виллиса? Чем обусловлена ее структура?
8. Что называют модулем зацепления?
9. Как определяется передаточное отношение?
10. Почему говорят о передаточном отношении при остановленном водиле?
11. Как записывается передаточное отношение через радиусы колес или числа их зубьев при внешнем и внутреннем зацеплениях?
12. Как записывают условие соосности?
13. В каком частном случае при сложении вращательных движений тела вокруг параллельных осей будет наблюдаться поступательное движение тела?

14. Как определяют угловые ускорения колес в механизмах с подвижными осями вращения?

15. Какие методы используются для определения скоростей точек сателлита?

16. Определите скорость т. B (рис. 4.4) с помощью метода МЦС.

17. Как определяются ускорения точек сателлита?

5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Рассмотренные выше методы позволяют решить любую задачу кинематики плоских механизмов с заданной степенью точности. Более того использование графических редакторов позволяет с помощью ЭВМ определять расстояния на рисунках без применения линейки и циркуля и получать результаты сразу в цифровой форме. Тем не менее при необходимости нахождения кинематических характеристик при многих положениях механизма эти методы недостаточно удобны для разработки алгоритмов автоматизированных вычислений, результаты которых в дальнейшем могли бы быть использованы и для исследования динамики механизмов.

В настоящем разделе рассмотрим метод замкнутых (в том числе векторных) контуров, позволяющий легко автоматизировать вычисление кинематических характеристик и органично их использовать для дальнейшего динамического анализа.

5.1. Кривошипно-ползунный механизм

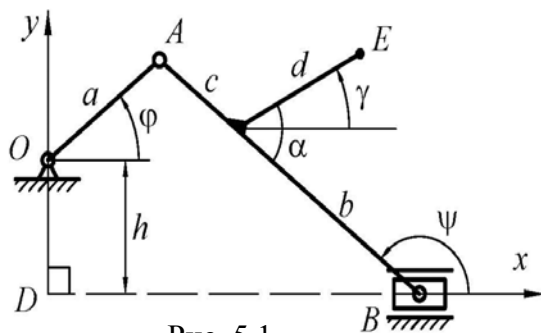


Рис. 5.1

Рассмотрим общий случай нецентрального кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рис. 5.1. К шатуну $AB = l = c + b$ под углом α жестко присоединен стержень $CE = d$. Указанные размеры a, b, c, d, h заданы, причем $l > a + h$. Отметим, что углы, определяющие положение

звеньев механизма, можно отсчитывать от любого фиксированного направления на плоскости. Однако для унификации упомянутые углы будем отсчитывать от горизонтального направления против хода часовой стрелки. Закон движения кривошипа $\varphi = \varphi(t)$ известен. Необходимо определить скорости и ускорения всех указанных на рисунке точек, а также угловую скорость и ускорение шатуна.

В качестве замкнутого контура рассмотрим четырехугольник $OABD$. Сумма проекций сторон этого четырехугольника на любую ось равна нулю. Это позволяет сформулировать два уравнения, из кото-

рых можно определить две неизвестные величины. В рассматриваемом случае таковыми являются угол ψ , определяющий ориентацию шатуна, и расстояние DB , определяющее положение ползуна B .

Выберем систему координат Dxy , как указано на рисунке. Проецируя стороны контура на ось y , находим

$$h + a \sin \varphi - l \sin \psi = 0, \quad (5.1)$$

откуда

$$\sin \psi = (h + a \sin \varphi) / l. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) имеет два решения

$$\psi = \arcsin[(h + a \sin \varphi) / l], \quad (5.3)$$

$$\psi = \pi - \arcsin[(h + a \sin \varphi) / l]. \quad (5.4)$$

Для механизма, изображенного на рис. 5.1, угол $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$ и следует выбрать решение (5.4). При ограничении $l > a + h$ правая часть уравнения (5.2) всегда меньше нуля и решение (5.4) не может перейти в решение (5.3). Угол ψ во все время движения механизма остается больше прямого угла. Решение (5.3) реализуется в том случае, когда в исходном положении механизма т. B расположена левее т. D . Это соответствует иной сборке механизма.

Для определения x -координаты т. B запишем сумму проекций сторон контура $OABD$ на ось x :

$$a \cos \varphi + l \cos(\pi - \varphi) - x_B = 0, \quad (5.5)$$

откуда

$$x_B = a \cos \varphi - l \cos \psi. \quad (5.6)$$

5.1.1. Нахождение скоростей движения точек и звеньев механизма

Для кривошипно-ползунного механизма существует простое аналитическое решение (5.2), определяющее положение шатуна. Дифференцируя это уравнение по времени, находим

$$(\cos \psi) \frac{d\psi}{dt} = \frac{a}{l} (\cos \varphi) \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.7)$$

откуда угловая скорость шатуна

$$\omega_2 = \frac{a \cos \varphi}{l \cos \psi} \omega_1, \quad (5.8)$$

причем на основании (5.2) получим

$$\cos \psi = -\sqrt{1 - \sin^2 \psi}. \quad (5.9)$$

Знак минус в последнем выражении следует из условия $\psi > \pi/2$.

Из выражения (5.8) можно найти отношение угловых скоростей:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u_{21} = \frac{a \cos \varphi}{l \cos \psi}. \quad (5.10)$$

Величину u_{21} называют *передаточной функцией* от первого звена ко второму. Численно она равна угловой скорости второго звена при единичной угловой скорости первого звена и поэтому ее также называют *аналогом угловой скорости*.

Передаточная функция может быть определена чисто геометрически, без обращения ко времени как дополнительной переменной. Соотношения (5.10) представим в виде

$$u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2/dt}{d\varphi_1/dt} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}, \quad (5.11)$$

так что *первая* (определяется первой производной) *передаточная функция* от первого звена ко второму равна производной геометрического параметра, определяющего положение второго звена (угол ψ), по аргументу, являющемуся геометрическим параметром входного звена (угол φ).

Задача кинематики скоростей сводится фактически к определению передаточных функций. Например, для угловой скорости второго звена имеем

$$\omega_2 = u_{21}\omega_1. \quad (5.12)$$

Дифференцируя соотношение (5.6) по времени, находим скорость т. B :

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= \frac{dx_B}{dt} = -a \sin \varphi \omega_1 + l \sin \psi \omega_2 = \\ &= (-a \sin \varphi + u_{21} l \sin \psi) \omega_1 = u_{1B} \omega_1. \end{aligned}$$

Здесь введен *аналог скорости* т. B , имеющий смысл передаточной функцией от звена 1 к т. B :

$$u_{B1} = -a \sin \varphi + u_{21} l \sin \psi = -(a \sin \varphi + u_{12} l \sqrt{1 - \cos^2 \psi}). \quad (5.13)$$

Найдем также скорость т. E . Очевидно, что $\gamma = \alpha - (\pi - \psi) = \alpha + \psi - \pi$. Проекция т. E на оси координат:

$$\begin{aligned} x_E &= a \cos \varphi + c \cos(\pi - \psi) + d \cos \gamma, \\ y_E &= a \sin \varphi - c \sin(\pi - \psi) + d \sin \gamma. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Дифференцируя эти соотношения по времени, получим

$$v_{Ex} = \dot{x}_E = -a \sin \varphi \omega_1 + c \sin \psi \omega_2 - d \sin \gamma \omega_2,$$

$$v_{Ey} = \dot{y}_E = a \cos \varphi \omega_1 - c \cos \psi \omega_2 + d \cos \gamma \omega_2.$$

Здесь учтено, что $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = \omega_2$. Используя последние соотношения, окончательно запишем

$$v_{Ex} = u_{Ex1} \omega_1, \quad v_{Ey} = u_{Ey1} \omega_1,$$

где передаточные функции (аналоги скоростей)

$$u_{Ex1} = -a \sin \varphi + u_{21} (c \sin \psi - d \sin \gamma),$$

$$u_{Ey1} = a \cos \varphi - u_{21} (c \cos \psi - d \cos \gamma). \quad (5.15)$$

По проекциям определяется модуль и направление скорости т. *E*.

Подобно соотношению (5.11) аналоги скоростей определяются производными по геометрическому параметру входного звена:

$$u_{1B} = \frac{dx_B}{d\varphi}, \quad u_{1Ex} = \frac{dx_E}{d\varphi}, \quad u_{1Ey} = \frac{dx_{Ey}}{d\varphi}. \quad (5.16)$$

Отношение угловых скоростей рассматривалось в гл. 4, где оно называлось передаточным числом. Различие между передаточной функцией, введенной в настоящей главе, и передаточным числом чисто терминологическое – передаточное число является постоянной величиной, тогда как передаточная функция зависит от положения механизма. Кроме того, передаточная функция, играющая роль аналога скорости, может быть размерной величиной, как, например, в соотношениях (5.16).

5.1.2. Определение ускорений движения

Для определения углового ускорения шатуна следует продифференцировать по времени соотношение (5.11):

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} (u_{21} \omega_1) = \frac{du_{21}}{dt} \omega_1 + u_{21} \varepsilon_1. \quad (5.17)$$

Передаточная функция u_{21} является функцией угла поворота кривошипа и поэтому

$$\frac{du_{21}}{dt} = \frac{du_{21}(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = u'_{21}(\varphi) \omega_1. \quad (5.18)$$

Уравнение (5.17) приобретает вид

$$\varepsilon_2 = u'_{21}(\varphi) \omega_1^2 + u_{21} \varepsilon_1. \quad (5.19)$$

Используя соотношения (5.10), (5.9) и (5.2), запишем

$$u'_{21}(\varphi) = \frac{a}{l} \left(-\frac{\sin \varphi}{\cos \psi} + \frac{\cos \varphi \sin \psi}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{d\varphi} \right). \quad (5.20)$$

Учитывая, что

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{d\psi/dt}{d\varphi/dt} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = u_{21}, \quad (5.21)$$

окончательно получим

$$u'_{21}(\varphi) = \frac{a}{l} \left(-\frac{\sin \varphi}{\cos \psi} + \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\cos^2 \psi} u_{21} \right). \quad (5.22)$$

Соотношения (5.10), (5.19) и (5.22) позволяют определить угловое ускорение шатуна при любом положении кривошипа или, другими словами, в любой момент времени.

Для определения ускорения т. *B* дифференцируем ее скорость (уравнение (5.12)) по времени:

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= \frac{d(u_{1B}(\varphi)\omega_1)}{dt} = \frac{du_{1B}(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \omega_1 + \\ &+ u_{1B}(\varphi) \frac{d\omega_1}{dt} = u'_{1B}(\varphi)\omega_1^2 + u_{1B}(\varphi)\varepsilon_1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Используя соотношение (5.13), находим

$$\begin{aligned} u'_{1B}(\varphi) &= -a \cos \varphi + u_{21} l \cos \psi \cdot \frac{d\psi}{d\varphi} + u'_{21} l \sin \psi = \\ &= -a \cos \varphi + u_{21}^2 l \cos \psi + u'_{21}(\varphi) l \sin \psi. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Аналогично определяем ускорение т. *E*. Используя соотношения (5.15), получим

$$\begin{aligned} a_{Ex} &= u'_{Ex1}(\varphi)\omega_1^2 + u_{Ex1}\varepsilon_1, \\ a_{Ey} &= u'_{Ey1}(\varphi)\omega_1^2 + u_{Ey1}\varepsilon_1. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Дифференцируя уравнения (5.16), находим производные соответствующих передаточных функций:

$$\begin{aligned} u'_{Ex1}(\varphi) &= -a \cos \varphi + u_{21}^2 (c \cos \psi - d \cos \gamma) + u'_{21} (c \sin \psi - d \sin \gamma), \\ u'_{Ey1}(\varphi) &= -a \sin \varphi + u_{21}^2 (c \sin \psi - d \sin \gamma) - u'_{21} (c \cos \psi - d \cos \gamma). \end{aligned} \quad (5.26)$$

На первый взгляд выполненные вычисления могут показаться громоздкими по сравнению с рассмотренными в гл. 2 и 3 методами. Однако их преимущества заключаются в следующем.

1. Полученные выражения справедливы для любых типов кривошипно-ползунных механизмов вне зависимости от их геометриче-

ских параметров и для любого положения механизма.

2. Полученные выражения имеют иерархическую структуру (выражения для искомых величин последовательно выводятся и входят в последующие соотношения) и поэтому удобны для составления программ вычислений на ЭВМ.

3. Универсальность таких соотношений и возможность их программной реализации на ЭВМ позволяет получать результаты с высокой точностью для данного класса механизмов.

4. Полученные кинематические зависимости легко могут быть использованы для последующего исследования динамики механизма.

5.2. Кулисный механизм

Даны длины звеньев $OA = r$, $O_1B = l$ и расстояние $O_1O = b$, а также закон движения кривошипа $\varphi_1 = \varphi = \varphi(t)$. Необходимо определить скорость и ускорение т. B .

Для решения задачи следует сначала определить угловые скорость и ускорение кулисы O_1B . Рассмотрим замкнутый контур O_1OA . Проецируя направленные отрезки этого контура на оси x и y , находим

$$b + r \cos \varphi - O_1A \cos \varphi_2 = 0, \quad (5.27)$$

$$r \sin \varphi - O_1A \sin \varphi_2 = 0. \quad (5.28)$$

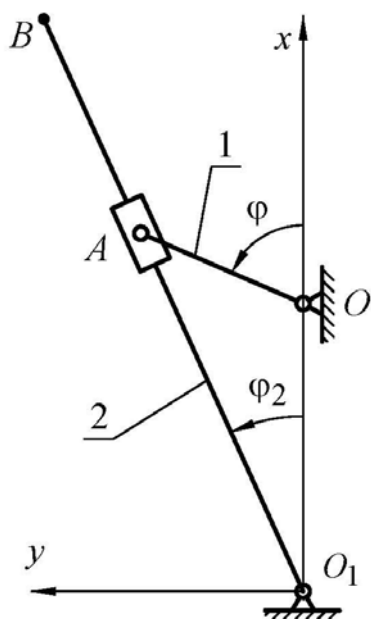


Рис. 5.2

Откуда

Перенесем последние слагаемые этих уравнений в их правые части и разделив первое уравнение на второе, получим

$$\operatorname{ctg} \varphi_2 = \frac{b + r \cos \varphi}{r \sin \varphi}. \quad (5.29)$$

Для определения передаточной функции от кривошипа OA к кулисе O_1B продифференцируем уравнение (5.29) по φ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sin^2 \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} &= \\ &= -\frac{r \sin^2 \varphi + \cos \varphi (b + r \cos \varphi)}{r \sin^2 \varphi} = \\ &= -\frac{b + r \cos \varphi}{r \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$u_{21} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} = \frac{r + b \cos \varphi}{r \sin^2 \varphi} \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi_2}, \quad (5.31)$$

где использовано тригонометрическое тождество $\sin^2 \varphi_2 = (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi_2)^{-1}$.

Используя соотношение (5.29), вычисляем

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi_2 = \frac{r^2 + b^2 + 2br \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi}, \quad (5.32)$$

так что для передаточной функции находим явное выражение

$$u_{21}(\varphi) = \frac{1 + \beta \cos \varphi}{1 + \beta^2 + 2\beta \cos \varphi}, \quad (5.33)$$

где $\beta = b/r$.

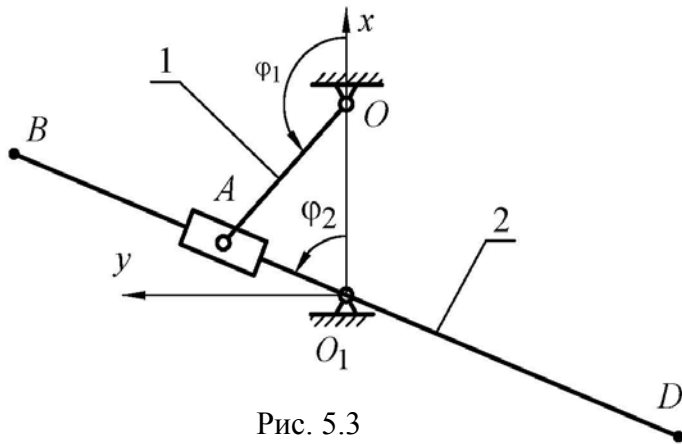


Рис. 5.3

Из соотношения (5.33) следует, что возможны три режима движения механизма:

а) при $\beta < 1$ ($b < r$) $u_{12}(\varphi) > 0$ для любых значений φ , так что кулиса может поворачиваться на полный оборот при соответствующем движении кривошипа;

б) при $\beta > 1$ ($b > r$) передаточное отношение может принимать как положительные, так и отрицательные значения и кулиса не может совершить полный оборот. При вращении кривошипа с постоянной угловой скоростью кулиса совершает качательные движения;

в) при $\beta = 1$ $u_{12} = 1/2 = \text{const}$. Кулиса совершает один оборот после двух оборотов кривошипа. Однако работоспособность механизма будет обеспечена лишь при условии, что кулиса простирается в обе стороны от т. O_1 как показано на рис. 5.3. При $-\pi < \varphi < \pi$ ползун A скользит по стержню O_1B , при последующем движении кривошипа ($\pi < \varphi < 3\pi$) скользит по стержню O_1D и затем этот цикл повторяется. Следует отметить, что при $\varphi = -(2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ положение кулисы не определено, т. е. она может занимать произвольное положение. В этом случае знаменатель выражения (5.33) обращается в нуль, что и свидетельствует о наличии особенности в поведении механизма.

После определения угловых скорости и ускорения кулисы найдем искомые величины:

$$v_B = \omega_2 \cdot O_1B, \quad a_B^n = \omega_2^2 \cdot O_1B, \quad a_B^\tau = \varepsilon_2 \cdot O_1B. \quad (5.34)$$

5.3. Шарнирный четырехзвенник

В четырехзвеннике $OABO_1$ заданы размеры звеньев $OA = r$, $AB = l_2$, $O_1B = l_3$, $OO_1 = l_4$ ($l_2 + l_3 > r + l_4$) и закон движения кривошипа $\varphi_1 = \varphi = \varphi(t)$. Необходимо определить угловые характеристики звеньев 2 и 3.

Рассмотрим замкнутый контур $OABO_1O$. Ему в соответствие можно записать векторное уравнение

$$\mathbf{OA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BO}_1 + \mathbf{O}_1\mathbf{O} = 0. \quad (5.35)$$

Спроецируем равенство (5.35) на оси координат:

$$r \cos \varphi + l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3 - l_4 = 0, \quad (5.36)$$

$$r \sin \varphi + l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 = 0. \quad (5.37)$$

Система уравнений (5.36), (5.37) является трансцендентной и включает два неизвестных угла φ_2 и φ_3 . К сожалению, в общем случае эта система не может быть решена аналитически и необходимо привлечение ЭВМ для определения зависимостей $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi)$ и $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi)$.

Предположим, что такая программа составлена и получены численные решения уравнений (5.36), (5.37). В качестве примера в приложении приведено решение этой системы уравнений в программной среде MathCad. Отметим: в последних версиях MathCad возможна запись уравнений непосредственно в векторной форме, что в наибольшей степени соответствует методу замкнутых контуров.

Далее задача состоит в нахождении передаточных функций:

$$u_{21} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi} \quad \text{и} \quad u_{31} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi}.$$

Дифференцируя уравнения (5.36) и (5.37) по φ , приходим к системе двух линейных уравнений относительно искомых передаточных функций:

$$\begin{aligned} -r \sin \varphi - l_2 \sin \varphi_2 u_{21} + l_3 \sin \varphi_3 u_{31} &= 0, \\ r \cos \varphi + l_2 \cos \varphi_2 u_{21} - l_3 \cos \varphi_3 u_{31} &= 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

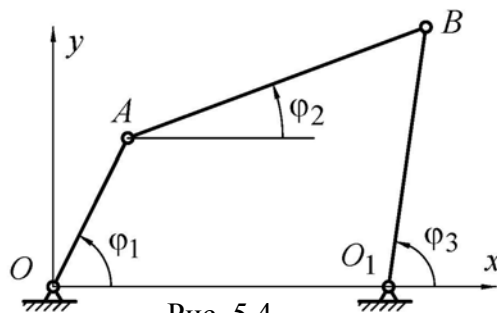


Рис. 5.4

Умножив первое из полученных уравнений на $\cos\varphi_2$, второе – на $\sin\varphi_2$ и сложив полученные уравнения, получим

$$l_3(\cos\varphi_2 \sin\varphi_3 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_3)u_{31} - r(-\cos\varphi_2 \sin\varphi + \sin\varphi_2 \cos\varphi) = 0.$$

Используя тригонометрическое тождество $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$, окончательно запишем

$$u_{31} = \frac{r \sin(\varphi_2 - \varphi)}{l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} = \frac{r \sin(\varphi - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad (5.39)$$

Умножив первое из уравнений системы (5.38) на $\cos\varphi_3$, второе – на $\sin\varphi_3$ и сложив полученные уравнения, находим

$$r(-\sin\varphi \cos\varphi_3 + \cos\varphi \sin\varphi_3) + l_2(-\sin\varphi_2 \cos\varphi_3 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_3)u_{21} = 0,$$

или

$$u_{21} = \frac{r \sin(\varphi - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}. \quad (5.40)$$

Угловые скорости звеньев

$$\omega_2 = u_{21}\dot{\varphi}, \quad \omega_3 = u_{31}\dot{\varphi}, \quad \omega = \dot{\varphi}. \quad (5.41)$$

Угловые ускорения звеньев определяются дифференцированием соотношений (5.41) по времени:

$$\varepsilon_2 = u'_{12}(\varphi)\dot{\varphi}^2 + u_{12}(\varphi)\varepsilon, \quad (5.42)$$

$$\varepsilon_3 = u'_{31}(\varphi)\dot{\varphi}^2 + u_{31}(\varphi)\varepsilon, \quad \varepsilon = \ddot{\varphi}. \quad (5.43)$$

Найдем производные передаточных функций:

$$u'_{21}(\varphi) = \frac{r}{l_2} \left[\frac{\cos(\varphi - \varphi_3)(1 - u_{31})}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{\sin(\varphi - \varphi_3)\cos(\varphi_2 - \varphi_3)(u_{21} - u_{31})}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} \right], \quad (5.44)$$

$$u'_{31}(\varphi) = \frac{r}{l_3} \left[\frac{\cos(\varphi - \varphi_2)(1 - u_{21})}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} - \frac{\sin(\varphi - \varphi_2)\cos(\varphi_3 - \varphi_2)(u_{31} - u_{21})}{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)} \right]. \quad (5.45)$$

Определив угловые характеристики звеньев, можно найти скорость и ускорение произвольной их точки, используя метод, изложенный в п. 5.1.

Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания

1. В чем состоит метод замкнутых контуров?
2. В чем состоят преимущества и недостатки метода замкнутых контуров?
3. Что называют передаточной функцией и в чем ее отличие от передаточного числа?
4. Какие соотношения используются для нахождения передаточных функций конкретного механизма?
5. Как вычислить угловые скорости звеньев механизма, если соответствующие передаточные функции известны?
6. Как вычисляют угловые ускорения звеньев с использованием передаточных функций?
7. Какая существует трудность при расчете шарнирного четырехзвенника?
8. Составьте замкнутый контур для расчета кулачкового механизма, изображенного на рис. 1.4, и запишите уравнение для определения угла φ через x -координату т. С. Найдите передаточную функцию от звена 1 к звену 2.
9. В задаче п. 8 определите угловую скорость и ускорение толкателя. Сопоставьте полученные результаты с таковыми п. 1.2. Сопоставьте также объемы вычислений в этих двух случаях.
10. Укажите последовательность расчета механизма, изображенного на рис. 3.9. Укажите замкнутые контуры и запишите системы уравнений для определения требуемых геометрических параметров.
11. Используя известный Вам программный пакет, составьте на основе результатов п. 5.1 программу вычислений кинематических характеристик звеньев кривошипно-ползунного механизма.
12. Используя известный Вам программный пакет, составьте на основе результатов п. 5.2 программу вычислений кинематических характеристик точек и звеньев кулисного механизма.
13. Выполните анимацию движения кривошипно-ползунного механизма; кулисного механизма.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В программном пакете MathCad для решения системы уравнений (5.36), (5.37) следует использовать оператор «Given» (в переводе на русский язык близко к «Задано»). Сначала открывают окно MathCad, задают параметры системы (длины звеньев), значение угла поворота ведущего звена и начальное приближение, определяемое, например, по приближенно изображенному механизму. Так, при $r = 0,1$ м, $l_2 = 0,3$ м, $l_3 = 0,2$ м, $l_4 = 0,4$ м для $\varphi = 50^\circ$ можно задать $\varphi_2 := 20^\circ$ и $\varphi_3 := 60^\circ$. Затем вводится оператор Given, после которого вводятся уравнения (5.36), (5.37). Решение системы уравнений достигается вводом оператора Find(φ_2, φ_3) (в переводе "Найти"). Ниже приведен листинг программы вычислений и полученные результаты.

```
Program Kinematics
r := 0.1    l2 := 0.3    l3 := 0.2    l4 := 0.35    pi = 3.142

phi := 50 * pi / 180    phi2 := 20 * pi / 180    phi3 := 60 * pi / 180

Given
r * cos(phi) + l2 * cos(phi2) - l3 * cos(phi3) - l4 = 0    phi2 < pi
r * sin(phi) + l2 * sin(phi2) - l3 * sin(phi3) = 0    phi3 < pi

f := Find(phi2, phi3)
f = (0.423
     1.631)
```

Следует подчеркнуть, что при задании параметров и начального приближения используется знак присваивания ($:=$), а не равенства ($=$), а при записи уравнений используют жирный знак равенства (расположен в символах булевой алгебры). Поскольку решение нелинейных уравнений не является однозначным, указан диапазон, в котором должны лежать искомые углы. Кроме этого, в программе использован переход от измерения углов в градусах к радианам и обратно.

Незначительно усложнив программу, можно реализовать анимационное представление работающего механизма. Для этого наряду с исходными данными $r = 0,1$ м, $l_2 = 0,3$ м, $l_3 = 0,2$ м, $l_4 = 0,35$ м задается диапазон изменения угла φ ($0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ с шагом 1°) и начальные значения углов φ_2 и φ_3 (по 80°). После этого производится решение

системы уравнений с помощью конструкции Given – Find. Само решение может быть представлено в графической форме.

Program Kinematics animation

$r := 0.1$ $l_2 := 0.3$ $l_3 := 0.2$ $l_4 := 0.35$ Исходные данные

$j := 0, 1 \dots 360$ $\phi_j := j \cdot \frac{\pi}{180}$ Изменение угла ϕ от 0 до 360° с интервалом в 1°

$\phi_2 := 80 \cdot \frac{\pi}{180}$ $\phi_3 := 80 \cdot \frac{\pi}{180}$ Начальные приближения углов ϕ_2 и ϕ_3

Given

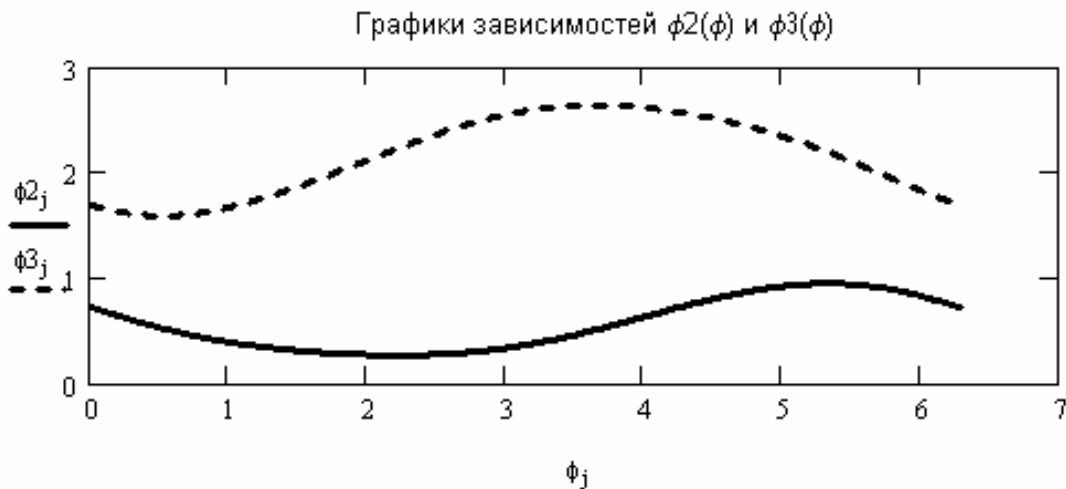
$$r \cdot \cos(\phi_j) + l_2 \cdot \cos(\phi_2) - l_3 \cdot \cos(\phi_3) - l_4 = 0 \quad \phi_2 < \pi \quad \phi_2 > 0$$

$$r \cdot \sin(\phi_j) + l_2 \cdot \sin(\phi_2) - l_3 \cdot \sin(\phi_3) = 0 \quad \phi_3 < \pi \quad \phi_3 > 0$$

$F(j) := \text{Find}(\phi_2, \phi_3)$

Решение системы уравнений

$\phi_{2j} := F(j)_0$ $\phi_{3j} := F(j)_1$



На основании определенных выше углов могут быть вычислены координаты всех шарниров механизма.

Определение координат точек механизма

$$\begin{aligned} x_{0j} &:= 0 & y_{0j} &:= 0 \\ x_{aj} &:= r \cdot \cos(\phi_j) & y_{aj} &:= r \cdot \sin(\phi_j) \end{aligned}$$

$$x_{b_j} := r \cdot \cos(\phi_j) + 12 \cdot \cos(\phi_{2j}) \quad y_{b_j} := r \cdot \sin(\phi_j) + 12 \cdot \sin(\phi_{2j})$$

$$x_{o2_j} := 14 \quad y_{o2_j} := 0$$

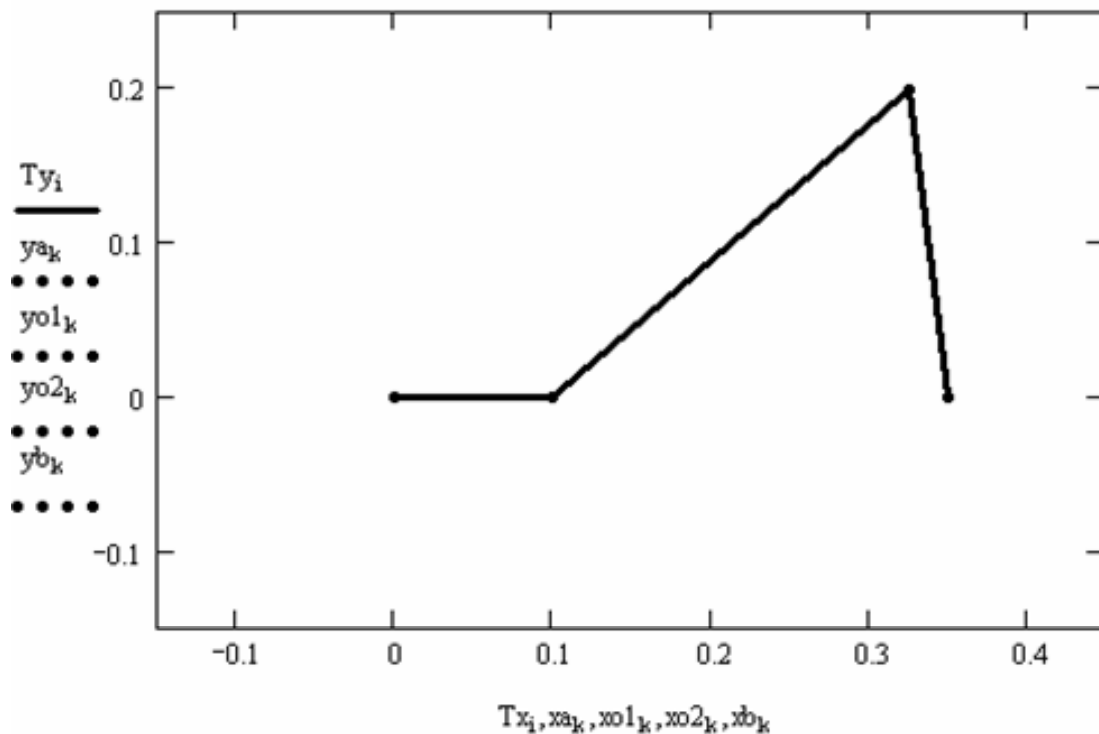
Для построения анимационного графика вначале задается переменная Frame, принимающая целочисленные значения (по умолчанию она меняется от 0 до 9 с шагом 1). Любая функция, график которой планируется наблюдать в развитии должна быть функцией этой переменной, которая, по существу, является просто номером текущего кадра. Затем задаются функции, у которой переменная Frame определяет вид для каждого анимационного графика.

Анимация механизма

k := FRAME

$$\begin{array}{llll} T_{x_0} := x_{o1_k} & T_{x_1} := x_{a_k} & T_{x_2} := x_{b_k} & T_{x_3} := x_{o2_k} \\ T_{y_0} := y_{o1_k} & T_{y_1} := y_{a_k} & T_{y_2} := y_{b_k} & T_{y_3} := y_{o2_k} \end{array}$$

i := 0..3



После этого выбором команды Animate выводится окно анима-

ции, в котором можно задать начальное и конечное значения переменной Frame и частоту смены кадров. Затем, выделив пунктирными черными линиями нужный фрагмент изображения и щелкнув по кнопке Animate приступим к созданию последовательности анимационных кадров. При это эти кадры будут видны в специальной зоне просмотра окна Animate, а под этой зоной можно наблюдать изменение переменной Frame. По окончании процесса создания серии кадров анимационного видеоролика появится проигрыватель анимационных кадров. Пустив его кнопкой пуска в виде треугольника, можно наблюдать изменение графика во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1985. – Т. 1.
2. Курс теоретической механики / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова. – М., Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.
3. Хвясько Г. М. Курс тэарэтычнай механікі. – Мн.: БДТУ, 2000.
5. Яблонский А. А., Никифорова В. А. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1984. – Ч. 1.
6. Артоболовский И. И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1975.
7. Марголин Ш. Ф. Теория механизмов и машин. – Мн., Высшэйшая шк., 1968.
8. Теория механизмов и машин / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.; Под общ. ред. К. В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987.
9. Дьяконов В. Mathcad 8/2000: специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Составное движение	6
1.1. Теоремы сложения скоростей и ускорений: основные результаты	6
1.2. Расчет кулачковых механизмов	11
1.3. Расчет простейших кулисных механизмов	15
Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания	18
2. Плоскопараллельное движение: определения, задание движения, нахождение скоростей	19
2.1. Определения и задание закона движения	19
2.2. Представление плоскопараллельного движения суммой двух движений. Теорема сложения скоростей и теорема о проекциях скоростей	21
2.3. Метод мгновенных центров скоростей	24
2.3.1. Скорости точек не параллельны друг другу.....	26
2.3.2. Скорости точек параллельны друг другу и имеют общий перпендикуляр	26
2.3.3. Скорости точек параллельны друг другу и не имеют общего перпендикуляра	27
2.3.4. Скорости точек равны друг другу и имеют общий перпендикуляр	29
2.3.5. Плоская фигура обкатывается без проскальзывания по неподвижной кривой.....	29
2.4. Примеры использования метода МЦС	31
2.4.1. Расчет рычажного механизма	31
2.4.2. Кинематика механизма с подвижными осями вращения.....	34
2.5. План скоростей	36
2.5.1. Рычажный механизм	37
2.5.2. Кулисный механизм	41
Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания	44
3. Ускорения в плоскопараллельном движении	47
3.1. Рычажные механизмы	47
3.1.1. Аналитическое решение	49
3.1.2. Мгновенный центр ускорений	51
3.1.3. План ускорений	53
3.2. Кулисный механизм	57
3.2.1. План ускорений простого механизма	57

3.2.2. Рычажный механизм, содержащий кулису	59
Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания	61
4. Сложение вращений относительно параллельных осей	64
4.1. Теоремы сложения угловых скоростей и ускорений	64
4.2. Метод Виллиса.....	66
4.3. Определение скоростей и ускорений точек сателлита	70
Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания	71
5. Аналитические методы расчета плоских механизмов	73
5.1. Кривошипно-ползунный механизм	73
5.1.1. Нахождение скоростей движения точек и звеньев механизма.....	74
5.1.2. Определение ускорений движения.....	76
5.2. Кулисный механизм	78
5.3. Шарнирный четырехзвенник.....	80
Вопросы для самопроверки знаний и контрольные задания	82
ПРИЛОЖЕНИЕ	83
ЛИТЕРАТУРА	87

Учебное издание

Вихренко Вячеслав Степанович

Грода Ярослав Геннадьевич

**КИНЕМАТИКА СОСТАВНОГО И ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЙ**

Редактор Е. И. Гоман

Подписано в печать . . . 2005. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. . . . Уч.-изд. л. . . .
Тираж 200 экз. Заказ

Учреждение образования «Белорусский государственный
технологический университет». 220050. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220050. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 от 22.01.2004.