Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Экономико-математические методы и модели

Учебно-методическое пособие по выполнению расчетных заданий с использованием табличного процессора Excel для студентов экономических специальностей

Минск 2005

Экономико-математические методы и модели

**Учебно-методическое пособие
по выполнению расчетных заданий
с использованием табличного процессора Excel
для студентов экономических специальностей**

Минск БГТУ 2005

УДК 330.4:004
ББК 65.9(2)23
Э 40

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

Автор-составитель *Е. А. Шинкевич*

Рецензенты:
доц. кафедры высшей математики БГЭУ, канд. физ.-мат. наук *С. Я. Гороховик*;
ст. преподаватель кафедры экономики и управления на предприятиях лесного комплекса БГТУ канд. экон. наук *С. А. Касперович*

Э 40 **Экономико-математические методы и модели** : учеб.-метод. пособие по выполнению расчетных заданий с использованием табличного процессора Excel для студентов экономических специальностей / авт.-сост. Е. А. Шинкевич. — Мн. : БГТУ, 2005. — 74 с.

ISBN 985-434-508-4

Приведены основные сведения по работе с табличным процессором Excel, необходимые для решения экономических задач.

Предназначено для студентов экономических специальностей.

УДК 330.4:004
ББК 65.9(2)23

ISBN 985-434-508-4

Учебное издание

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебно-методическое пособие
Автор-составитель **Шинкевич** Елена Алексеевна

Редактор Е. И. Гоман

Подписано в печать 27.10.2005. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,1. Уч.-изд. л. 4,4.
Тираж 300 экз. Заказ

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220050. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 от 30.04.2004.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет».
220050. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 от 22.01.2004.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов следующих специальностей: экономика и управление на предприятии; бухгалтерский учет, анализ и аудит; менеджмент; маркетинг.

Математическое моделирование экономических процессов тесно связано с компьютеризацией экономической науки. Лабораторные занятия по курсу «Экономические методы и модели» предназначены для углубления теоретических знаний студентов по моделированию экономических процессов, а также приобретения практических навыков построения численных моделей, их реализации с применением ПЭВМ и анализа полученных результатов.

Цель пособия – оказать помощь студентам при выполнении лабораторных работ по курсу «Экономические методы и модели».

В учебно-методическом пособии рассматриваются решения таких задач, как построение уравнения множественной регрессии и проверка его адекватности, решение различных оптимизационных задач (задачи линейного программирования, транспортные задачи в разных постановках: закрытые и открытые, с различными ограничениями на перевозки), задачи межотраслевого баланса, задачи сетевого планирования, расчет параметров системы массового обслуживания с использованием табличного процессора Excel. По каждой из перечисленных тем приводятся краткие теоретические сведения, необходмые формулы и образец расчетов основных параметров задач в Excel с указанием используемых функций Excel и наглядным представлением результатов.

ОПЕРАЦИОННАЯ СРЕДА WINDOWS

Система Windows (в переводе с английского – «окна») является графической операционной средой для персонального компьютера.

После загрузки Windows на экране появляется **Рабочий стол**. В исходном состоянии на **Рабочем столе** мы видим несколько экранных значков, представляющих объекты Windows, и **Панель задач.** Слева на Панели задач имеется кнопка **Пуск**, которая называется командной кнопкой.

На рабочем столе размещаются следующие элементы:

– значки (пиктограммы) с надписями;

– панель задач, в левой части которой находится кнопка Пуск.

Пиктограмма – это небольшая цветная картинка, которая представляет на экране дисплея некоторую программу, окно, функцию, файл и т. д.

Основными средствами управления в системе Windows являются мышь и клавиатура. С мышью связан экранный элемент – указатель мыши, он присутствует на экране всегда. Стандартная форма указателя – стрелка, направленная влево вверх, но в зависимости от выполняемой операции указатель принимает другую форму: двойной стрелки, крестика, рамки и т. д. На время операций, требующих ожидания пользователя, указатель превращается в песочные часы. При перемещении мыши по плоской поверхности указатель перемещается по экрану, на котором отображены графические объекты и элементы управления. С помощью мыши можно изменять свойства объектов и приводить в действие элементы управления компьютерной системой. Если навести указатель мыши на кнопку Пуск и щелкнуть левой кнопкой мыши, над кнопкой Пуск откроется Главное меню Windows, представляющее собой список возможных команд. Каждый пункт меню является командой. Команды, представленные в меню, выполняются щелчком на соответствующем пункте.

Операционная система Windows позволяет управлять файловой структурой: создавать новые элементы структуры и изменять, перемещать, удалять старые.

Основные действия с мышью, используемые при работе в среде Windows.

Щелчок – быстрое нажатие и отпускание левой кнопки мыши применяется для выделения объектов (нужно щелкнуть по объекту) с целью подготовки их к дальнейшим операциям. Если щелкнуть на другом объекте, выделение на предыдущем снимется. Чтобы снять выделение со всех объектов, нужно щелкнуть на свободном от объектов месте Рабочего стола.

Двойной щелчок – два щелчка, выполненные с малым интервалом времени между ними, – применяют для использования объектов. Например, если сделать двойной щелчок на значке «Мой компьютер», на экране откроется одноименное окно, в котором можно увидеть значки дисков и других устройств, подключенных к компьютеру. Чтобы закрыть окно, нужно щелкнуть один раз на закрывающей кнопке ⊄, которая находится в правом верхнем углу окна.

Щелчок правой кнопкой применяется для вызова **контекстного меню** объекта, которое раскрывается на экране непосредственно рядом с выбранным объектом. В контекстном меню всегда содержатся только те команды, которые управляют работой выбранного объекта, поэтому выбор нужной для исполнения команды происходит более эффективно.

Перетаскивание выполняется путем перемещения мыши при нажатой левой кнопке и обычно сопровождается перемещением экранного объекта, на котором установлен указатель мыши. Перетаскивание используется при копировании и перемещении объектов, а также для изменения расположения на экране окон, которые можно перетаскивать с места на место, подцепив указателем мыши за верхнюю строку окна – строку заголовка.

Протягивание мыши выполняется, как и перетаскивание, но при этом происходит не перемещение экранного объекта, а изменение его формы. Для того чтобы осуществить это, надо навести указатель мыши на одну из рамок окна и дождаться, когда он превратится в двунаправленную стрелку. После этого следует нажать левую кнопку и переместить мышь. Окно изменит размер. Если навести указатель мыши на правый нижний угол, произойдет изменение размера одновременно по двум направлениям.

Протягивание мыши используется также для **группового выделения объектов**: нужно навести указатель мыши на поверхность Рабочего стола, нажать кнопку мыши и протянуть мышь вправо и вниз. За указателем потянется прямоугольный контур выделения. Все объекты, попавшие в этот контур, будут выделены. Групповое выделение объектов можно выполнить также с помощью мыши и клавиатуры, если при щелчке мыши удерживать нажатой клавишу Shift или Ctrl.

Если при выделении держать нажатой клавишу Ctrl, то выделе ние нового объекта не снимет выделение с объектов, отмеченных ранее. Так можно выделить любую произвольную группу. Выделение при нажатой клавише Ctrl действует как переключатель, т. е. повторный щелчок на выделенной области снимает выделение.

Если выделяемые объекты расположены подряд, то можно использовать Shift. В этом случае при нажатой клавише щелкают на первом выделяемом объекте группы и на последнем.

Структура окон.

Перечислим и кратко охарактеризуем основные элементы структуры окон папок и документов Windows.

Строка заголовка содержит название папки или документа.

Системный значок находится в левом верхнем углу любого окна. При щелчке по нему открывается системное меню, команды которого позволяют управлять размером и расположением окна на Рабочем столе.

Кнопки управления размером  **(сворачивающая, разворачивающая и закрывающая)** расположены в правом верхнем углу окна. Они выполняют те же функции, что и команды системного меню. Щелчок по правой, закрывающей, кнопке закрывает окно. Щелчок по средней, разворачивающей – разворачивает окно на полный экран или, если окно находится в развернутом состоянии, восстанавливает его исходный размер. Щелчок по сворачивающей кнопке сворачивает окно до размера кнопки, которая находится на Панели задач.

Строка меню расположена под строкой заголовка. Она содержит все команды, которые можно выполнить в данном окне. Для окон папок строка меню имеет стандартный вид. При щелчке на каждом из ее пунктов открывается «ниспадающее» меню, пункты которого позволяют проводить операции с содержимым окна или с окном в целом. В открывшемся списке некоторые пункты как бы «погашены» (напечатаны серым шрифтом). Это означает, что в данный момент команда недоступна, для ее работы чего-то не хватает. Доступные функции выделены более ярким шрифтом.

Панель инструментов содержит командные кнопки для выполнения наиболее часто встречающихся операций.

В рабочей области папки отображаются значки объектов, хранящихся в папке, причем способом отображения можно управлять. Управление **представлением объектов** осуществляется с помощью команд-строки меню (пункт **Вид**) либо с помощью кнопки **Вид** на па нели инструментов. Можно выбрать один из нескольких режимов: Крупные значки, Мелкие значки, Список или Таблица, в которой указаны дополнительные свойства объектов (размер, дата создания и т. д.).

В режиме Таблица каждый столбец имеет заголовок. Этот заголовок обладает свойствами командной кнопки: при первом щелчке на заголовке столбца происходит сортировка объектов по данному столбцу в восходящем порядке, при повторном – в нисходящем порядке.

Полосы прокрутки. Если документ на умещается в окне, то окно снабжается вертикальной и горизонтальной полосой прокрутки.

Строка состояния, расположенная внизу окна, содержит дополнительную информацию.

Программа Проводник.

Программа Проводник – это служебная программа, предназначенная для работы с файловой системой. Окно Проводника открывается при последовательном выполнении команд Пуск $\rightarrow$ Программы $\rightarrow$ Проводник.

Окно Проводника похоже по элементам управления на окна папок, но имеет две рабочие области: левую панель (панель папок) и правую (панель содержимого).

Навигация по файловой структуре выполняется на левой панели, на которой показана структура папок. Папки могут быть развернуты или свернуты, а также раскрыты или закрыты. Если папка имеет вложенные папки, то на левой панели рядом с папкой отображается узел, помеченный значком «+». Щелчок на этом узле **разворачивает папку,** т. е. отображает на панели папок вложенные в нее папки. При этом значок узла меняется на «–». Таким же образом папки и сворачиваются. Чтобы **раскрыть папку,** надо щелкнуть на ее значке. Содержимое раскрытой папки отображается на правой панели. Одна из папок раскрыта всегда. При раскрытии другой папки она автоматически закроется.

Запуск **программ и открытие документов** выполняется двойным щелчком на значке программы или документа на правой панели Проводника. Если нужный объект на правой панели не показан, нужно выполнить навигацию на левой панели и найти папку, в которой он находится.

Создание папок. Сначала на левой панели Проводника нужно раскрыть папку, внутри которой будет создаваться новая папка. После этого щелкнуть правой кнопкой мыши на свободном от файлов месте правой панели и выбрать в контекстном меню пункт Создать → Папку. На правой панели появится значок папки с названием Новая папка. Название выделено, и в таком виде его можно редактировать.

Копирование и перемещение файлов и папок выполняется методом перетаскивания значка объекта с правой панели Проводника на левую. Папку, из которой происходит копирование, называют источником, в которую – приемником. Сперва надо найти и раскрыть папку-источник, чтобы на правой панели был виден копируемый объект. Затем на левой панели следует отыскать папку-приемник, но ее раскрывать не надо. Далее объект перетаскивается с правой панели на левую и помещается на значок папки-приемника. Эта операция требует аккуратности, поскольку попасть одним значком точно на другой не всегда просто. Для контроля точности попадания надо следить за названием папки-приемника. В тот момент, когда наведение выполнено правильно, это название **меняет цвет** (становится выделенным) и кнопку мыши можно отпускать.

Если папки-источник и -приемник принадлежат одному диску, то при перетаскивании обычно выполняется перемещение, а если разным – копирование. При необходимости обратного действия выполняют специальное перетаскивание (при нажатой правой кнопке).

Удаление файлов и папок. На левой панели открывают папку, содержащую удаляемый объект, а на правой выделяют нужный объект. Удаление можно осуществить различными способами: 1) с помощью команды Файл → Удалить из строки меню; 2) используя командную кнопку на панели инструментов; 3) с помощью контекстного меню; 4) с помощью клавиши Del клавиатуры.

ЭЛЕКТРОННЫЕ ТАБЛИЦЫ EXCEL

Microsoft Excel – это программа, которая предназначена для создания и обработки электронных таблиц.

Запуск Excel.

1-й способ – выполнить последовательно команды **Пуск → Программы → Excel.**

2-й способ – если ярлык **Excel**  вынесен на рабочий стол, то выполнить два быстрых щелчка на этом ярлыке левой кнопкой мыши.

В результате на экране появится окно **Excel** (рис. 1).

Рассмотрим основные элементы этого окна:

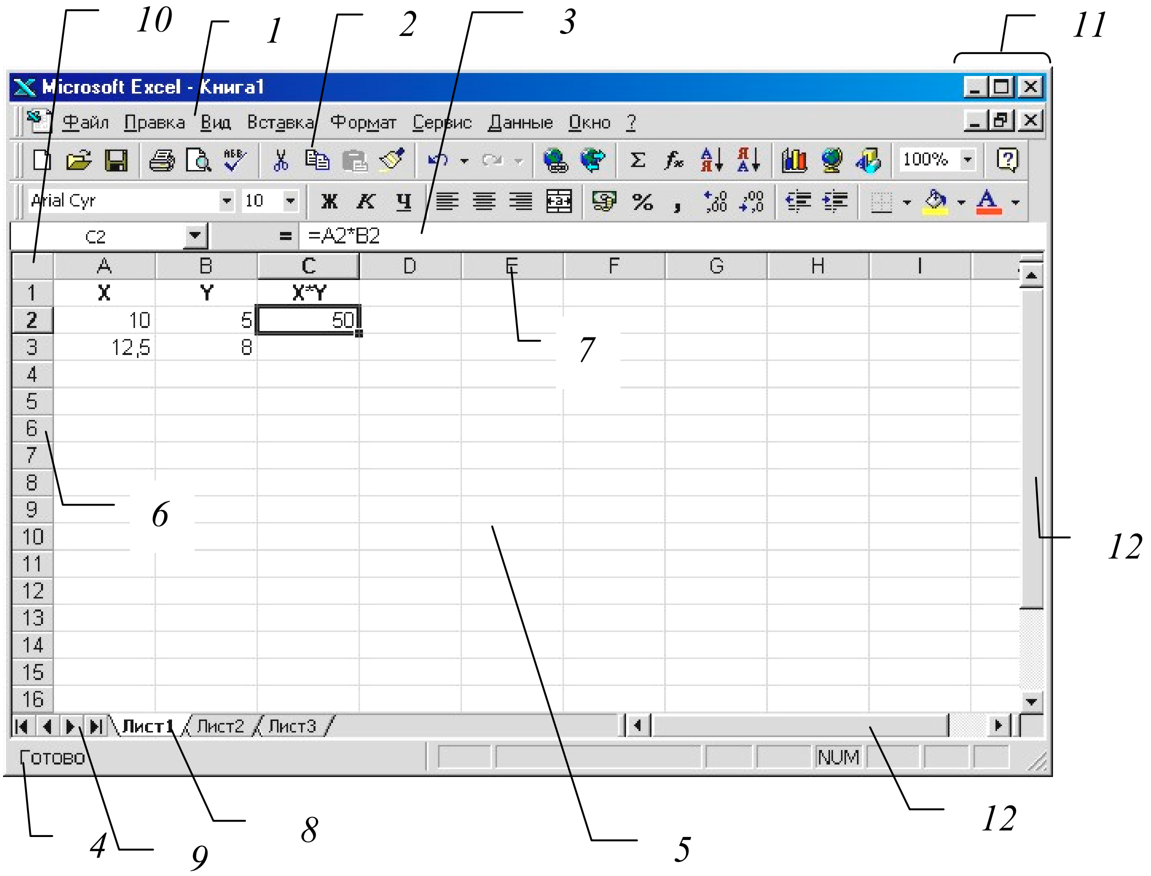


Рис. 1

1 – главное меню; 2 – панель инструментов; 3 – строка ввода; 4 – информационная строка; 5 – книга: основное рабочее место электронной таблицы, которая является файлом; 6 – заголовки строк; 7 – заголовки столбцов; 8 – ярлычок листа.

Книга состоит из листов. Каждому листу можно присвоить имя, которое указывается на ярлычке листа. По умолчанию имена листов: Лист1, Лист2 и т. д. Каждый лист – это электронная таблица, являющаяся элементом одного файла-книги. Электронная таблица состоит из строк и столбцов; строки нумеруются 1,2,...,16 394; столбцы обозначаются буквами A, B,..., AA, AB, ...; всего столбцов 256. На пересечении строк и столбцов находятся ячейки. Каждая ячейка имеет свой адрес Al, B18, AD243 и т. д.

Всегда на рабочем поле имеется **указатель ячейки** (выделен). Рабочая ячейка та, в которой находится указатель ячейки. На рис. 1 рабочей является ячейка C2. В ней содержится формула A2*B2 (см. рис.1, строку ввода), значение которой равно 50.

9 – блок прокрутки листов; 10 – угловой элемент, предназначенный для выделения всех ячеек окна; 11 – кнопки управления размером окна; 12 – полосы прокрутки. Вертикальная и горизонтальная полосы прокрутки предназначены для просмотра на рабочем листе информации, которая в данный момент в окне не видна.

В Excel предусмотрен ввод команд различными способами. В дальнейшем будем отдавать предпочтение вводу команд с помощью мыши.

Выделение ячеек.

Для того чтобы выделить одну ячейку, целый столбец или целую строку, нужно щелкнуть мышью по ячейке, заголовку столбца или заголовку строки соответственно. Если щелкнуть по ячейке, а потом нажать сочетание клавиш Ctrl+Spacebar (или Shift+Spacebar), то выделится столбец (или строка), в котором расположена выделенная ячейка.

Если требуется выделить некоторую прямоугольную область, нужно: 1) щелкнуть по ячейке, расположенной в одном из углов; 2) нажать и удерживать клавишу Shift; 3) щелкнуть по ячейке, расположенной в противоположном углу.

Для того чтобы выделить несколько отдельных ячеек, необходимо: 1) щелкнуть по первой ячейке; 2) нажать и удерживать клавишу Ctrl; 3) последовательно щелкнуть по каждой следующей ячейке.

Выделить целый лист можно, щелкнув по кнопке Выделить все, которая находится на пересечении заголовков строк и столбцов, или нажав сочетание клавиш Ctrl+Shift+Spacebar. Для перехода к выделению нескольких несмежных областей следует нажать Shift+F8.

Ввод данных.

Для ввода данных в ячейку необходимо: 1) поместить указатель мыши в нужную ячейку; 2) ввести данные с клавиатуры (вводимая информация при этом будет отображаться в строке ввода); 3) закончить ввод данных, нажав клавишу Enter или щелкнув мышью по другой ячейке.

Каждая ячейка в Excel может содержать данные одного из трех типов: текст, число или формула. Формула обязательно должна начинаться со знака =.

Формат ячеек.

Формат позволяет отображать числовые данные в том или ином виде. Чтобы задать или изменить **формат** ячейки или диапазона ячеек, нужно выделить этот диапазон и воспользоваться командой меню **Формат → Ячейки** или командой контекстного меню **Формат ячеек**. В появившемся окне нужно открыть вкладку **Числовой** и выбрать необходимый числовой формат (если нет специальных требований к отображению данных, то выбирается **Общий формат**).

Если задан Общий формат, программа Excel сама подбирает подходящий формат отображения числа: либо с фиксированной запятой, либо в экспоненциальной форме. По умолчанию цифры выравниваются по правому краю ячейки, а текст – по левому.

Если задан Числовой формат, число отображается с заданным количеством десятичных знаков после запятой.

В Экспоненциальном формате число представляется в виде <мантисса>*10<порядок>, где мантисса принимает значение из промежутка [0; 10). Например, если задать параметр экспоненциального формата – Число десятичных знаков 2 и ввести число 12 345, на экране оно будет отображено в виде 1,23E+4.

Редактирование данных.

Для **замены** одних данных в ячейке другими достаточно установить в нее курсор и ввести новые данные.

Чтобы **отредактировать** содержимое ячейки, нужно:

– выделить редактируемую ячейку;

– перейти в режим редактирования данных одним из следующих способов: 1) нажать клавишу F2; 2) дважды щелкнуть по редактируемой ячейке; 3) установить курсор в панель формул и редактировать непосредственно в ней;

– после редактирования нажать Enter для сохранения правок или Esc для отмены редактирования.

При редактировании данных формулы автоматически пересчитываются.

Для **удаления содержимого** ячейки или нескольких ячеек необходимо выделить очищаемую область и нажать клавишу Del.

При **удалении ячеек,** в отличие от удаления содержимого, происходит сдвиг соседних ячеек на место удаленных. Удаление ячеек осуществляется с помощью команды меню **Правка → Удалить** или с помощью такой же команды контекстного меню. При этом откроется диалоговое окно, позволяющее выбрать направление сдвига.

Вставка ячеек (строк, столбцов) осуществляется с помощью команды меню **Вставка → Ячейки** (Строки, Столбцы) или с помощью команды контекстного меню **Добавить ячейки**, при вызове которой открывается диалоговое окно, позволяющее выбрать направление сдвига.

Копирование и перемещение данных в Excel.

Копирование и перемещение данных в Excel наиболее удобно осуществлять через буфер обмена.

Важно помнить, что при копировании формула перенастраивается на новые адреса **(относительные ссылки).** Чтобы адрес какой-либо ячейки был **абсолютным** (т. е. не перенастраивался), нужно после его указания в процессе формирования формулы нажать клавишу F4 или записать адрес в виде $A$1. Клавиша F4 действует в этом случае как переключатель, преобразуя адрес последовательно в $A$1, A$l, $Al, A1. Знаком $ обозначается та часть адреса, которая должна оставаться абсолютной (т. е. не меняется при копировании или перемещении).

Для **перемещения данных** в другую позицию следует выделить перемещаемую область, установить указатель мыши на границу выделенного блока таким образом, чтобы он превратился в стрелку, и перетянуть блок в новую позицию.

Копирование данных в смежные ячейки можно осуществить также следующим способом: выделить диапазон ячеек, направить указатель мыши на **маркер заполнения** (черный квадрат в правом нижнем углу выделенного интервала ячеек) так, чтобы указатель принял вид черного крестика, и протащить в соседние ячейки.

Если надо быстро скопировать данные в пределах одного рабочего листа, следует выделить диапазон ячеек, нажать и удерживать клавишу Ctrl, перетащить выделенный фрагмент за край в нужное место.

Специальное копирование применяется, если необходимо скопировать не все содержимое ячейки, а только какую-то его со ставляющую: значение, формат и т. д.

Чтобы осуществить специальное копирование, нужно поместить копируемый фрагмент в буфер обмена, перейти в новое место таблицы и использовать команду Специальная вставка пункта Правка в строке меню или контекстного меню. При этом открывается диалоговое окно, в котором следует выбрать необходимые команды, после чего для осуществления копирования нажать кнопку ОК. В зависимости от того, какой флажок выставлен в разделе Вставить диалогового окна, копируется определенная часть содержимого ячеек. При этом можно выполнить арифметические действия над данными, которые переносятся, и содержимым ячейки, в которую производится копирование. Установка флажка Транспонировать приведет к тому, что содержимое строк таблицы будет вставлено в столбцы, а содержимое столбцов – в строки. При щелчке по кнопке Вставить устанавливается связь с копируемой ячейкой и любое изменение исходной ячейки приведет к изменению результирующей.

Правила работы с формулами и функциями.

1. Каждая формула начинается со знака =.

2. Результат вычисления формулы помещается в активную ячейку, а сама формула отображается в строке ввода.

3. Формулы автоматически пересчитывают свои значения, как только изменяется хотя бы один из их аргументов.

4. Формулы могут включать обращение к одной или нескольким функциям.

5. После имени каждой функции в круглых скобках задаются аргументы. Если функция не использует аргументы, то за ее именем следуют пустые скобки без пробела между ними ().

6. Аргументы перечисляются через точку с запятой.

7. В формулах недопустимы пробелы.

8. В формуле можно использовать знаки арифметических операций: +, –, /, *,^ (возведение в степень), % (взятие процента).

9. В качестве элемента формулы и аргумента функции может выступать адрес ячейки. В этом случае в вычислении участвует содержимое ячейки, адрес которой задан в формуле. При ссылках в формулах на непрерывные области ячеек можно использовать символ двоеточия, например С2:С17.

10. Не должно быть циклических ссылок, т. е. ячейка не может ссылаться сама на себя.

Мастер функций.

При вводе формулы обращение к встроенной функции можно написать вручную или вызвать инструмент **Мастер функций** с помощью команды **Вставка → Функция** или кнопки f_x.

Работа Мастера функций включает два шага. На первом шаге в списке Категория нужно выбрать категорию функции, а затем в списке Функция найти саму функцию. Внизу диалогового окна отображается синтаксис и результат выполнения выбранной функции. Для перехода ко второму шагу работы Мастера функций следует нажать кнопку ОК.

На втором шаге работы Мастера открывается диалоговое окно выбранной функции, в котором можно задать аргументы функции. Допускается использовать в качестве аргумента функцию.

В Excel существуют следующие категории функции: финансовая; дата и время; математическая; статистическая; ссылки и массивы; текстовая; логическая и т. д.

Таким образом, для набора функции с помощью Мастера функций необходимо:

выделить ячейку, если функция будет вставляться в самом начале, или набрать часть формулы, если функция будет вставляться дальше;

на панели **Стандартная** нажать пиктограмму f_x – **Мастер функций.** Появится диалоговое окно **Мастер функций**;

в поле **Категория** выбрать категорию функции; в поле **Функция** выбрать имя функции; нажать кнопку **ОК**; ввести значения аргументов; нажать кнопку **ОК**.

Построение диаграмм.

Диаграмма – это графическое представление данных рабочего листа.

Диаграммы можно создавать двумя способами: на имеющемся листе (внедренная диаграмма); на отдельном листе для диаграмм.

Excel позволяет строить различные виды диаграмм: график, пузырьковая, кольцевая и т. д.

Плоские диаграммы: гистограмма (столбиковая диаграмма); график; круговая.

Объемные диаграммы гистограмма (объемная столбиковая); объемный график; объемная круговая (торт).

Чтобы создать внедренную диаграмму, т. е. на имеющемся листе:

выделить ячейки, в которых находятся данные для построения диаграммы, включая названия категорий или рядов;

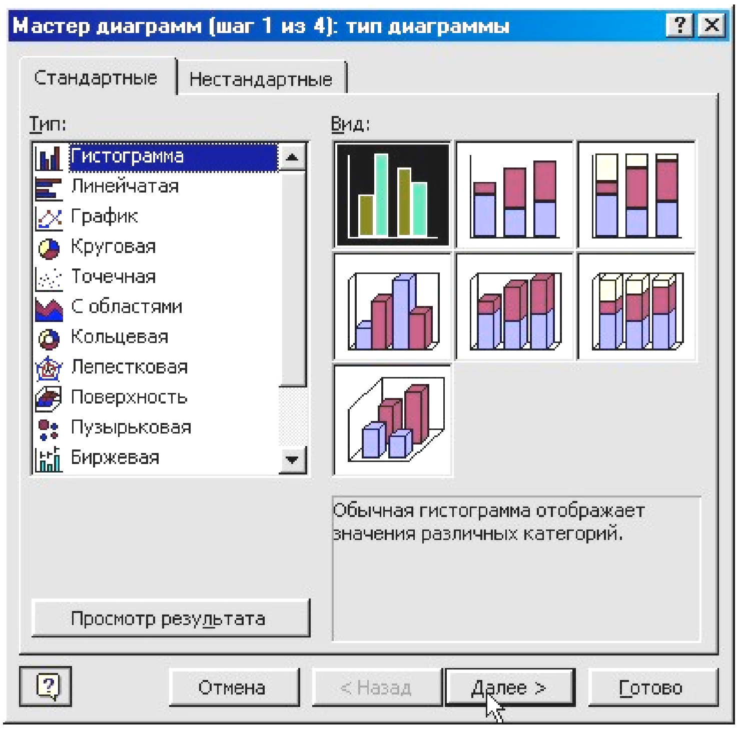


Рис. 2

на панели **Стандартная** щелкнуть по пиктограмме **Мастер диаграмм** (рис. 2);

в первом шаге из четырех выбрать **Тип и Вид** диаграммы и щелкнуть по кнопке **Далее**;

если устраивает вид диаграммы, во втором шаге – щелкнуть по кнопке **Далее**;

в третьем шаге можно дать заглавие диаграмме, подписать данные, установить или убрать легенду и т. д. **Далее**;

в последнем шаге указать, на каком листе строить диаграмму: отдельном или нет;

если в процессе построения диаграммы нужно вернуться к предыдущему шагу, то следует нажать кнопку **Назад**.

Сама диаграмма и все ее элементы выделяются одинарным щелчком, а редактируются – двойным.

Все столбцы одного цвета – это один ряд данных.

Решение задач оптимизации.

Решение задач оптимизации осуществляется с помощью пакета прикладных программ **Поиск решения** (**Сервис → Поиск решения**).

В основе работы пакета **Поиск решения** лежат итерационные методы поиска решений. Пакет позволяет находить решения задач, имеющих целевую функцию, вычисление которой можно записать в виде формулы в одну из ячеек рабочего листа электронной таблицы.

При этом пакет обеспечивает возможность:

использовать одновременно до 200 адресов ячеек, содержащих отыскиваемые значения переменных (параметров);

устанавливать конкретный результат для целевой функции и для этого значения отыскивать значения параметров;

отыскивать оптимальное значение (минимальное или максимальное) целевой функции;

проводить анализ результатов;

генерировать множество различных решений для сложных задач линейного программирования. При этом возможно сохранение вариантов решений в виде сценариев.

Алгоритм решения задачи линейного программирования сводится к 3 этапам:

1 этап: описание математической модели задачи линейного программирования на рабочем листе электронной таблицы. На этом этапе определяются: а) область ячеек, в которых будут содержаться подбираемые значения неизвестных; б) область данных, содержащих ограничения; в) ячейки, в которые заносятся функции ограничений и целевая функция;

2 этап: подготовка пакета **Поиск решения** для решения задачи. На этом этапе в пакет передается значение адреса ячейки, содержащей целевую функцию, определяется отыскиваемое оптимальное или конкретное значение целевой функции, указывается диапазон ячеек, содержащий значения неизвестных (он должен быть непрерывным), заносятся все ограничения;

3 этап: решение задачи. На этом этапе уточняются характеристики пакета и осуществляется поиск множества различных решений.

Некоторые функции рабочего листа Excel

Категория Математические	
Название	Описание
КОРЕНЬ	Возвращает положительное значение квадратного корня числа
ABS	Возвращает модуль заданного числа
EXP	Возвращает экспоненту заданного числа

COS	Возвращает косинус заданного числа
LN	Возвращает натуральный логарифм заданного числа
МОБР	Возвращает обратную матрицу (матрица хранится в массиве с равным количеством строк и столбцов)
МОПРЕД	Вычисляет определитель матрицы
МУМНОЖ	Возвращает произведение матриц (матрицы хранятся в массивах. Количество столбцов первого массива должно быть равно количеству строк второго массива)
СТЕПЕНЬ	Возводит число в степень
СУММ	Вычисляет сумму аргументов, число которых не более 30. Аргументами могут быть числа логические значения и текстовые представления чисел. Формула $\sum_{i=1}^{n} x_i$
СУММКВ	Вычисляет сумму квадратов аргументов. Число аргументов может быть не более 30. Формула $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$
СУММКВРАЗН	Вычисляет сумму квадратов разностей соответствующих значений в двух массивах. Массивы должны иметь одинаковое количество элементов. Формула $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$
СУММПРОИЗВ	Вычисляет сумму произведений соответствующих элементов массивов. Формула $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
Категория Статистические	
FРАСПОБР	F-распределение Фишера. Формула $P(F_{\nu_1 \nu_2} > x) = \alpha$
СРЗНАЧ	Вычисляет среднее арифметическое своих аргументов. Их может быть не более 30. Если аргумент, который является массивом или ссылкой, содержит тексты или пустые ячейки, то, такие значения игнорируются. Формула $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
ДИСП	Оценивает дисперсию по выборке. Функция может иметь не более 30 числовых аргументов. Формула $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
ДОВЕРИТ	Возвращает доверительный интервал для генеральной совокупности
КОРРЕЛ	Вычисляет коэффициент корреляции между двумя ин

	тервалами ячеек. Формула $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$
ЛИНЕЙН	Возвращает параметры линейного тренда, для расчета аппроксимации используется метод наименьших квадратов
МИН	Вычисляет минимальное значение. Формула $\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$
МАКС	Вычисляет максимальное значение. Формула $\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$
СТЮАРДРАСПРОБР	Возвращает t-распределение Стьюдента
ХИ2ОБР	Распределение χ^2 (хи-квадрат)
Категория Ссылки и массивы	
ТРАНСП	Возвращает транспонированный массив

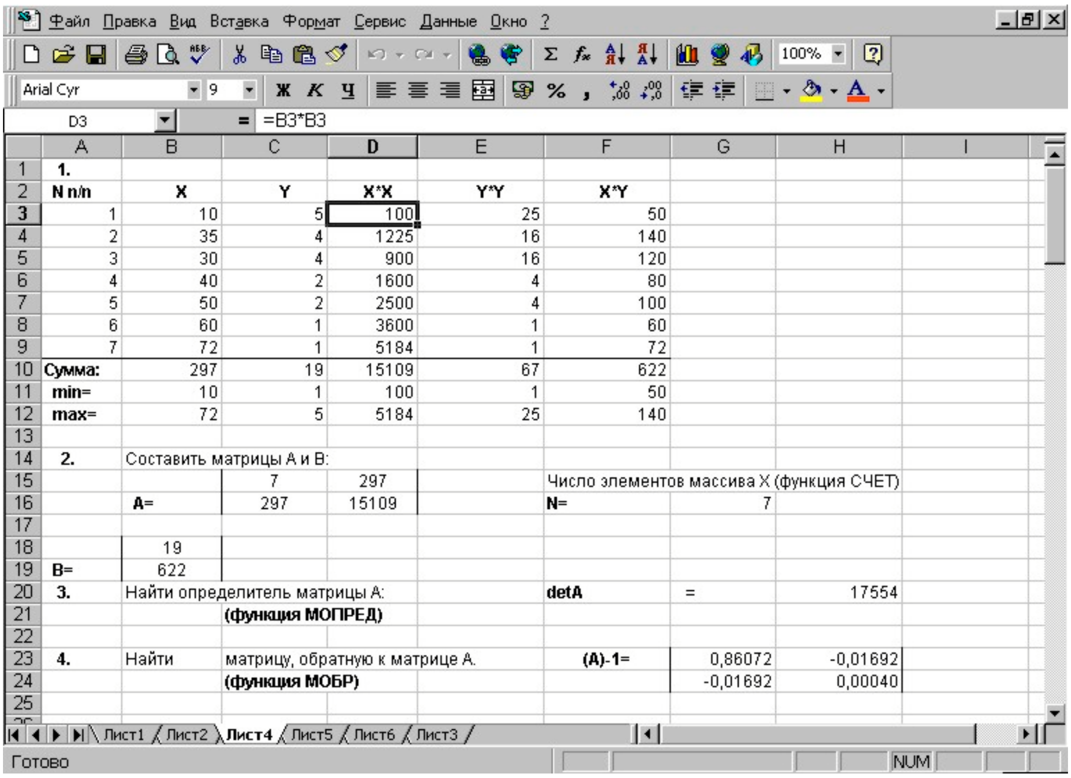
Примеры использования функций

Пусть дано два массива значений X и Y, которые помещены на рабочем листе **Excel** в ячейках B3:C9 (см. рис. 3).

i	X	Y
1	10	5
2	35	4
3	30	4
4	40	2
5	50	2
6	60	1
7	72	1

Применение одной формулы к элементам массива

Вычислим значения X_i^2, для $i=\overline{1,7}$ и полученные значения поместим в ячейки D3:D9. Поместим курсор в ячейку D3 и запишем формулу =B3*B3. Для получения результата следует нажать Enter. Отметим, что для набора формулы в ячейке D3 лучше пользоваться мышью, а не набирать адреса ячеек с клавиатуры!



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**1.**							
2	**N п/п**	**X**	**Y**	**X*X**	**Y*Y**	**X*Y**		
3	1	10	5	100	25	50		
4	2	35	4	1225	16	140		
5	3	30	4	900	16	120		
6	4	40	2	1600	4	80		
7	5	50	2	2500	4	100		
8	6	60	1	3600	1	60		
9	7	72	1	5184	1	72		
10	**Сумма:**	297	19	15109	67	622		
11	**min=**	10	1	100	1	50		
12	**max=**	72	5	5184	25	140		
13								
14	**2.**	Составить матрицы А и В:						
15			7	297		Число элементов массива X (функция СЧЕТ)		
16		**A=**	297	15109		**N=**	7	
17								
18		19						
19	**B=**	622						
20	**3.**	Найти определитель матрицы А:				**detA**	=	17554
21			**(функция МОПРЕД)**					
22								
23	**4.**	Найти	матрицу, обратную к матрице А.			**(A)-1=**	0,86072	-0,01692
24			**(функция МОБР)**				-0,01692	0,00040
25								

Рис. 3

Этот же результат можно получить, вызвав Мастера функций и выбрав функцию СТЕПЕНЬ в категории Математические. В диалоговом окне следует указать имя переменной – адрес ячейки B3, степень – 2, а затем нажать ОК. Данные в ячейках D4:D9 получены копированием ячейки D3 (Обратите внимание на формулы, которые получились в результате копирования в этих ячейках).

Аналогичным образом можно получить данные в ячейках E3:E9 – найдено произведение Y_i^2, для $i = \overline{1,7}$ и в ячейках F3:F9 – произведение $X_i * Y_i$ для $i = \overline{1,7}$.

Суммирование элементов массива

Найдем сумму данных в ячейках B3:B9. Результат запишем в ячейку B10. Поместим курсор в ячейку B10 и вызовем функцию СУММ: f_x → Математические → СУММ → ОК.

В диалоговом окне следует указать аргументы функции B3:B9, выделив нужный массив в таблице мышью, и нажать ОК. Если диалоговое окно закрывает часть массива, окно можно перетащить мышью в другое место.

В результате действия функции СУММ в ячейке B10 появится значение – сумма данных из ячеек B3:B9 (рис. 3).

Функции работы с матрицами

Функции работы с матрицами находятся в двух категориях: Математические и Ссылки и массивы.

Найдем определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 297 \\ 297 & 15109 \end{pmatrix}$, которая расположена на рабочем листе в ячейках C15:D16 (рис. 3). Результат может быть получен в любой свободной ячейке рабочего листа. Поместим курсор в ячейку H20 и вызовем функцию ОПРЕД: $\rightarrow$ Математические $\rightarrow$ МОПРЕД $\rightarrow$ ОК. В открывшемся окне укажем массив C15:D16 и нажмем ОК.

При работе с матрицами **важно помнить**, что если в результате производимой операции нужно получить не одно число, а несколько (матрицу), то перед вызовом Мастера функций **необходимо выделить** не одну ячейку, а **прямоугольную область**, размер которой совпадает с размером получающейся в итоге матрицы, а для получения результата вместо кнопки ОК нужно нажать **сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter**.

Рассмотрим нахождение обратной матрицы. Обратная матрица существует только для квадратных матриц, определитель которых отличен от нуля. Найдем матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 7 & 297 \\ 297 & 15109 \end{pmatrix}$, которая расположена на рабочем листе в ячейках C15:D16. Матрица A размера 2×2, следовательно матрица A^{-1} также имеет размер 2×2. Выделим с помощью мыши область G23:H24 и вызовем функцию МОБР: $\rightarrow$ Математические $\rightarrow$ МОБР $\rightarrow$ ОК. В открывшемся окне укажем массив C15:D16 и нажмем **Ctrl+Shift+Enter** (заметьте, что при этом формула оказалась заключенной в фигурные скобки {}).

Рассмотрим операцию **умножения матриц.** Две матрицы можно умножать только в том случае, если количество столбцов первой совпадает с количеством строк второй. В результате получается матрица, у которой число строк совпадает с числом строк первой, а число столбцов – с числом столбцов второй матрицы: $A_{n \times k} \cdot B_{k \times m} = C_{n \times m}$.

Пусть матрица A^{-1} размера 2×2 расположена в массиве G23:H24, а матрица B размера 2×1 – в массиве B18:B19. Произведе ние $A^{-1}B$ – это матрица размера 2×1. Выделим область соответствующего размера, например ячейки C32:C33. Вызовем функцию → Математические → МУМНОЖ → ОК. В открывшемся окне зададим адреса перемножаемых матриц G23:H24 и C32:C33 и нажмем Ctrl+Shift+Enter для выполнения операции. Результат на рис. 4.

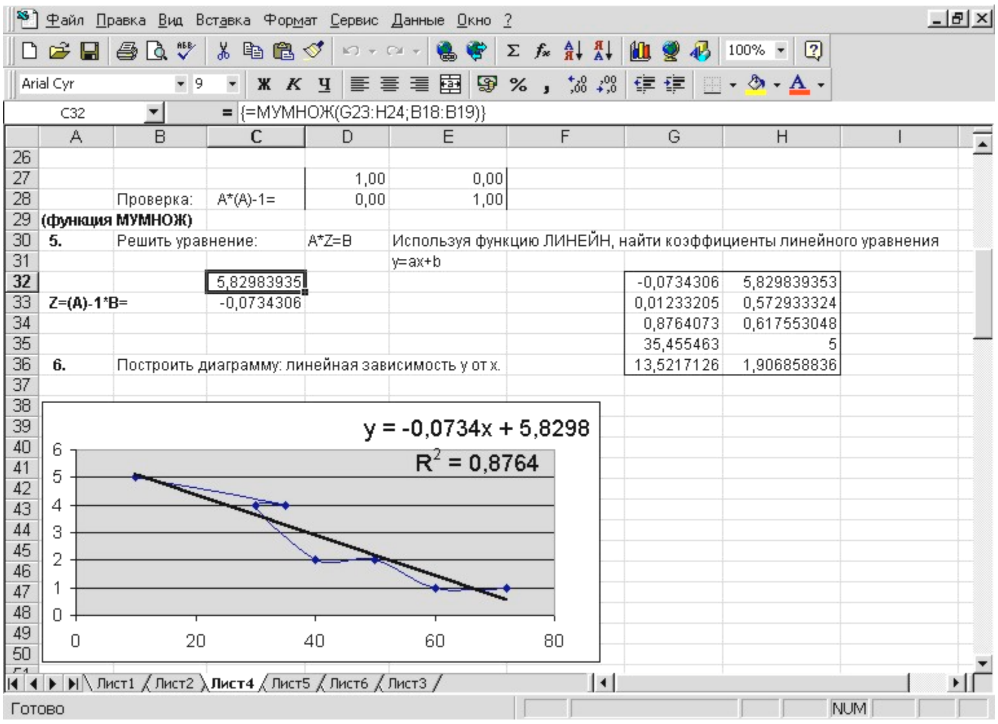


Рис. 4

Определение уравнения линейной регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$$

Регрессионный анализ является эффективным методом изучения взаимосвязей переменных. В основе любой регрессионной модели лежит уравнение регрессии, которое показывает, каким будет в среднем изменение зависимой переменной y, если независимая переменная x примет конкретное значение. Это обстоятельство позволяет применять регрессионные модели не только для анализа, но и для прогнозирования.

Для определения коэффициентов линейного уравнения регрессии применяется метод наименьших квадратов.

Качество аппроксимации оценивается с помощью коэффициента детерминации $D = R^2$. Если $D > 0{,}7$, модель можно считать адекватной.

Определение уравнения линейной регрессии осуществляется с помощью функции ЛИНЕЙН категории Статистические. Для записи результата нужно выделить область размера $5 \times (k+1)$, где k – число переменных, а затем вызвать функцию ЛИНЕЙН. В диалоговом окне требуется задать следующие аргументы: интервал значений Y_i; блок значений X_i; константа; статистика. В полях Константа и Статистика следует задать значение Истина, первое – для того чтобы получить уравнение регрессии с ненулевым свободным членом, второе – для получения оценки достоверности этого уравнения регрессии. Задав аргументы, необходимо нажать Ctrl+Shift+Enter. Вывод результата осуществляется в следующем формате:

b_k	b_{k-1}	…	b_1	b_0
$s\{b_k\}$	$s\{b_{k-1}\}$	…	$s\{b_1\}$	$s\{b_0\}$
R^2	$\sqrt{s^2_{\text{ад}}}$			
$F_{\text{расч}}$	$f_{\text{ад}}$			
$SS_{\text{регр}}$	$SS_{\text{ост}}$			

В первой строке записываются коэффициенты уравнения регрессии в обратном порядке, во второй – их среднеквадратические отклонения, первый элемент 3-й строки – множественный коэффициент детерминации. Остаточная сумма квадратов

$$SS_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 ,$$

где $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \ldots + b_k x_{ki}$;

$s^2_{\text{ад}} = SS_{\text{ост}} / f_{\text{ад}}$ – дисперсия адекватности; $f_{\text{ад}} = n - k - 1$ – число степеней свободы дисперсии адекватности;

$$SS_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 ;$$

$F_{\text{расч}} = \dfrac{SS_{\text{регр}} / k}{SS_{\text{ост}} / (n-k-1)}$ используется для проверки значимости множественного коэффициента регрессии.

Определим линейное уравнение зависимости Y от X: $\hat{y} = b + ax$. Выделим область 5×2: G32:H36 (см. рис. 4). Вызовем функцию  → Статистические → ЛИНЕЙН → ОК. В открывшемся окне зададим интервал значений Y_i: B3:B9; блок значений X_i: C3:C9; константа – истина; статистика – истина. Таким образом, уравнение регрессии имеет вид $\hat{y} = -0{,}0734x + 5{,}8298$, коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}8764$.

Изучить специфику зависимости и проследить характер связи в случае двух переменных проще всего графически. Рассмотрим построение диаграммы: линейная зависимость Y от X.

1. Выделить те ячейки, значения которых должны быть представлены на диаграмме: блок B3:C9 (рис. 4).

2. Щелкнуть курсором на кнопке .

На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 1 (вид диаграммы).

Выбрать: **Стандартные**.

Тип: **Точечная**;

Вид: **1-е или 2-е окно**. **Далее**.

3. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 2 (источник данных диаграммы) и вид выбранной диаграммы. **Ряд** – можно ввести название отображаемой на экране величины. **Далее**.

4. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 3 (параметры диаграммы). На этом шаге можно ввести легенду, а также название диаграммы и осей. Вводимый текст виден на экране. **Далее**.

5. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 4 (размещение диаграммы). Выбрать: **поместить диаграмму на имеющемся листе**. **Готово**.

6. На экране: диаграмма (рис. 4).

Для того чтобы поместить на диаграмму линию тренда, следует:

1. Щелкнуть на точках диаграммы правой кнопкой мыши.

2. В окне выбрать: **Добавить линию тренда**.

Тип: **Линейная**

Параметры: **показывать уравнение на диаграмме**

поместить на диаграмме величину достоверности аппроксимации R^2. **ОК**.

МНОЖЕСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ И РЕГРЕССИЯ

Любая экономическая политика заключается в регулировании определенных экономических параметров и поэтому должна основываться на знании того, как эти параметры влияют на другие составляющие экономической среды. В экономических исследованиях, как правило, встречаются стохастические зависимости, которые отличаются приблизительностью, неопределенностью. Они проявляются только в среднем по значительному количеству объектов (наблюдений). Здесь каждой величине факторного показателя (аргумента) может соответствовать несколько значений результативного показателя (функции). Взаимосвязь между исследуемыми факторами и результативным показателем проявится, если взять для исследования большое количество наблюдений (объектов) и сравнить их значения. Тогда в соответствии с законом больших чисел влияние других факторов на результативный показатель сглаживается, что дает возможность установить связь, соотношения между изучаемыми явлениями.

Корреляционная (стохастическая) связь – это неполная, вероятностная зависимость между показателями, которая проявляется только в массе наблюдений. Стохастические взаимосвязи экономических переменных можно описать с помощью так называемых корреляционных характеристик. Отличают парную и множественную корреляцию. **Парная корреляция** – это связь между двумя показателями, один из которых является факторным, а другой – результативным. **Множественная корреляция** возникает от взаимодействия нескольких факторов с результативным показателем.

Необходимые условия применения корреляционного анализа.

1. Наличие достаточно большого количества наблюдений о величине исследуемых факторных и результативных показателей (в динамике или за текущий год по совокупности однородных объектов).

2. Исследуемые факторы должны иметь количественное измерение и отражение в тех или иных источниках информации.

Применение корреляционного анализа позволяет решить следующие задачи:

1) определить изменение результативного показателя под воздействием одного или нескольких факторов (в абсолютном измерении), т. е. определить, на сколько единиц изменяется величина результативного показателя при изменении факторного на единицу;

2) установить относительную степень зависимости результа

тивного показателя от каждого фактора.

Исследование корреляционных зависимостей имеет огромное значение. Это проявляется в том, что устанавливаются место и роль каждого фактора в формировании уровня исследуемых показателей, углубляются знания об изучаемых явлениях, определяются закономерности их развития и как итог – точнее обосновываются планы и управленческие решения, более объективно оцениваются итоги деятельности предприятий.

Коэффициенты парной и множественной корреляции

Одной из основных задач корреляционного анализа является определение влияния факторов на величину результативного показателя (в абсолютном измерении). Для решения этой задачи подбирается соответствующий тип математического уравнения, которое наилучшим образом отражает характер изучаемой связи (прямолинейной, криволинейной и т. д.). Подбор уравнения играет важную роль в корреляционном анализе, потому что от правильного выбора уравнения регрессии зависит ход решения задачи и результаты расчетов.

Регрессионный анализ является эффективным статистическим методом изучения взаимосвязей переменных, из которых одна рассматривается как зависимая, а другие – как независимые. В основе любой регрессионной модели лежит уравнение регрессии, которое показывает, каким будет в среднем изменение зависимой переменной y, если независимые переменные x_i примут конкретные значения, т. е. регрессией y на x_i называется функция вида $M(y|x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Оценкой этой функции является выборочное уравнение регрессии $\overline{y}_x = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Различают уравнения (модели) парной и множественной регрессии. Если уравнение регрессии математически описывает поведение множества данных исследуемого показателя y во взаимосвязи с массивом данных одной независимой переменной x, то говорят о модели **парной регрессии**. Модели множественной регрессии отражают вклад нескольких независимых переменных x_i в результат исследуемого показателя y.

Для отображения и оценки регрессионной взаимосвязи переменных могут использоваться различные функции: линейная, экспоненциальная, логарифмическая, полиномиальная и др.

Коэффициент парной корреляции используется в качестве меры, характеризующей степень линейной связи двух переменных. Он представляет собой ковариацию двух наборов данных, деленную на произведение их стандартных отклонений:

$$r_{yx_j} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_{ij} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot \sum_{m=1}^{n} y_m}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{m=1}^{n} y_m^2 - \left(\sum_{m=1}^{n} y_m\right)^2}}, \qquad (1)$$

$$r_{x_j x_l} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{il} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot \sum_{m=1}^{n} x_{ml}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{m=1}^{n} x_{ml}^2 - \left(\sum_{m=1}^{n} x_{ml}\right)^2}}. \qquad (2)$$

Коэффициент парной корреляции является безразмерной величиной и не зависит от выбора единиц обеих переменных. Значение коэффициента корреляции лежит в интервале от –1 (в случае строгой линейной отрицательной связи) до +1 (в случае строгой линейной положительной связи). Соответственно, положительное значение коэффициента корреляции свидетельствует о прямой связи между исследуемым и факторным показателями, а отрицательное – об обратной. Чем ближе значение коэффициента корреляции к 1, тем теснее связь. Близкий к нулю коэффициент корреляции говорит об отсутствии линейной связи переменных, но не свидетельствует об отсутствии их связи вообще. В случае равенства нулю показателя корреляции нельзя однозначно утверждать о том, что исследуемые показатели независимы. В данном случае можно попытаться найти более сложную модель их связи. Значительный интерес представляют коэффициенты корреляции, характеризующие взаимосвязь факторов между собой. В корреляционную модель следует подбирать независимые между собой факторы. Если коэффициент корреляции двух факторов выше 0,85, то один из них необходимо исключить из модели.

Матрица коэффициентов парной корреляции имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 1 & r_{yx_1} & \cdots & r_{yx_k} \\ r_{x_1 y} & 1 & \cdots & r_{x_1 x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{x_k y} & r_{x_k x_1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

По данным этой матрицы можно примерно оценить, какие факторы существенно влияют на переменную y, а какие – несущественно, а также выявить взаимосвязь между факторами.

Коэффициент множественной корреляции принимает значения от 0 до 1, но несет в себе более универсальный смысл: чем ближе его значение к 1, тем в большей степени учтены факторы, влияющие на зависимую переменную, тем более точной выглядит построенная на основе отобранных факторов модель. Расчет коэффициента множественной корреляции производится на основе значений коэффициентов парной корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\det K}{K_{11}}}, \tag{4}$$

где $\det K$ – определитель корреляционной матрицы; K_{11} – алгебраическое дополнение элемента первой строки и первого столбца матрицы K. Если коэффициент корреляции возвести в квадрат, получим коэффициент детерминации $D = R^2$.

Линейные уравнения регрессии

Наиболее простым уравнением, которое характеризует прямолинейную зависимость между двумя показателями, является уравнение прямой:

$$y = b_0 + b_1 x, \tag{5}$$

где y – результативный показатель; b_0 и b_1 – параметры уравнения регрессии, которые требуется отыскать; x – факторный показатель. Это уравнение описывает такую связь между двумя признаками, при которой с изменением факторного показателя на определенную величину наблюдается равномерное возрастание или убывание значений результативного показателя.

Уравнение **множественной линейной регрессии** имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k. \tag{6}$$

Оценка параметров $b_0, b_1, b_2, \ldots b_k$ обычно осуществляется по **методу наименьших квадратов**:

$$\sum_{i=1}^{n} (y - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k))^2 \to \min. \tag{7}$$

Метод наименьших квадратов предусматривает нахождение параметров $b_0, b_1, b_2, \ldots b_k$ из условия минимума суммы квадратов откло нений (7). Используя необходимое условие экстремума, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $b_0, b_1, b_2, \ldots b_k$:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i, \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ik} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{ik} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{ik} y_i. \end{cases} \tag{8}$$

Коэффициенты $b_1, b_2, \ldots b_k$ уравнения (8) показывают количественное воздействие каждого фактора на результативный показатель при неизменности других. Однако регрессионный анализ не дает ответов на вопросы: тесная это связь или нет, решающее воздействие оказывает данный фактор на величину результативного показателя или второстепенное?

Коэффициенты регрессии в уравнении связи имеют разные единицы измерения, что делает их несопоставимыми, если возникает вопрос о сравнительной силе воздействия факторов на результативный показатель. Чтобы привести их в сопоставимый вид, все переменные уравнения регрессии выражают в долях среднеквадратического отклонения, другими словами, рассчитывают **стандартизированные коэффициенты регрессии**. Их еще называют бета-коэффициентами по символу, который принят для их обозначения. Бета-коэффициенты и коэффициенты регрессии связаны следующим отношением:

$$\beta_i = b_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y},$$

где $\sigma = \sqrt{\frac{\sum \left(x - \bar{x}\right)^2}{n}}$ – среднеквадратическое отклонение, которое служит критерием однородности информации; $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ – среднее значение.

Бета-коэффициенты показывают, что если величина фактора увеличится на одно среднеквадратическое отклонение, то соответствующая зависимая переменная увеличится или уменьшится на долю своего среднеквадратического отклонения. Сопоставление бета-коэффициентов позволяет сделать вывод о сравнительной степени воздействия каждого фактора на величину результативного показателя.

По аналогии можно сопоставить и коэффициенты эластичности, которые рассчитываются по формуле

$$Э_i = b_i \frac{\overline{x_i}}{\overline{y}}.$$

Коэффициенты эластичности показывают, на сколько процентов в среднем изменяется функция с изменением аргумента на 1%.

Статистическая оценка модели и коэффициентов корреляции

Значимость коэффициентов корреляции проверяется по критерию Стьюдента. Выдвигаем нулевую гипотезу H_0: коэффициет корреляции равен 0 ($r = 0$); конкурирующая гипотеза: $r \neq 0$. Гипотеза проверяется с помощью случайной величины:

$$t_{\text{расч}} = \left| \frac{r}{\sigma_r} \right|, \tag{9}$$

где σ_r – среднеквадратическая ошибка коэффициента корреляции r, которая определяется по формуле

$$\sigma_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n-1}}. \tag{10}$$

Эта случайная величина имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы $t_{\text{таб}} = t_{\alpha,n-1}$. Если расчетное значение $t_{\text{расч}}$ выше табличного $t_{\text{расч}} \geq t_{\alpha,n-1}$, то можно сделать заключение о том, что величина коэффициента корреляции является значимой, нулевая гипотеза отвергается. Табличные значения $t_{\text{таб}} = t_{\alpha,n-1}$ находят по таблице значений распределения Стьюдента. При этом учитываются количество степеней свободы $(n-1)$ и уровень доверительной вероятности (α).

Для того чтобы убедиться в надежности уравнения связи и правомерности его использования для практической цели, необходимо дать статистическую оценку надежности показателей связи. Для этого используются критерий Фишера, средняя ошибка аппроксимации, коэффициенты множественной корреляции и детерминации.

Значимость построенной модели проверяется следующим образом. Выдвигаем гипотезу H_0: модель незначима. Конкурирующая гипотеза H_1: модель значима. Гипотеза проверяется с помощью случайной величины по критерию Фишера:

$$F_{\text{набл}} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\text{ост}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 \Big/ (n-1)}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \Big/ (n-k-1)}, \qquad (11)$$

где y_i – фактические индивидуальные значения результативного показателя; $\overline{y}$ – среднее значение результативного показателя; $\hat{y}_i$ – индивидуальные значения результативного показателя, рассчитанные по уравнению регрессии; n – количество наблюдений (объем выборки); k – количество независимых переменных в уравнении связи.

Случайная величина имеет распределение Фишера – Снедекора с $k_1 = n-1$ и $k_2 = n-k-1$ степенями свободы (k – число факторных признаков). Фактическая величина $F_{\text{набл}}$ сопоставляется с табличной (по таблицам F-распределения) и делается заключение о надежности связи. Если $F_{\text{набл}} \geq F_{\text{таб}}(\alpha, k_1, k_2)$ при заданном уровне значимости α, тогда линейную модель можно считать адекватной (нулевая гипотеза отвергается).

Для статистической оценки точности уравнения связи используется также **средняя ошибка аппроксимации**:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{y}_i - \overline{y}}{y_i}\right)^2 . \qquad (12)$$

Чем меньше теоретическая линия регрессии (рассчитанная по уравнению) отклоняется от фактической (эмпиричной), тем меньше средняя ошибка аппроксимации.

О полноте связи можно судить также по величине **множественных коэффициентов корреляции и детерминации**. Например, если R = 0,92, а D = 0,85, то это значит, что вариация результативного признака на 85% зависит от изменения исследуемых факторов, а на долю других факторов приходится 15% вариации результативного показателя. Значит, в корреляционную модель удалось включить наиболее существенные факторы.

Следовательно, данное уравнение можно использовать для практических целей: а) оценки результатов хозяйственной деятельности; б) расчета влияния факторов на прирост результативного показателя; в) подсчета резервов повышения уровня исследуемого показателя; г) планирования и прогнозирования его величины.

Решение задачи многофакторного корреляционного анализа удобно проводить на ПЭВМ по типовым программам. Сначала формируется матрица исходных данных, в первой колонке которой записывается порядковый номер наблюдения, во второй – результативный показатель (y), а в следующих – факторные показатели (x_i). Эти сведения вводятся в ПЭВМ и рассчитываются матрицы парных и частных коэффициентов корреляции, уравнение множественной регрессии, а также показатели, с помощью которых оценивается надежность коэффициентов корреляции и уравнения связи: критерий Стьюдента, критерий Фишера, средняя ошибка аппроксимации, множественные коэффициенты корреляции и детерминации.

Задача. Зависимость уровня рентабельности y от производительности труда x_1, тыс. руб. и продолжительности оборота оборотных средств предприятия x_2, дни и материалоотдачи x_3, тыс. ден. ед. приведена в табл.

№ п.п.	y	x_1	x_2	x_3
1	21	7,9	18	66
2	23	10	19	88
3	20	7,9	17	55
4	21	8,5	18	59
5	23	9	21	71
6	21	7,8	17	62
7	22	7,7	20	33
8	20	8	17	59
9	22	8,3	18	60
10	21	7	17	39

1) Проверить однородность приведенных данных;
2) Найти парные коэффициенты корреляции и составить корреляционную матрицу. По полученным данным сделать вывод о тесноте связи между рассматриваемыми переменными. Проверить значимость коэффициентов корреляции и проанализировать полученные данные.

3) Считая, что между результативным и факторными признаками имеет место линейная связь, найти линейное уравнение связи (регрессии). Для полученной линейной модели определить коэффициенты эластичности. Сделать выводы.
4) Проверить адекватность полученной модели по критерию Фишера и определить среднюю ошибку аппроксимации. Уровень значимости $\alpha = 0{,}1$.

Решение. Для решения задачи нам понадобится следующая расчетная таблица (см. рис. 5).

1) Для того чтобы определить однородность данных, найдем их средние значения (пользуемся данными, полученными в расчетной таблице): $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 21{,}4$, $\overline{x_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i1} = 8{,}21$, $\overline{x_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i2} = 18{,}2$, $\overline{x_3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i3} = 592$, $n = 10$

и среднеквадратические отклонения:

$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{n}} = 1{,}019$, $\sigma_{x_1} = 0{,}777$, $\sigma_{x_2} = 1{,}327$, $\sigma_{x_3} = 14{,}613$. Так как значения среднеквадратических отклонений y, x_1, x_2 достаточно малы, то можно считать имеющиеся данные однородными. Значения третьего фактора однородными не являются.

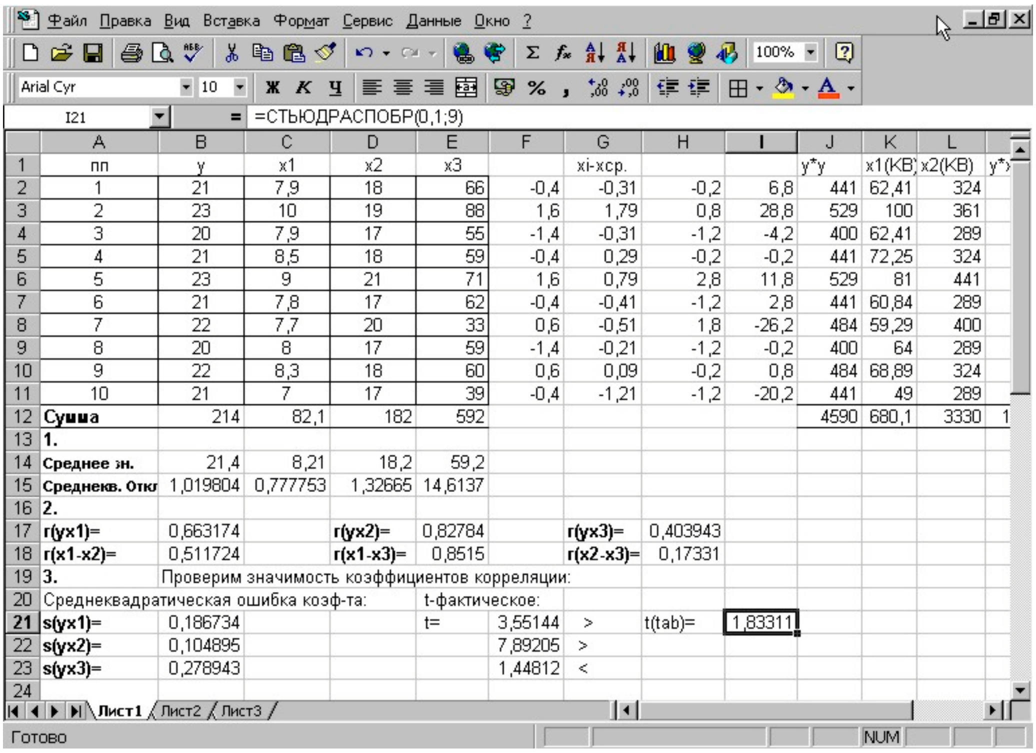
2) Найдем коэффициенты корреляции по формулам (1) и (2) (или с помощью функции КОРЕЛЛ) и составим корреляционную матрицу:

$r_{yx_1} = 0{,}663$, $r_{yx_2} = 0{,}828$, $r_{yx_3} = 0{,}404$ – эти коэффициенты показывают связь между результативным признаком y и x_1, x_2, x_3, соответственно; $r_{x_1x_2} = 0{,}525$ $r_{x_1x_3} = 0{,}851$, $r_{x_2x_3} = 0{,}173$ – показывают связь между факторными признаками. Так как $r_{x_1x_2} = 0{,}525 < 0{,}85$ и $r_{x_2x_3} = 0{,}173 < 0{,}85$, то связь между ними достаточно слабая и их можно включить в модель; $r_{x_1x_3} = 0{,}851$ – связь между факторами x_1 и x_3 достаточно сильная.

Проверим значимость коэффициентов корреляции по критерию Стьюдента. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ и учитывая, что в нашем примере количество степеней свободы равно $n-1=10-1=9$, получим табличное значение критерия: $t=1{,}83$ (функция СТЬЮДРАСПОБР). Теперь вычислим фактические значения (формулы (9) и (10)):

$$r_{yx_1}=\left|\frac{r_{yx_1}\sqrt{n-1}}{1-r_{yx_1}^2}\right|.$$

Переменная	x_1	x_2	x_3
t-фактическое	3,208	7,96	1,448


Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

I21 = =СТЬЮДРАСПОБР(0,1;9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1	пп	y	x1	x2	x3		xi-xcp.			y*y	x1(KB)	x2(KB)	y*
2	1	21	7,9	18	66	-0,4	-0,31	-0,2	6,8	441	62,41	324	
3	2	23	10	19	88	1,6	1,79	0,8	28,8	529	100	361	
4	3	20	7,9	17	55	-1,4	-0,31	-1,2	-4,2	400	62,41	289	
5	4	21	8,5	18	59	-0,4	0,29	-0,2	-0,2	441	72,25	324	
6	5	23	9	21	71	1,6	0,79	2,8	11,8	529	81	441	
7	6	21	7,8	17	62	-0,4	-0,41	-1,2	2,8	441	60,84	289	
8	7	22	7,7	20	33	0,6	-0,51	1,8	-26,2	484	59,29	400	
9	8	20	8	17	59	-1,4	-0,21	-1,2	-0,2	400	64	289	
10	9	22	8,3	18	60	0,6	0,09	-0,2	0,8	484	68,89	324	
11	10	21	7	17	39	-0,4	-1,21	-1,2	-20,2	441	49	289	
12	Сумма	214	82,1	182	592					4590	680,1	3330	1
13	1.												
14	Среднее зн.	21,4	8,21	18,2	59,2								
15	Среднекв. Откл	1,019804	0,777753	1,32665	14,6137								
16	2.												
17	r(yx1)=	0,663174		r(yx2)=	0,82784		r(yx3)=	0,403943					
18	r(x1-x2)=	0,511724		r(x1-x3)=	0,8515		r(x2-x3)=	0,17331					
19	3.	Проверим значимость коэффициентов корреляции:											
20	Среднеквадратическая ошибка коэф-та:				t-фактическое:								
21	s(yx1)=	0,186734			t=	3,55144	>	t(tab)=	1,83311				
22	s(yx2)=	0,104895				7,89205	>						
23	s(yx3)=	0,278943				1,44812	<						
24													

Лист1 / Лист2 / Лист3

Готово NUM

Рис. 5

Поскольку t-фактическое в первых двух случаях выше табличного, то связь между результативным и факторными показателями x_1 и x_2 является надежной, а величина коэффициентов корреляции – значимой. Про фактор x_3 можно сказать, что его следует исключить из модели, так как имеет место тесная связь между факторами x_1, x_3 и коэффициент корреляции значимым не является.

Исключаем фактор x_3 из рассмотрения и будем искать зависимость между факторами y и x_1, x_2. Тогда корреляционная матрица имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}663 & 0{,}828 \\ 0{,}663 & 1 & 0{,}512 \\ 0{,}828 & 0{,}512 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем коэффициент множественной корреляции по формуле

$$R = \sqrt{1 - \frac{\det K}{K_{11}}} = 0{,}873.$$

Коэффициент детерминации равен $D = R^2 = 0{,}76$. Это значит, что изменение рентабельности на 76% зависит от изменения исследуемых факторов, а на долю других факторов приходится 24% изменения результативного показателя.

3) Найдем уравнение регрессии. Используя метод наименьших квадратов, получим систему уравнений, которая в матричном виде (более удобном для расчетов в нашем случае) имеет следующий вид: $\left(X'X\right)b = X'Y$,

где $X'X = \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i2}x_{i1} & \sum x_{i2}^2 \end{pmatrix}$, $X'Y = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Нам нужно составить следующие матрицы: $X'X$, $X'Y$. Все данные возьмем из расчетной таблицы (рис. 5):

$$X'X = \begin{pmatrix} 10 & 82{,}1 & 182 \\ 82{,}1 & 680{,}09 & 1499{,}5 \\ 182 & 1499{,}5 & 3330 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 214 \\ 1762{,}2 \\ 3906 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле $b = \left(X'X\right)^{-1}\left(X'Y\right)$ найдем вектор коэффициентов регрессии (см. рис. 6). Сначала найдем обратную матрицу (функция МОБР)

$$\left(X'X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 20{,}614 & -0{,}616 & -0{,}849 \\ -0{,}616 & 0{,}224 & -0{,}067 \\ -0{,}849 & -0{,}067 & 0{,}077 \end{pmatrix},$$

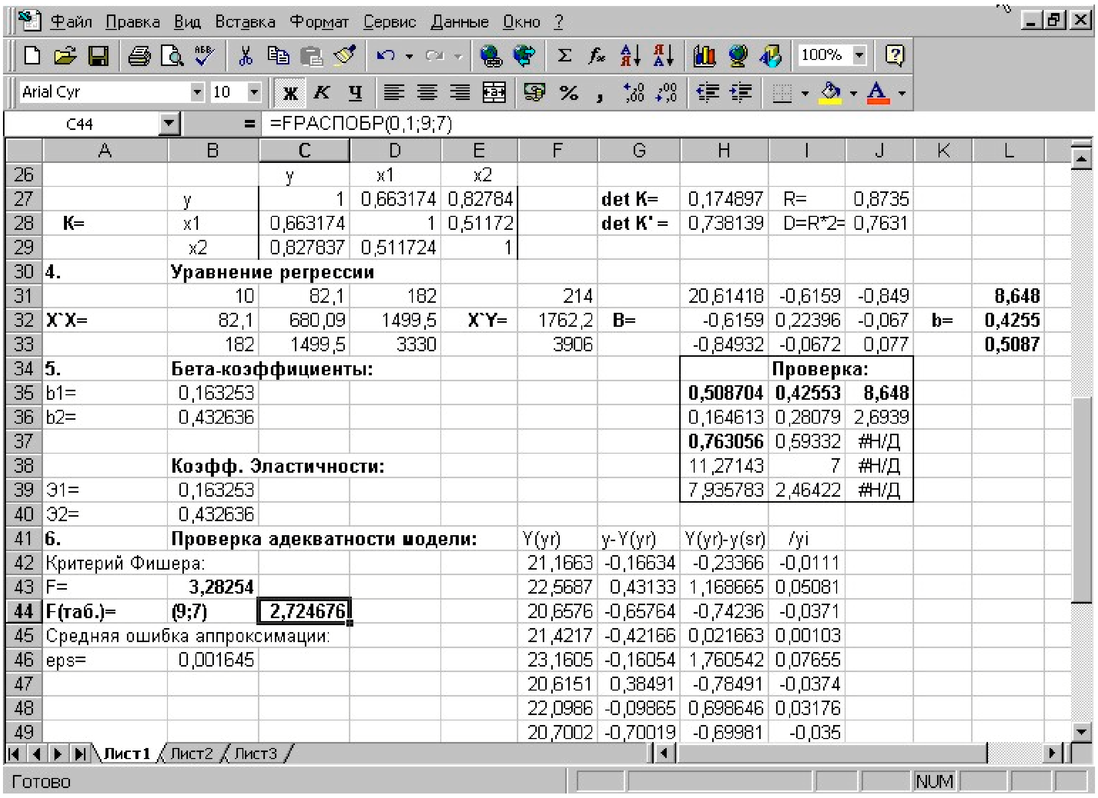
а затем вектор $b = \left(X'X\right)^{-1}\left(X'Y\right) = \begin{pmatrix} 8{,}648 \\ 0{,}425 \\ 0{,}509 \end{pmatrix}$ (функция МУМНОЖ).

Запишем уравнение регрессии:

$$\hat{y} = 8{,}648 + 0{,}426x_1 + 0{,}509x_2 .$$

Это уравнение выражает зависимость уровня рентабельности от производительности труда и продолжительности оборота оборотных средств. Коэффициенты уравнения показывают количественное воздействие каждого фактора на результативный показатель при неизменности других. В нашем примере: рентабельность повышается на 0,426% при увеличении производительности труда на 1 тыс. руб.; на 0,509% – при увеличении продолжительности оборота оборотных средств на 1 день.

Проверим правильность полученных результатов, используя функцию ЛИНЕЙН (см. рис. 6, ячейки H34:J39).



C44 = =FРАСПОБР(0,1;9;7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
26			y	x1	x2							
27		y	1	0,663174	0,82784		det K=	0,174897	R=	0,8735		
28	K=	x1	0,663174	1	0,51172		det K' =	0,738139	D=R*2=	0,7631		
29		x2	0,827837	0,511724	1							
30	**4.**	**Уравнение регрессии**										
31		10	82,1	182		214		20,61418	-0,6159	-0,849		**8,648**
32	X`X=	82,1	680,09	1499,5	X`Y=	1762,2	B=	-0,6159	0,22396	-0,067	b=	**0,4255**
33		182	1499,5	3330		3906		-0,84932	-0,0672	0,077		**0,5087**
34	**5.**	**Бета-коэффициенты:**							**Проверка:**			
35	b1=	0,163253						**0,508704**	**0,42553**	**8,648**		
36	b2=	0,432636						0,164613	0,28079	2,6939		
37								**0,763056**	0,59332	#Н/Д		
38		**Коэфф. Эластичности:**						11,27143	7	#Н/Д		
39	Э1=	0,163253						7,935783	2,46422	#Н/Д		
40	Э2=	0,432636										
41	**6.**	**Проверка адекватности модели:**				Y(yr)	y-Y(yr)	Y(yr)-y(sr)	/yi			
42	Критерий Фишера:					21,1663	-0,16634	-0,23366	-0,0111			
43	F=	**3,28254**				22,5687	0,43133	1,168665	0,05081			
44	**F(таб.)=**	**(9;7)**	**2,724676**			20,6576	-0,65764	-0,74236	-0,0371			
45	Средняя ошибка аппроксимации:					21,4217	-0,42166	0,021663	0,00103			
46	eps=	0,001645				23,1605	-0,16054	1,760542	0,07655			
47						20,6151	0,38491	-0,78491	-0,0374			
48						22,0986	-0,09865	0,698646	0,03176			
49						20,7002	-0,70019	-0,69981	-0,035			

Рис. 6

Коэффициенты эластичности найдем по формуле $Э_i = b_i \dfrac{\overline{x_i}}{\overline{y}}$.

Переменная	x_1	x_2
Коэф. эластичности	0,163	0,433

Согласно полученным данным, рентабельность возрастает на 0,16% при увеличении производительности труда на 1%; на 0,43% – при увеличении продолжительности оборота оборотных средств на 1%.

4) Для того чтобы убедиться в надежности уравнения связи и правомерности его использования для практических целей, необходимо дать статистическую оценку надежности показателей связи.

Критерий Фишера. Найдем фактическое значение критерия по формуле (11):

$$F_{\text{набл}} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\text{ост}}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 \Big/ (n-1)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \Big/ (n-k-1)} = 3{,}2825.$$

Заметим, что $\hat{y}_i$ вычисляется следующим образом: $\hat{y}_i = 8{,}648 + 0{,}426x_{i1} + 0{,}509x_{i2}$, где данные x_{i1} и x_{i1}, $i = \overline{1{,}10}$ берутся из условия задачи.

Найдем табличное значение критерия: при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ и, учитывая, что в нашем примере количество степеней свободы равно $n - 1 = 10 - 1 = 9$ и $n - k - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$, получим табличное значение критерия: $t = 2{,}72$ (функция FРАСПОБР). Так как $F_{\text{набл}} \geq F_{\text{табл}}$, то можно считать построенную модель адекватной.

Найдем среднюю ошибку аппроксимации по формуле (12): $\overline{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{y}_i - \overline{y}}{y_i}\right)^2 = 0{,}0016$. Средняя ошибка мала, что также свидетельствует об адекватности модели.

Следовательно, данное уравнение можно использовать для практических целей: а) оценки результатов хозяйственной деятельности; б) расчета влияния факторов на прирост результативного показателя; в) подсчета резервов повышения уровня исследуемого показателя; г) планирования и прогнозирования его величины.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СРЕДСТВАМИ EXCEL

Задача распределения ресурсов

Задачи распределения финансов, оборудования, сырья, людей можно рассматривать как задачи распределения ресурсов.

Задача. Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырех типов П1, П2, П3, П4, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Норма расхода, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, и наличие располагаемого ресурса приведены в табл. 1.

Таблица 1

Ресурс	Продукция				Запас ресурса
	П1	П2	П3	П4	
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Финансы	4	6	10	13	100
Прибыль	60	70	120	130	–

Составим математическую модель задачи. Пусть переменные x_j – количество выпускаемой продукции j-го типа, $j=\overline{1,4}$. Тогда математическая модель задачи имеет вид

$$z(x) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\le 110, \quad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,4}, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 &\le 100, \end{aligned}$$

где $z(x)$ – целевая функция, которая определяет суммарную прибыль от реализации произведенной продукции, первые три неравенства описывают условия ограниченности имеющихся ресурсов, кроме того, переменные x_j, $j=\overline{1,4}$ не могут быть выражены отрицательными числами.

Решение задачи средствами Excel [6]. Следует сделать форму и ввести исходные данные (рис. 7).

Далее осуществляется ввод зависимостей из математической модели (рис. 8). Чтобы получить значение целевой функции в ячейке F4, воспользуемся функцией **СУММПРОИЗВ**. Выбираем **Мастер**

Функций и вызываем математическую функцию СУММПРОИЗ. На экране появится диалоговое окно. В **массив 1** вести строку со значениями переменных, т. е. B$3:E$3 (знак $ ставим для того, чтобы адрес строки ячеек не менялся при копировании формул). Заметим, что в указанных ячейках B3:E3, которые на рис. 7 выделены серым цветом, по окончании решения задачи будет находиться оптимальное решение. В **массив 2** ввести адрес строки коэффициентов целевой функции, т. е. B4:E4. В ячейке будем иметь значение 0, согласно введенной формуле.


F4 = =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B4:E4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				ПЕРЕМЕННЫЕ							
2	имя	x1	x2	x3	x4						
3	знач										
4	коэф.цел. ф.	60	70	120	130	0	- значение целевой функции				
5				ОГРАНИЧЕНИЯ							
6	вид					лев.ч.	знак	пр.ч.			
7	Трудовые	1	1	1	1	0	<=	16			
8	Сырье	6	5	4	3	0	<=	110			
9	Финансы	4	6	10	13	0	<=	100			
10											
11											
12											

Рис. 7

Заметим, что все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести. Далее копируем формулу из ячейки F4 в столбец «левые части ограничений».

Решение задачи (рис. 9). Курсор в ячейку F4. Командой **Поиск решения** из меню **Сервис** откроем диалоговое окно **Поиск решения** и занесем в него необходимые данные:

Установить целевую функцию – адрес ячейки, отведенной под значение целевой функции, т. е. $F$4;

Равной – максимальному значению;

Изменяя ячейки – адреса изменяемых значений переменных, т. е. $B$3:$E$3;

Ограничения – **Добавить…**

На экране появится диалоговое окно *Добавление ограничения.*

Вводим ограничения по ресурсам $F$7≤$H$7 **Добавить;** $F$8≤$H$8 **Добавить;** $F$9≤$H$9. По окончании ввода данных нажать **OK**.

Можно добавить все ограничения сразу, так как они имеют одинаковый знак ограничений ≤ (рис. 9).

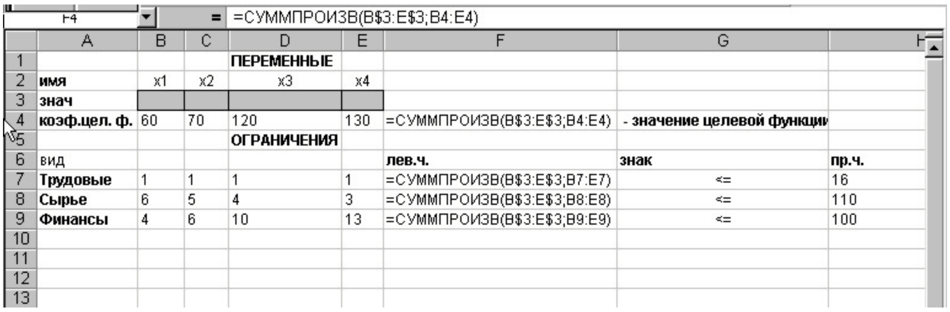


Рис. 8

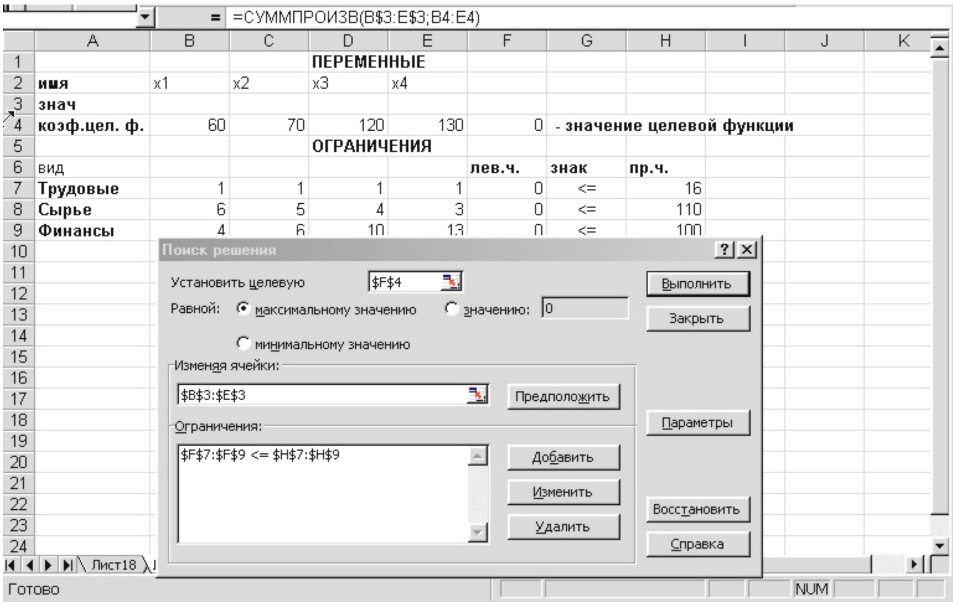


Рис. 9

Командой **Параметры** вызываем диалоговое окно **Параметры** и устанавливаем флажки: **Линейная модель, Неотрицательные значения, Автоматическое масштабирование** (рис. 10). **ОК**.

Возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения** и, щелкнув по кнопке **Выполнить,** находим оптимальное решение задачи. На экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 11). В ячейках B3:E3 имеем оптимальное решение задачи $X^{\text{opt}} = (10; 0; 6; 0)$, максимальное значение целевой функции – в ячейке F4 $z(X^{\text{opt}}) = 1320$. Если задача не имеет решения (целевая функция неограничена или система ограничений несовместна), то выдается сообщение: «Значения целевой ячейки не сходятся».

Анализ оптимального решения начинается после успешного решения задачи, когда на экране появляется окно **Результат поиска**

решения. Решение найдено (рис. 11). С помощью этого диалогового окна можно вызвать отчеты трех типов: результаты; устойчивость; пределы.

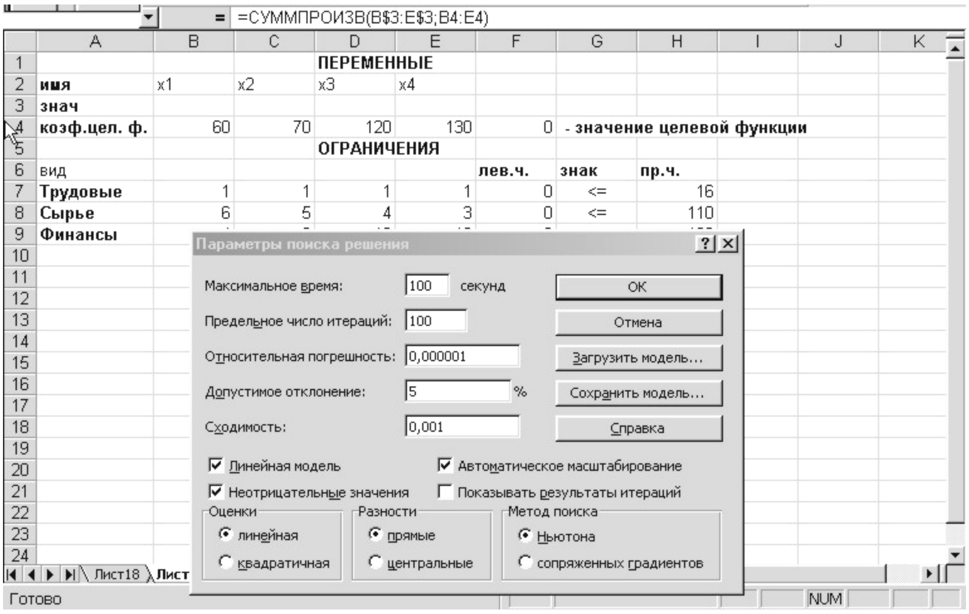


Рис. 10

Вызов отчета осуществляется по следующему алгоритму.

На экране: диалоговое окно **Результат поиска решения.** Решение найдено (рис. 11). Установить курсор на тип вызываемого отчета. Например: отчет по устойчивости. **OK**. На экране: вызванный отчет на новом листе, на ярлычке которого указано название отчета. Установить курсор на ярлычок с названием отчета и щелкнуть левой кнопкой мыши. На экране: вызванный отчет (см. рис. 12).

Отчет по устойчивости. Отчет состоит из двух таблиц. Первая приводит следующие значения для переменных: результат решения задачи; нормировочную стоимость, т. е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение; коэффициенты целевой функции; предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Во второй таблице приводятся аналогичные значения для ограничений: величина использованных ресурсов; теневая цена, т. е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу; значения приращения ресур сов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

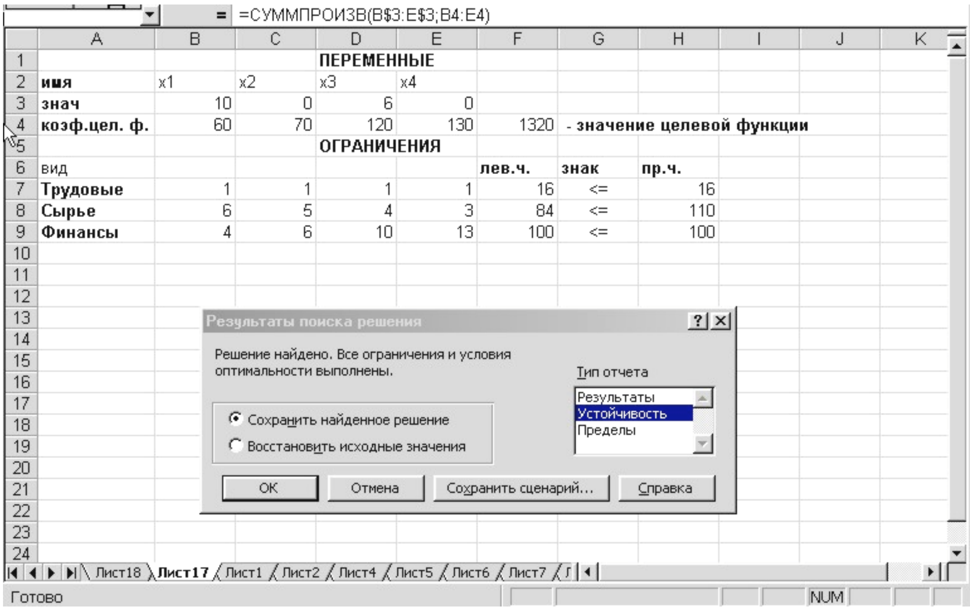


Рис. 11

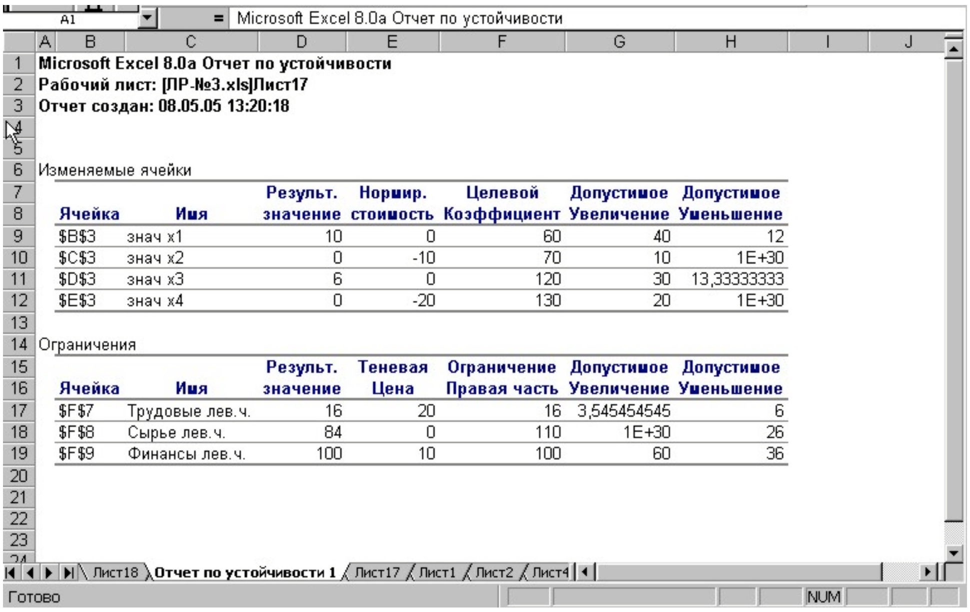


Рис. 12

Отчет по результатам. Отчет состоит из трех таблиц. В первой таблице приводятся сведения о целевой функции. В столбце **Исходно** приведены значения целевой функции до начала вычислений. Во второй таблице приводятся значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи. В третьей показываются результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий.

Отчет по пределам. В нем показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения.

Если же задача линейного программирования решения не имеет, то выдается сообщение: Поиск не может найти подходящего решения.

Решение транспортных задач средствами Excel. Двухэтапная транспортная задача

Задача. В некотором районе имеются m $(i=\overline{1,m})$ заводов A_i, мощности которых a_i. Продукция заводов поступает сначала на промежуточные базы D_r $(r=\overline{1,q})$, пропускная способность которых d_r, а затем n $(j=\overline{1,n})$ потребителям B_j с потребностями b_j. Возможности заводов, мощности промежуточных баз, запросы потребителей и стоимости перевозок единицы продукции от заводов на базы c_{ir} и с баз к потребителям t_{rj} представлены в табл. 2.

Таблица 2

Объем поставок a_i, т	Объем потребления b_j, т	Пропускная способность промежуточных пунктов (базы) d_r, т	Стоимость перевозки единицы продукции	
			c_{ir}, ден. ед.	t_{rj}, ден. ед.
260	220	350	4, 1, 6	2, 6, 1, 3
350	370	330	2, 4, 3	8, 3, 4, 1
	180			
380	220	400	5, 8, 3	1, 5, 8, 3

Определить: оптимальную схему прикрепления потребителей к перевалочным базам и перевалочных баз к поставщикам на основе решения двухэтапной транспортной задачи.

Двухэтапную транспортную задачу легко свести к классической транспортной задаче. Для этого матрицу перевозок следует представить в виде табл. 3. В такой матрице промежуточные базы выступают одновременно и как поставщики, и как потребители. Матрица состоит из четырех квадрантов. В первом квадранте отражены связи заводов с промежуточными базами, в четвертом – связи баз с потребителями. Второй квадрант показывает связи заводов с потребителями. Так как непосредственные перевозки с заводов потребителям не осуществляются, то все тарифы считаются равными М (М – сколь угодно большое положительное число). В третьем квадранте отражаются связи между промежуточными базами. Поскольку перевозки между базами запрещаются, тарифы равны М, за исключением тех клеток квадранта, в которых отражаются связи базы с самой собой (здесь тариф равен 0). Диагональ, полученная из нулевых тарифов, называется фиктивной.

Таблица 3

Поставщики	Объемы поставок	Потребители							
		Промежуточные базы				Предприятия-потребители			
		d_1	d_2	...	d_q	b_1	b_2	...	b_n
Предприятия-поставщики	a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1q}	М	М	...	М
	...			I				II	
	a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mq}	М	М	...	М
Промежуточные базы	d_1	0	М	...	М	t_{11}	t_{12}	...	t_{1n}
	...			III				IV	
	d_q	М	М	...	0	t_{q1}	t_{q2}	...	t_{qn}

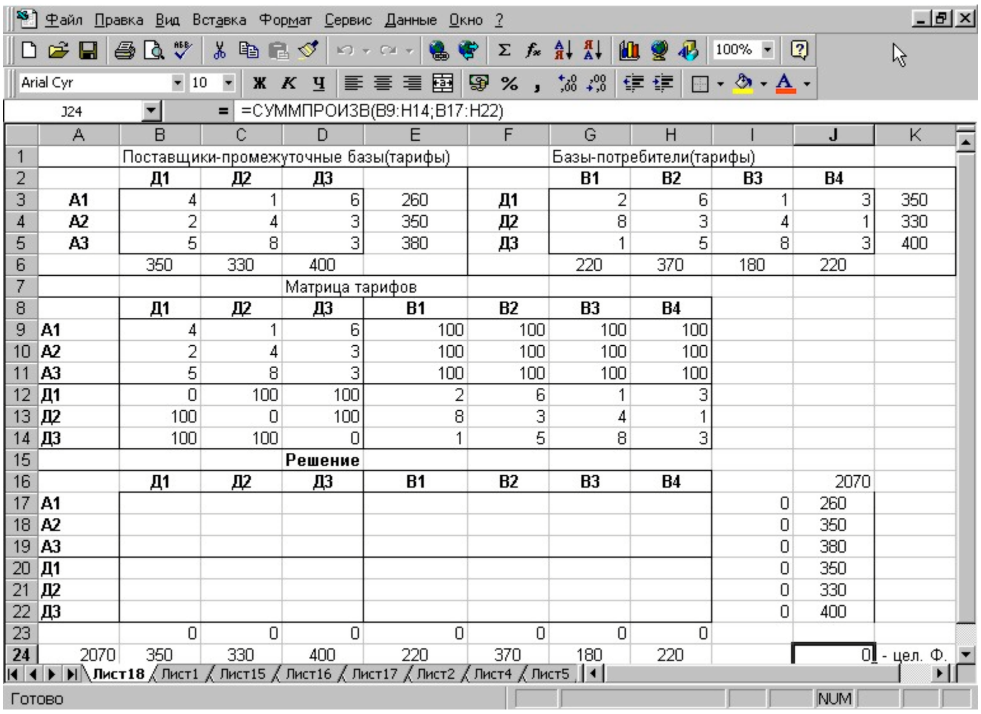
Решение двухэтапной транспортной задачи, как и классической транспортной задачи, складывается из: 1) нахождения начального опорного решения; 2) нахождения оптимального решения. При этом используют известные методы решения классической транспортной задачи. Так, для нахождения начального опорного плана можно воспользоваться методами северо-западного угла, минимального элемента и т. д.; для оптимального – методом потенциалов.

Решение двухэтапной транспортной задачи имеет особенности. Так, при нахождении базисного решения сначала заполняется первый (или четвертый) квадрант, потом фиктивная диагональ, а затем четвертый (или первый) квадрант. Кроме того, если цикл пересчета проходит через фиктивную диагональ при переходе от одного базисного решения к другому, он обязательно проходит через неё дважды.

Замечание. Если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{r=1}^{q} d_r ,$$

т. е. суммарная мощность поставщиков равна суммарной потребности потребителей и равна суммарной пропускной способности баз, то за дачу можно решать по частям. Сначала находится оптимальный план поставок от поставщиков к базам, затем оптимальный план поставок с баз к потребителям (т. е. решаются отдельно две транспортные задачи). Оптимальный план двухэтапной задачи получается путем объединения этих двух поставок.



J24 =СУММПРОИЗВ(B9:H14;B17:H22)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Поставщики-промежуточные базы(тарифы)					Базы-потребители(тарифы)				
2		Д1	Д2	Д3			В1	В2	В3	В4	
3	А1	4	1	6	260	Д1	2	6	1	3	350
4	А2	2	4	3	350	Д2	8	3	4	1	330
5	А3	5	8	3	380	Д3	1	5	8	3	400
6		350	330	400			220	370	180	220	
7				Матрица тарифов							
8		Д1	Д2	Д3	В1	В2	В3	В4			
9	А1	4	1	6	100	100	100	100			
10	А2	2	4	3	100	100	100	100			
11	А3	5	8	3	100	100	100	100			
12	Д1	0	100	100	2	6	1	3			
13	Д2	100	0	100	8	3	4	1			
14	Д3	100	100	0	1	5	8	3			
15				Решение							
16		Д1	Д2	Д3	В1	В2	В3	В4		2070	
17	А1								0	260	
18	А2								0	350	
19	А3								0	380	
20	Д1								0	350	
21	Д2								0	330	
22	Д3								0	400	
23		0	0	0	0	0	0	0			
24	2070	350	330	400	220	370	180	220		0	- цел. Ф.

Рис. 13

Для решения транспортной задачи с помощью **Поиска решения** следует ввести данные, как показано на рис. 13. В ячейки B9:H14 вводится стоимость перевозок. Ячейки B17:H22 отведены под значения объемов перевозок, пока неизвестных, после решения здесь появится оптимальное решение. В ячейки J17:J22 введены объемы производства, а в ячейки B24: H24 – объемы спроса. В ячейку J24 вводится целевая функция. В ячейку I17 – формула =СУММ(B17:H17), которая затем копируется в ячейки I18:I22. Эти формулы характеризуют объем производства. В ячейку B23 вводится формула =СУММ(B17:B22), затем она копируется в ячейки C23:H23. Эти формулы определяют объем продукции, ввозимой в пункты потребления.

Далее выбираем команду **Сервис**, **Поиск решения** и заполняем открывшееся диалоговое окно **Поиск решения** и вводим требуемые данные (аналогично задаче распределения ресурсов, см. рис. 14).

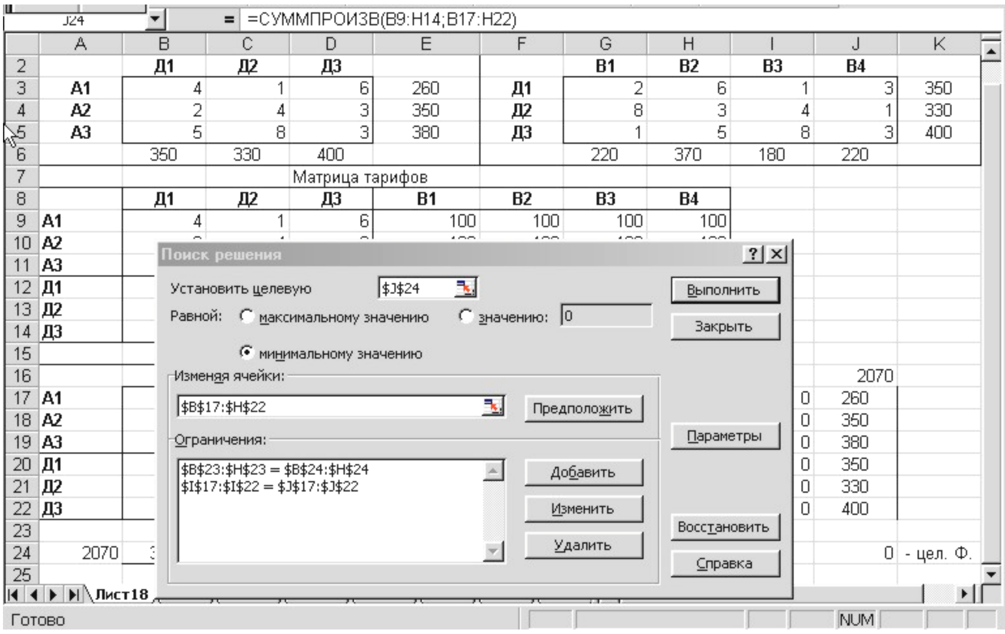


Рис. 14

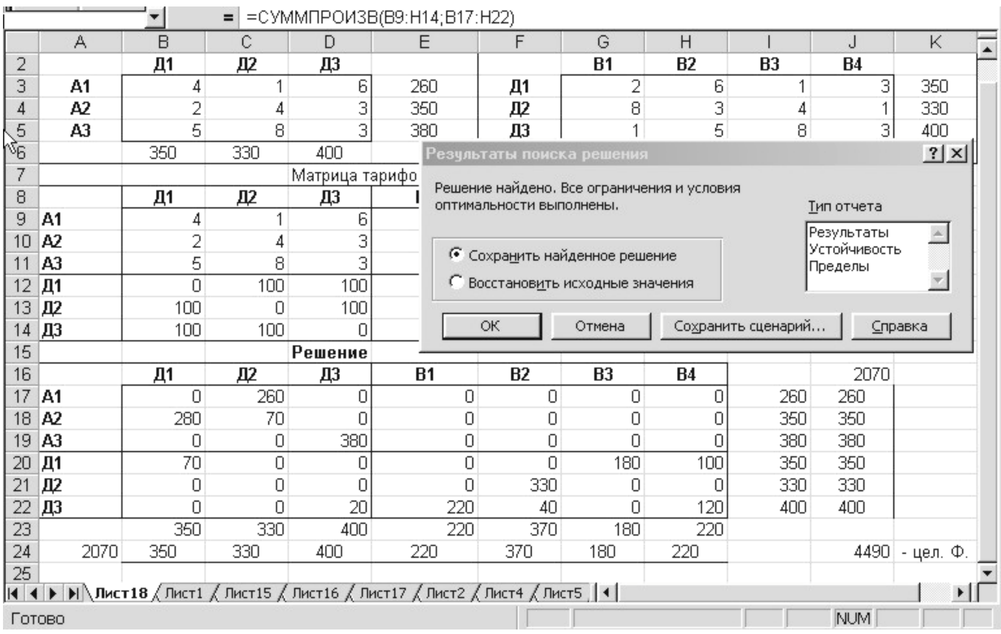


Рис. 15

В диалоговом окне Параметры поиска решения установить флажки: **Линейная модель**, **Неотрицательные значения**, **Автоматическое маштабирование**. После нажатия кнопки **Выполнить** получим оптимальный план поставок продукции и соответствуюшие ему транспортные расходы (рис. 15)

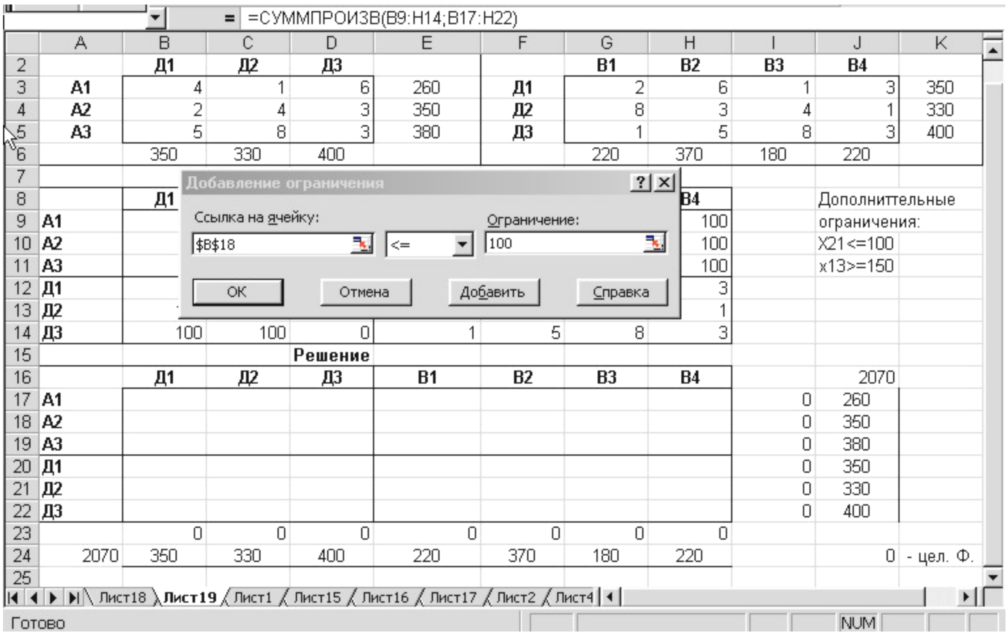


Рис. 16

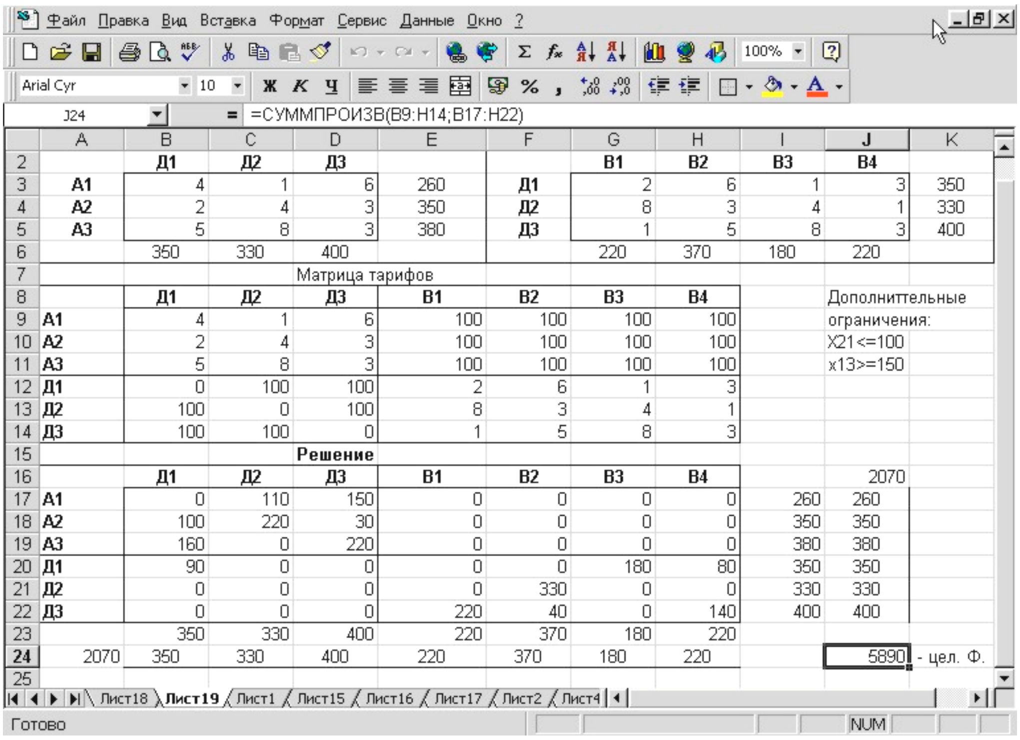


Рис. 17

Усложним постановку задачи. Пусть требуется решить рассмотренную выше задачу с дополнительными ограничениями на перевозки: от второго производителя на первую базу может быть доставлено груза не более 100 ед., а от третьего производителя на первую базу должно быть доставлено не менее 150 ед.

Решение задачи аналогично выше рассмотренному. Указанные ограничения учитываются в компьютерной реализации на этапе ввода ограничений. Сначала вводим общие ограничения на перевозки (окно **Добавить ограничения** (рис. 14)), а затем дополнительные ограничения (рис. 16). В результате решения получаем оптимальный план, представленный на рис. 17.

Оптимизация размещения лесозаготовительного производства между лесопунктами леспромхоза (одноэтапная многопродуктовая задача размещения и концентрации производства)

Задача. В состав леспромхоза входят два лесопункта, каждый из которых осуществляет отгрузку круглых лесоматериалов. Поскольку леспромхоз производит несколько видов сортиментов, то задача является многопродуктовой. Кроме отгрузки сортиментов на сторону, в составе первого лесопункта организовано производство пиломатериалов и технологической щепы из дров. При решении задачи следует учитывать, что в перерабатывающих производствах может быть использовано сырье обоих лесопунктов.

В задаче известны: минимально и максимально возможные объемы производства отдельных сортиментов в разрезе лесопунктов; направления использования заготовленных сортиментов и потребности в них по каждому из этих направлений; текущие затраты на заготовку и транспортировку сырья.

В результате решения задачи требуется определить оптимальные объемы производства сортиментов конкретного вида в разрезе лесопунктов, а также оптимальные размеры каждого из лесопунктов. Исходные данные, необходимые для решения задачи, представлены в табл. 4–6.

Таблица 4

Мощности лесопунктов по выпуску отдельных сортиментов, тыс. м^3

Лесопункт 1			Лесопункт 2		
Пиловочник	Тех. сырье	Дрова	Пиловочник	Тех. сырье	Дрова
50/60	10/15	35/50	23/30	4/10	15/25

Везде: числитель – нижний предел производства; знаменатель – верхний предел производства.

Таблица 5

Потребности в сортиментах по направлениям использования, тыс. м^3

Переработано внутри предприятия (на первом лесопункте)		Поставлено на сторону			Использовано дров на топливные нужды
пиловочника	дров	пиловочника	дров	тех. сырья	
14	20	60	20	15	15

Таблица 6

Затраты на производство и транспортировку сырья, ден. ед./тыс. м^3

Затраты на производство						Затраты на перевозку сырья из второго лесопункта в первый
Пиловочника		Тех. сырья		Дров		
Лесопункт № 1	Лесопункт № 2	Лесопункт № 1	Лесопункт № 2	Лесопункт № 1	Лесопункт № 2	
25	23	6	10	3	7	4

Решение данной задачи начинается с представления исходных данных в виде таблицы, в которой отражены все допустимые перевозки и их стоимость.

Составим рабочую таблицу (табл. 8). Данная задача является транспортной многопродуктовой задачей с двусторонними ограничениями на мощности поставщиков. Поэтому построение транспортной таблицы начинается с определения количества поставщиков и их мощностей. Фактически в задаче имеется три поставщика: поставщики пиловочника, дров и технического сырья, но так как каждый из них имеет двусторонние ограничения на мощности, то будем рассматривать каждого из поставщиков как двух. Первый из них имеет мощность, равную нижней границе мощности исходного поставщика, а второй – мощность, равную разнице между нижней и верхней границей. Так, например, для пиловочника имеем $Л_1^{11}$ – первый поставщик с мощностью 50 ед., $Л_1^{21}$ – второй поставщик с мощностью 60 – 50 = = 10 ед. (данные взяты из табл. 4). Аналогично производится подсчет мощностей остальных поставщиков (для первого и второго лесопунктов). Таким образом, имеем 12 поставщиков с соответствующими мощностями (см. табл. 8).

Далее нужно определить потребителей и их потребности. Ис пользуя условие задачи (табл. 5), получим 6 потребителей с соответствующими потребностями (табл. 8).

Получили открытую транспортную задачу. Для решения этой задачи нужно ввести фиктивных потребителей, так как имеющиеся мощности производителей больше потребностей потребителей (190>144). Введем трех фиктивных потребителей (по количеству используемых сортиментов): B_4^1, B_4^2, B_4^3. Определим их потребности. Для пиловочника имеем: мощности = 50 + 10 + 23 + 7 = 90, а потребности = 14 +60 = 76. Тогда 90 – 76 = 14. Таким образом, мощности фиктивного поставщика по пиловочнику $b_4^1 = 16$. Аналогично рассчитываются мощности остальных фиктивных потребителей (по дровам и техническому сырью).

В транспортной задаче тарифы полагаются равными некоторой большой величине М в тех случаях, когда вид продукции, производимый в пункте производства, непригоден в данном пункте потребления. В остальных случаях данные берутся из табл. 6. Затраты на «поставку» сырья от любого из «поставщиков» фиктивному «потребителю» принимаются равными нулю не для всех пунктов производства, а лишь для тех, по которым объем производства принимается равным разности между установленными верхними и нижними границами объема производства. В этом случае поставки фиктивному потребителю будут характеризовать излишки производственных мощностей.

Транспортная таблица составлена (табл. 8). Далее задачу можно решать по этой таблице, а можно воспользоваться тем фактом, что при переработке сортименты не перемешиваются и поэтому исходную задачу можно разбить на три транспортные задачи (по количеству сортиментов) меньшего размера (табл. 7, 9, 10).

Таблица 7. **Пиловочник**

Лесопункты		Мощности	Потребности		
			$b_1^1 = 14$	$b_2^1 = 60$	$b_4^1 = 14$
Л1	$Л_1^{11}$	50	25	25	M
	$Л_1^{21}$	10	25	25	0
Л2	$Л_2^{11}$	23	M	27	M
	$Л_2^{21}$	7	M	27	0

Таблица 8

Лесопункты	Наим. продукта	Мощности	Потребности								
			В1 (внутри предприятия)		В2 – поставки за пределы предприятия			В3 (топл.)	В4 – фиктивные		
			B_1^1 - пил	B_1^2 - др	B_2^1 - пил	B_2^2 - др	B_2^3 - тех. с	B_3	B_4^1 - пил	B_4^2 - др	B_4^3 - тех. с
			$b_1^1 = 14$	$b_1^2 = 20$	$b_2^1 = 60$	$b_2^2 = 20$	$b_2^3 = 15$	$b_3 = 15$	$b_4^1 = 16$	$b_4^2 = 20$	$b_4^3 = 10$
Л1	$Л_1^{11}$ - пил	50	25	М	25	М	М	М	М	М	М
	$Л_1^{12}$ - др	35	М	3	М	3	М	3	М	М	М
	$Л_1^{13}$ - тех. с	10	М	М	М	М	6	М	М	М	М
	$Л_1^{21}$ - пил	60 – 50 = 10	25	М	25	М	М	М	0	М	М
	$Л_1^{22}$ - др	50 – 35 = 15	М	3	М	3	М	3	М	0	М
	$Л_1^{23}$ - тех. с	15 – 10 = 5	М	М	М	М	6	М	М	М	0
Л2	$Л_2^{11}$ - пил	23	М	М	23+4	М	М	М	М	М	М
	$Л_2^{12}$ - др	15	М	М	М	7+4	М	7+4	М	М	М
	$Л_2^{13}$ - тех. с	4	М	М	М	М	10+4	М	М	М	М
	$Л_2^{21}$ - пил	30 – 23 = 7	М	М	23+4	М	М	М	0	М	М
	$_2^{22}$ - др	25 –1 5 = 10	М	М	М	7+4	М	7+4	М	0	М
	$Л_2^{23}$ - тех. с	10 – 4 = 6	М	М	М	М	10+4	М	М	М	0

Таблица 9. **Дрова**

Лесопункты		Мощности	Потребности			
			$b_1^2=20$	$b_2^2=20$	$b_3=15$	$b_4^2=20$
Л1	$Л_1^{11}$	35	3	3	3	M
	$Л_1^{21}$	15	3	3	3	0
Л2	$Л_2^{11}$	15	M	11	11	M
	$Л_2^{21}$	10	M	11	11	0

Таблица 10. **Тех. сырье**

Лесопункты		Мощности	Потребности	
			$b_2^3=15$	$b_4^3=10$
Л1	$Л_1^{11}$	10	6	M
	$Л_1^{21}$	5	6	0
Л2	$Л_2^{11}$	4	14	M
	$Л_2^{21}$	6	14	0

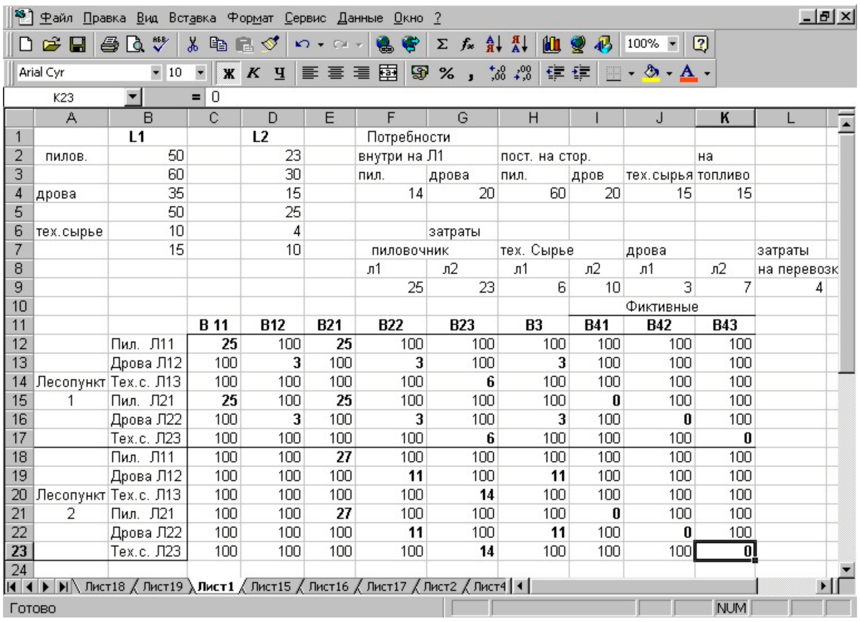
Получим три транспортные задачи закрытого типа (проверить, что эти задачи закрытого типа). Эти задачи можно решать используя Excel. Рассмотрим решение задачи, представленной табл. 8. На рис. 18 введены: условие рассматриваемой задачи и матрица тарифов. Далее нужно ввести зависимости рассматриваемой задачи. Задача решается с использованием команды **Поиск решения** (меню **Сервис**). Решение на рис. 19.

Решая задачи, представленные в табл. 7, 9, 10, получаем

$$X_{\text{пил}}^{\text{опт}}=\begin{pmatrix}13&37&0\\1&0&9\\0&23&0\\0&0&7\end{pmatrix},\quad X_{\text{др}}^{\text{опт}}=\begin{pmatrix}15&5&15&0\\5&0&0&10\\0&15&0&0\\0&0&0&10\end{pmatrix},\quad X_{\text{тех. с}}^{\text{опт}}=\begin{pmatrix}10&0\\1&4\\4&0\\0&6\end{pmatrix}.$$

Значения целевых функций $F(x_{ij}^k)$: $F(X_{\text{пил}}^{\text{опт}})=1896$, $F(X_{\text{др}}^{\text{опт}})=285$, $F(X_{\text{тех. с}}^{\text{опт}})=122$, что дает в сумме 2303 и совпадает с решением задачи на рис. 18. Полученное решение говорит о том, что мощность первого лесопункта по пиловочнику должна быть равна

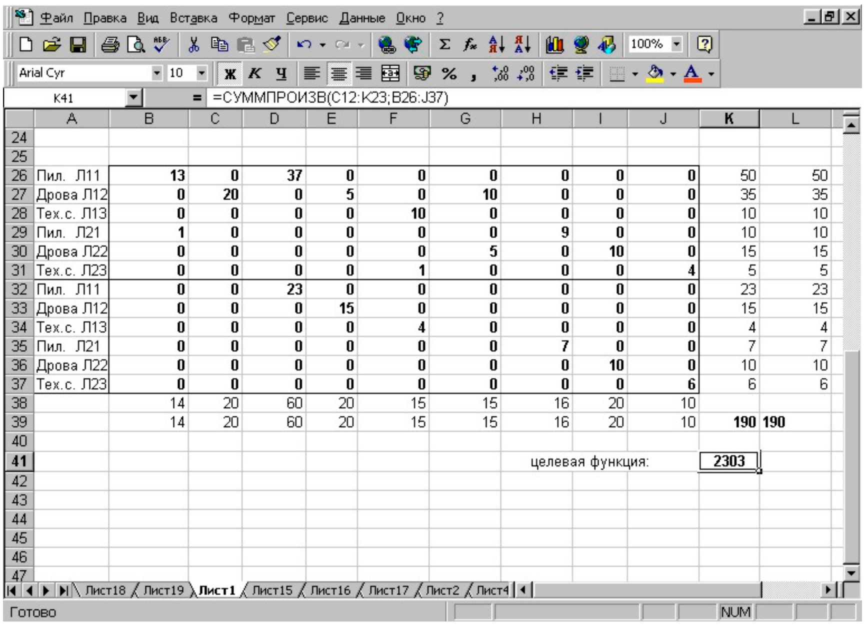
13 + 37 + 1 = 51 тыс. м^3, из них 14 тыс. м^3 перерабатывается внутри предприятия, а 37 тыс. м^3 поставляется на сторону. Излишки производственной мощности для первого лесопункта составляют 9 тыс. м^3.



K23 = 0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		L1		L2		Потребности						
2	пилов.	50		23		внутри на Л1		пост. на стор.			на	
3		60		30		пил.	дрова	пил.	дров	тех.сырья	топливо	
4	дрова	35		15		14	20	60	20	15	15	
5		50		25								
6	тех.сырье	10		4			затраты					
7		15		10		пиловочник		тех. Сырье		дрова		затраты
8						л1	л2	л1	л2	л1	л2	на перевозк
9						25	23	6	10	3	7	4
10										Фиктивные		
11			B 11	B12	B21	B22	B23	B3	B41	B42	B43	
12		Пил. Л11	25	100	25	100	100	100	100	100	100	
13		Дрова Л12	100	3	100	3	100	3	100	100	100	
14	Лесопункт	Тех.с. Л13	100	100	100	100	6	100	100	100	100	
15	1	Пил. Л21	25	100	25	100	100	100	0	100	100	
16		Дрова Л22	100	3	100	3	100	3	100	0	100	
17		Тех.с. Л23	100	100	100	100	6	100	100	100	0	
18		Пил. Л11	100	100	27	100	100	100	100	100	100	
19		Дрова Л12	100	100	100	11	100	11	100	100	100	
20	Лесопункт	Тех.с. Л13	100	100	100	100	14	100	100	100	100	
21	2	Пил. Л21	100	100	27	100	100	100	0	100	100	
22		Дрова Л22	100	100	100	11	100	11	100	0	100	
23		Тех.с. Л23	100	100	100	100	14	100	100	100	0	

Рис. 18



K41 =СУММПРОИЗВ(C12:K23;B26:J37)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
26	Пил. Л11	13	0	37	0	0	0	0	0	0	50	50
27	Дрова Л12	0	20	0	5	0	10	0	0	0	35	35
28	Тех.с. Л13	0	0	0	0	10	0	0	0	0	10	10
29	Пил. Л21	1	0	0	0	0	0	9	0	0	10	10
30	Дрова Л22	0	0	0	0	0	5	0	10	0	15	15
31	Тех.с. Л23	0	0	0	0	1	0	0	0	4	5	5
32	Пил. Л11	0	0	23	0	0	0	0	0	0	23	23
33	Дрова Л12	0	0	0	15	0	0	0	0	0	15	15
34	Тех.с. Л13	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	4
35	Пил. Л21	0	0	0	0	0	0	7	0	0	7	7
36	Дрова Л22	0	0	0	0	0	0	0	10	0	10	10
37	Тех.с. Л23	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	6
38		14	20	60	20	15	15	16	20	10		
39		14	20	60	20	15	15	16	20	10	190	190
41								целевая функция:			2303	

Рис. 19

Аналогичные выводы следует сделать по второму лесопункту и по остальным сортиментам: по тех. сырью и дровам.

МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Пусть x_{ij} – **межотраслевые потоки продукции**, где i и j – соответственно номера отраслей, производящих и потребляющих; X_i – **валовой выпуск продукции** i-й отрасли; Y_i – **конечная продукция** i-й отрасли, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Основу **экономико-математической модели межотраслевого баланса (МОБ)** составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых затрат на производство единицы продукции:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}, \tag{13}$$

где

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{X_j},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Коэффициент прямых затрат a_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли. Коэффициент прямых затрат является довольно стабильной величиной во времени.

Из формулы (14) следует, что межотраслевые потоки продукции можно определить по формуле

$$x_{ij}=a_{ij}\cdot X_j,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Систему уравнений баланса можно записать в виде

$$X_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j+Y_i,\ i=\overline{1,n}, \tag{16}$$

или в матричной форме

$$X=AX+Y, \tag{17}$$

где X – вектор-столбец валовой продукции и Y – вектор-столбец конечной продукции.

Система уравнений (16) или (17) называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью «затраты – выпуск», моделью Леонтьева). С помощью балансовой модели можно выполнять три варианта расчетов:

• задавая в модели величины валовой продукции каждой отрасли $\left(X_i\right)$, определить объем конечной продукции каждой отрасли $\left(Y_i\right)$

$$Y=\left(E-A\right)X; \tag{18}$$

• задавая величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i)

$$X = (E - A)^{-1} Y; \tag{19}$$

• для ряда отраслей – задавая величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых, в этом случае удобнее пользоваться системой уравнений (16).

В формулах (18) и (19) E – единичная матрица размерности $n \times n$, а $(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная матрице $(E - A)$. Обозначив обратную матрицу через B, модель (19) можно записать в виде

$$X = BY. \tag{20}$$

Матрица $B = (b_{ij})_{n \times n}$ есть **матрица коэффициентов полных затрат**. Коэффициенты полных затрат b_{ij} показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли. Полученные результаты можно представить в виде балансовой таблицы.

<table>
<tr><td>Потребляющие отрасли</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">...</td><td rowspan="2">n</td><td colspan="2">Продукция</td></tr>
<tr><td>Производящие отрасли</td><td>Конечная, Y</td><td>Валовая, X</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3" rowspan="3">Плановые объемы межотраслевых поставок: x_{ij}</td><td>Y_1</td><td>X_1</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>n</td><td>Y_n</td><td>X_n</td></tr>
<tr><td>Z</td><td>Z_1</td><td>...</td><td>Z_n</td><td>$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$</td><td></td></tr>
<tr><td>X</td><td>X_1</td><td>...</td><td>X_n</td><td></td><td>$\sum_i X_i$</td></tr>
</table>

Условно чистая продукция:

$$Z_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij},\ j = \overline{1, n}. \tag{21}$$

$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ – балансовое соотношение данной модели.

Коэффициенты полных затрат можно применять тогда, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j \ , \ i = \overline{1, n}, \tag{22}$$

где ΔX_i, и ΔY_j – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

На практике обычно известен вектор спроса Y. Задача межотраслевого баланса заключается в определении вектора выпуска X так, чтобы удовлетворить спрос. По смыслу задачи все $X_i \geq 0$.

Модель (17) является **продуктивной**, если положительное решение системы (17) существует для любого неотрицательного вектора Y. По экономическому смыслу задачи все $a_{ij} \geq 0$, причем все $a_{ii} < 1$. Если матрица коэффициентов прямых материальных затрат A является продуктивной, то из условия продуктивности существует матрица $B = (E - A)^{-1}$, которая является суммой сходящегося матричного ряда:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots \ . \tag{23}$$

Затраты $A^1 = A \cdot A$ называются **косвенными затратами первого порядка**, второго – $A^2 = A \cdot A^1$, третьего – $A^3 = A \cdot A^2$. Тогда можно вычислить полные материальные затраты по приближенной формуле

$$\widetilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \left(\widetilde{b}_{ij}\right)_{n \times n}. \tag{24}$$

Относительные погрешности вычислений составят (в %): $\dfrac{b_{ij} - \widetilde{b}_{ij}}{b_{ij}} \cdot 100\%$.

Задача. Народное хозяйство представлено тремя отраслями: 1) тяжелая промышленность; 2) легкая промышленность; 3) сельское хозяйство. За отчетный год получены данные о межотраслевых поставках x_{ij} и векторе объемов конечного потребления Y_0. Необходимо рассчитать:

1) матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$, матрицу «затраты – выпуск» $(E - A)$ и вектор конечного потребления Y для заданного вектора валовых выпусков X. Результаты

представить в виде балансовой таблицы;

2) матрицу коэффициентов полных материальных затрат $B=(b_{ij})$ и валовые объемы выпуска $X_{пл}$ для заданного вектора конечного потребления $Y_{пл}$. Определить плановые объемы межотраслевых поставок $(x_{ij})_{пл}$ и пояснить, как валовые объемы выпуска продукции $(X_{пл})_i, i=\overline{1,n}$ распределились между отраслями. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

3) приросты валовых объемов выпуска, если конечное потребление изменится на ΔY_i процентов по сравнению с $Y_{пл}$;

4) матрицы коэффициентов косвенных затрат первого A^1, второго A^2 и третьего A^3 порядков, сравнить сумму затрат $(E+A+A^1+A^2+A^3)$ с полными затратами B, найти относительные погрешности. Данные приведены в табл. 11.

Таблица 11

№ отрасли	Межотраслевые потоки X			Y_0	X	$Y_{пл}$	ΔY_0, %
	1	2	3				
1	80	15	25	80	300	150	+10
2	10	60	5	225	400	300	-10
3	10	30	30	30	400	50	+50

Решение.

1) По данным задачи находим вектор объемов валовых выпусков $X_0=\begin{pmatrix}80+15+25+80\\10+60+5+225\\10+30+30+30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\300\\100\end{pmatrix}$.

Находим матрицу коэффициентов прямых затрат по формуле (14):

$$A=\begin{pmatrix}\frac{80}{200} & \frac{15}{300} & \frac{25}{100}\\ \frac{10}{200} & \frac{60}{300} & \frac{5}{100}\\ \frac{10}{200} & \frac{30}{300} & \frac{30}{100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}05 & 0{,}25\\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}05\\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}.$$

Матрица «затраты – выпуск» примет вид

$$(E-A)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,4 & 0,05 & 0,25\\ 0,05 & 0,2 & 0,05\\ 0,05 & 0,1 & 0,3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6 & -0,05 & -0,25\\ -0,05 & 0,8 & -0,05\\ -0,05 & -0,1 & 0,7\end{pmatrix}.$$

Новый вектор конечного потребления найдем по данному вектору валовых выпусков X (формула (18)), используем функцию МУМНОЖ:

$$Y=(E-A)X=\begin{pmatrix}0,6 & -0,05 & -0,25\\ -0,05 & 0,8 & -0,05\\ -0,05 & -0,1 & 0,7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}300\\ 400\\ 400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\ 285\\ 225\end{pmatrix}.$$

Чтобы построить таблицу МОБ на расчетный период, нужно определить межотраслевые потоки. Для этого воспользуемся формулой (15):

$$x_{11}=0,4\cdot 300=120;\ x_{12}=0,05\cdot 400=20;\ x_{13}=0,25\cdot 400=100;$$

$$x_{21}=0,05\cdot 300=15;\ x_{22}=0,2\cdot 400=80;\ x_{23}=0,05\cdot 400=20;$$

$$x_{31}=0,05\cdot 300=15;\ x_{32}=0,1\cdot 400=40;\ x_{33}=0,3\cdot 400=120.$$

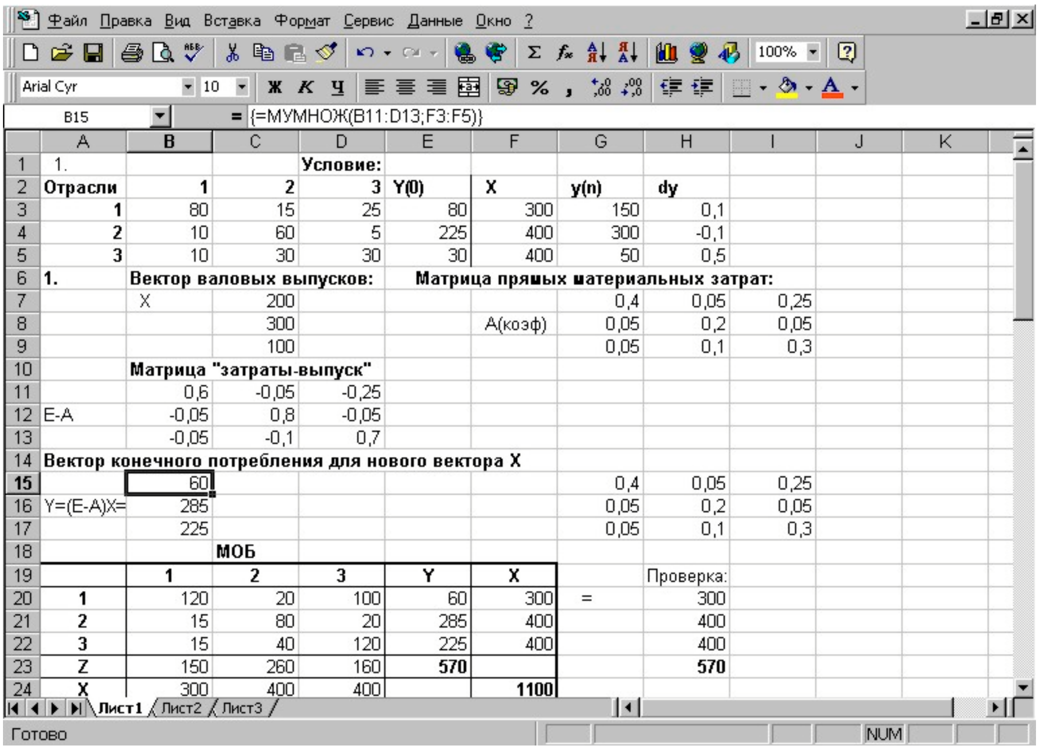
Валовая добавленная стоимость (условно чистая продукция) находится по формуле (21).

Межотраслевой баланс на расчетный период представлен в табл. 12.

Таблица 12

Потребляющие отрасли	1	2	3	Продукция	
Производящие отрасли				Конечная, Y	Валовая, X
1	120	20	100	60	300
2	15	80	20	285	400
3	15	40	120	225	400
Z	150	260	160	**570**	
X	300	400	400		**1100**

Все расчеты проводятся на компьютере. Даный межотраслевой баланс находится в ячейках A19:F24 (см. рис. 20).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1.			Условие:					
2	Отрасли	1	2	3	Y(0)	X	y(n)	dy	
3	1	80	15	25	80	300	150	0,1	
4	2	10	60	5	225	400	300	-0,1	
5	3	10	30	30	30	400	50	0,5	
6	1.	Вектор валовых выпусков:			Матрица прямых материальных затрат:				
7		X	200				0,4	0,05	0,25
8			300			А(коэф)	0,05	0,2	0,05
9			100				0,05	0,1	0,3
10		Матрица "затраты-выпуск"							
11		0,6	-0,05	-0,25					
12	E-A	-0,05	0,8	-0,05					
13		-0,05	-0,1	0,7					
14	Вектор конечного потребления для нового вектора X								
15		60					0,4	0,05	0,25
16	Y=(E-A)X=	285					0,05	0,2	0,05
17		225					0,05	0,1	0,3
18			МОБ						
19		1	2	3	Y	X		Проверка:	
20	1	120	20	100	60	300	=	300	
21	2	15	80	20	285	400		400	
22	3	15	40	120	225	400		400	
23	Z	150	260	160	570			570	
24	X	300	400	400		1100			

Рис. 20

2) Найдем матрицу коэффициентов полных материальных затрат B путем обращения матрицы $(E-A)$, функция МОБР:

$$B=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}735 & 0{,}187 & 0{,}633\\ 0{,}118 & 1{,}273 & 0{,}133\\ 0{,}14 & 0{,}196 & 1{,}492\end{pmatrix}.$$

Объем производства валовой продукции $X_{\text{пл}}$ при заданном объеме конечной продукции $Y_{\text{пл}}$ в плановом периоде можно определить, используя формулу (19):

$$X_{\text{пл}}=(E-A)^{-1}Y_{\text{пл}}=BY_{\text{пл}}=\begin{pmatrix}348{,}183\\ 406{,}409\\ 154{,}357\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}348\\ 406\\ 154\end{pmatrix}.$$

Чтобы построить таблицу МОБ на планируемый период, нужно определить межотраслевые потоки. Плановые объемы межотраслевых потоков найдем по формуле (15).

Межотраслевой баланс на плановый период представлен в табл. 13.

Таблица 13

Потребляющие отрасли / Производящие отрасли	1	2	3	Продукция: Конечная, Y	Продукция: Валовая, X
1	139	20	39	150	348
2	17	81	8	300	406
3	17	41	46	50	154
Z	174	264	62	**500**	
X	348	406	154		**909**

3) Так как по условию задачи Y_1 должно увеличиться на 10%, Y_2 – уменьшиться на 10%, а Y_3 – увеличиться на 50%, то компоненты нового вектора конечного потребления будут равны

$$Y_1 + \Delta Y_1 = 150 + 0{,}1 \cdot 150 = 165,$$

$$Y_2 + \Delta Y_2 = 300 - 0{,}1 \cdot 300 = 270,$$

$$Y_3 + \Delta Y_3 = 50 + 0{,}5 \cdot 50 = 75,$$

где $\Delta Y = \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Прирост валовых объемов выпуска, соответствующий новому вектору конечного потребления, найдем по формуле

$$\Delta X = (E - A)^{-1} \Delta Y = B \Delta Y = \begin{pmatrix} 36{,}23 \\ -33{,}137 \\ 33{,}57 \end{pmatrix}.$$

4) Косвенные затраты первого порядка равны $A^1 = A \cdot A$, второго – $A^2 = A \cdot A^1$, третьего – $A^3 = A \cdot A^2$. Найдем сумму затрат $\widetilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \left(\widetilde{b}_{ij}\right)_{n \times n}$ и сравним с полными затратами:

$$A^1 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0{,}175 & 0{,}056 & 0{,}178 \\ 0{,}033 & 0{,}048 & 0{,}038 \\ 0{,}04 & 0{,}053 & 0{,}108 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A^1 = \begin{pmatrix} 0{,}082 & 0{,}038 & 0{,}01 \\ 0{,}017 & 0{,}015 & 0{,}022 \\ 0{,}024 & 0{,}023 & 0{,}045 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}022 & 0{,}052 \\ 0{,}009 & 0{,}006 & 0{,}012 \\ 0{,}013 & 0{,}01 & 0{,}021 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица полных материальных затрат по формуле (24) равна $\widetilde{B} = E + A + A^1 + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1{,}7 & 0{,}16 & 0{,}58 \\ 0{,}11 & 1{,}27 & 0{,}12 \\ 0{,}13 & 0{,}19 & 1{,}47 \end{pmatrix}$.

Относительные погрешности составят (в %)

$$\frac{b_{ij} - \widetilde{b}_{ij}}{b_{ij}} \times 100\% = \begin{pmatrix} 2{,}24 & 12{,}53 & 8{,}47 \\ 7{,}46 & 0{,}44 & 9{,}06 \\ 9{,}72 & 4{,}76 & 1{,}32 \end{pmatrix}.$$

ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Задача. Для перестройки производства в порядке перевода его на более интенсивную технологию необходимо осуществить комплекс подготовительных мероприятий (работ). С этой целью создана группа из R специалистов и составлен сетевой график выполнения работ (рис. 21) ([4], [9], [11]).

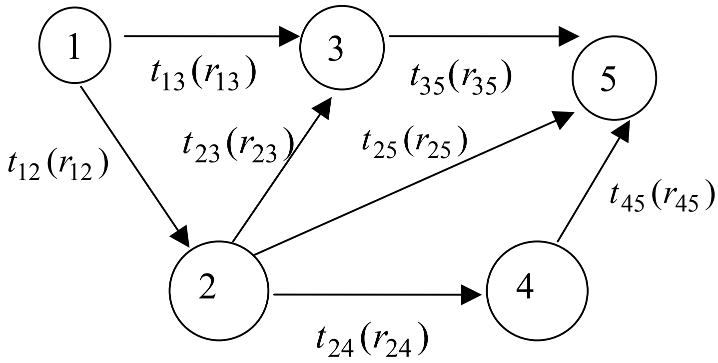


Рис. 21

Известны продолжительность t_{ij} выполнения каждой работы $(i;\, j)$ комплекса (могут быть известны и количества ресурсов, затрачиваемых при выполнении соответствующих работ r_{ij}).

1. Найти ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени. Определить длину критического пути.
2. Найти ранние и поздние сроки начала и окончания работ.
3. Найти резервы времени работ (четыре типа) и построить линейный график.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 14.

Таблица 14

Параметры задачи	t_{12}	t_{13}	t_{23}	t_{24}	t_{25}	t_{35}	t_{45}
	3	5	2	6	5	6	3

Решение задачи начнем с перечисления имеющихся работ и событий, а также с определения раннего срока свершения события $t_р(i)$ и позднего срока свершения события $t_п(i)$.

Ранним сроком $t_р(i)$ **свершения события** i называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы. Так как может быть несколько путей, предшествующих данному событию, то ранний срок свершения события определяется продолжительностью максимального предшествующего пути $t_{\text{р}}(i) = t[L_1(i)]$, где $L_1(i)$ – **максимальный предшествующий путь**. Ранний срок свершения события (5) совпадает с критическим временем: $t_{\text{р}}(5) = t_{\text{кр}}$.

Поздним сроком $t_{\text{п}}(i)$ **свершения события** i является самый поздний момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием, без превышения критического времени $t_{\text{кр}}$. Очевидно, что $t_{\text{п}}(i)$ определяется разностью между $t_{\text{кр}}$ и длиной максимального из последующих путей $L_2(i)$: $t_{\text{п}}(i) = t_{\text{кр}} - t[L_2(i)]$. Для событий критического пути ранний и поздний сроки свершения совпадают.

Зная сроки свершения событий, можно определить **временные параметры работ**.

Ранний срок начала работы (i, j) равен раннему сроку свершения события i: $t_{\text{рн}}(i, j) = t_{\text{р}}(i)$.

Ранний срок окончания работы (i, j) равен сумме раннего срока свершения начального события работы и ее продолжительности: $t_{\text{ро}}(i, j) = t_{\text{р}}(i) + t_{ij}$.

Поздний срок окончания работы (i, j) совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события: $t_{\text{по}}(i, j) = t_{\text{п}}(j)$.

Поздний срок начала работы (i, j) равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью: $t_{\text{пн}}(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{ij}$.

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t_{\text{рн}}(i, j)$ и $t_{\text{по}}(i, j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени.

Полный резерв времени работы

$$R_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Независимый (свободный) резерв времени работы

$$R_{\text{н}}(i, j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}.$$

Величина необходимого резерва показывает продолжительность вынужденного ожидания наступления конечного события данной работы.

Частный резерв времени работы первого вида $R'(i, j)$

$$R'(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}.$$

Частный резерв времени работы второго вида $R''(i, j)$

$$R''(i, j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Для нашей задачи сначала перечислим все имеющиеся работы и их продолжительность, затем с использованием соответствующих формул рассчитаем ранний и поздний сроки свершения всех событий (см. рис. 22, ячейки C1:F6). Для определения раннего срока события сначала необходимо определить длину всех имеющихся путей сетевого графика. Рассмотрим пути из события 1 в 3; из 1 в 5; из 2 в 5 (так как для этих событий пути не единственные). Пути и их длина представлены на рис. 21 в строках 9–13. Далее по формуле $t_{\text{р}}(i) = t[L_1(i)]$, например для события 3, получаем $t_{\text{р}}(3) = t[L_1(3)]$. Используя функцию Excel: МАКС(B10:B11) = 5. Определив ранний срок свершения последнего, 5-го события, определим критическое время: $t_{\text{р}}(5) = 12$. Определим поздние сроки свершения событий по формуле $t_{\text{п}}(i) = t_{\text{кр}} - t[L_2(i)]$. Для события 3 имеем $t_{\text{п}}(3) = t_{\text{кр}} - t[L_2(3)] = t_{\text{кр}} - t_{35} = 12 - 6 = 6$, а для события 2: $t_{\text{п}}(2) = t_{\text{кр}} - t[L_2(2)] = t_{\text{кр}} - \max\{t_{23} + t_{35}; t_{25}; t_{24} + t_{45}\} = 12 - \max\{8; 5; 9\} = 3.$

D6 = =МАКС(F10:F14)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Работы:	продол. Ра	События	t(р)	t(п)	Rп(i)	t(РН)=t(р)	t(РО)	t(по)	t(пн)	R(п)(i;j)	R(н)	R'
2	(1;2)	3	**1**	0	0	0	0	3	3	0	**0**	0	0
3	(1;3)	5	**2**	3	3	0	0	5	6	1	**1**	0	1
4	(2;3)	2	**3**	5	6	1	3	5	6	4	**1**	0	1
5	(2;4)	6	**4**	9	9	0	3	9	9	3	**0**	0	0
6	(2;5)	5	**5**	**12**	**12**	0	3	8	12	7	**4**	4	4
7	(3;5)	6					5	11	12	6	**1**	0	0
8	(4;5)	3					9	12	12	9	**0**	0	0
9	Путь из 1 в 3:			Путь из 1 в 5:			Путь из 2 в 5:						
10	13	5		135		11	235	8					
11	123	5		1235		11	25	5					
12				125		8	245	9					
13				1245		12							
14													

Рис. 22

Разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет **резерв времени события**: $R(i) = t_{\text{п}}(i) - t_{\text{р}}(i)$. Резервы критических событий равны 0. На рис. 22 резервы событий представлены в ячейках F2:F6. Таким образом, события 1, 2, 4, 5 принадлежат критическому пути.

Определим временные параметры работ: ранний срок начала работы (i, j), поздний срок окончания работы (i, j), поздний срок начала работы (i, j). Например, для работы (2;3): $t_{рн}(2;3) = t_{р}(2) = 3$, $t_{ро}(2;3) = t_{р}(2) + t_{23} = 3 + 2 = 5$, $t_{пн}(2;3) = t_{п}(3) - t_{23} = 6 - 2 = 4$. Аналогичным образом рассчитываются временные параметры остальных работ (см. рис. 22, ячейки O2:J8).

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t_{рн}(i; j)$ и $t_{по}(i, j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени: полный резерв времени работы, независимый (свободный) резерв времени работы, частный резерв времени работы первого вида (гарантийный), частный резерв времени работы второго вида.

Вычисляем резервы времени работ задачи (на рис. 22 они находятся в столбцах K, L, M).

На основе сетевого графика составим линейный график (график Ганта), на котором изображается время начала и окончания каждой работы, а также полный резерв времени для каждой работы. По графику также определим работы, принадлежащие критическому пути. Для построения линейного графика нам понадобятся следующие данные: ранний срок начала работы, ранний срок окончания работы и полный резерв времени работы. Скопируем эти данные в ячейки A16:C23 (см. рис. 23). В столбце D укажем, принадлежит ли данное событие критическому пути (используем тот факт, что если полный резерв времени равен нулю, то событие принадлежит критическому пути). Функция ЕСЛИ возвращает одно значение, если указанное условие истинно, и другие, если оно ложно. Пример использования данной функции см. на рис. 23, ячейка D17.

Построение диаграммы «Линейный график»

1. Щелкнуть курсором на кнопке Мастер диаграмм. На экране: окно **Мастер диаграмм** – шаг 1 (вид диаграммы).

Выбрать: **Линейчатая; Вид: Вид 2**. **Далее.**

2. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 2 (источник данных диаграммы) и вид выбранной диаграммы. **Диапазон:** вводим наши данные (три столбца A17:C23), **Ряд – подписи по оси X:** вводим столбец «Работы»: (1;2) – (4;5) (ячейки A2:A8, рис. 22). **Далее.**

3. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 3 (параметры диаграммы). На этом шаге можно ввести легенду, а также название диаграммы и осей. Вводимый текст виден на экране. **Далее.**

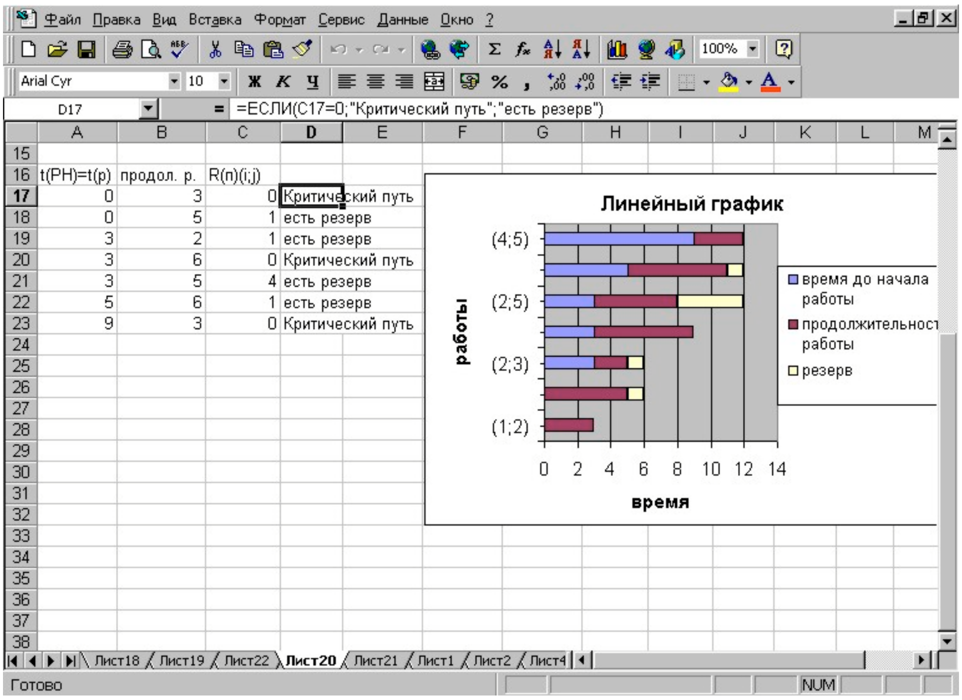


Рис. 23

4. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 4 (размещение диаграммы). Выбрать: **поместить диаграмму на имеющемся листе**. **Готово**.

5. На экране диаграмма (рис. 23).

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Данная задача посвящена анализу очередей методами тории массового обслуживания ([2], [9], [11]).

Задача. В магазин оптовой торговли поступают заявки покупателей. С целью установления необходимого числа обслуживающих устройств (продавцов) было проведено обследование входящего потока заявок и времени их обслуживания. В табл. 15 представлены сведения о входящем потоке требований и времени их обслуживания (I – входящее число требований k_i, в течение часа встречающееся в выборочном обследовании; II – частота появлений соответствующего числа требований n_i; III – интервалы ряда распределения времени обслуживания t_i, мин; IV – частота появления события, когда время обслуживания заявки попадает в соответствующий интервал m_i).

1. Определить основные показатели работы системы с n обслуживающими устройствами для систем с очередью.

Таблица 15

Показатели ряда	Ряды распределения входящего потока заявок и времени обслуживания									
$\mathrm{I}(k_i)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathrm{II}(n_i)$	4	14	12	9	8	4	3	2	2	2
$\mathrm{III}(t_i)$	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50					
$\mathrm{IV}(m_i)$	120	25	25	15	15					
$T = 2$	$n = 2$									

Предположим, что входящий поток требований является пуассоновским и проверим эту гипотезу с помощью критерия Пирсона. Говорят, что случайная величина распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет определенное значение m, выражается формулой: $P_m = \frac{a^m}{m!}e^{-a}$. Дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна ее математическому ожиданию. Это свойство распределения Пуассона часто применяется на практике для решения вопроса, правдоподобна ли гипотеза о том, что случайная величина распределена по закону Пуассона. Для этого определяют из опыта статистические характеристики случайной вели чины: математическое ожидание и дисперсию. Если их значения близки, то это может служить доводом в пользу гипотезы о пуассоновском распределении, резкое различие этих характеристик свидетельствует против гипотезы.

Так как в рассматриваемой задаче данные сгруппированы по числу заявок, поступающих в течение часа на обработку, то сведём все вычисления по выравниванию ряда с помощью теоретического распределения в таблицу (см. рис. 24, строки 1–12),
где K_i – число требований в течение часа;

n_i – частота их;

$\overline{K} = \dfrac{\sum K_i n_i}{n}$ – среднее значение.

Интенсивность входящего потока $\lambda = \overline{K} = \dfrac{\sum K_i n_i}{n}$; дисперсия $\sigma^2 = \dfrac{\sum \left(K_i - \overline{K}\right)^2 n_i}{n}$.

K15 = =ХИ2ОБР(0,05;8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	i	ki	ni	ki ni	(ki-K)^2ni	ni'		(ni-ni')^2/ni			
2	1	2	4	8	36	5,05346	5	0,25			
3	2	3	14	42	56	8,422434	8	2,57			
4	3	4	12	48	12	10,52804	11	0,08			
5	4	5	9	45	0	10,52804	11	0,44			
6	5	6	8	48	8	8,773368	9	0,13			
7	6	7	4	28	16	6,266692	6	1,00			
8	7	8	3	24	27	3,916682	4	0,33			
9	8	9	2	18	32	2,175935	2	0,00			
10	9	10	2	20	50	1,087967	1	0,50			
11	10	11	2	22	72	0,494531	0	2,00			
12	Сумма	65	60	303	309	57,24715	57	7,30754			
13	Среднее	6,5		K=	5,05	5,15	= сигма				
14											
15				лямбда=	5		exp(-5)=	0,006738	7,307539683	<	**15,50731**
16									гипотеза принимается		
17									поток требований будем		считать пуас
18	i	интервал нач.-конец		частота	середина	timi		(ti-t)^2mi	mi'		(mi-mi')^2/mi'
19	1	0	10	120	5	600		9720	99,95321963	100	4
20	2	10	20	25	15	375	14	25	48,93126501	49	11,7551
21	3	20	30	25	25	625		3025	23,95389268	24	0,041667
22	4	30	40	15	35	525		6615	11,72642837	12	0,75
23	5	40	50	15	45	675		14415	5,740575207	6	13,5
24				200	125	2800	14	33800		191	**30,04677**

Лист1 / Лист2 / Лист4 / Лист5 / Лист6 / Лист7 / Лист8 / Лист9 / Лис

Готово NUM

Рис. 24

Если $\lambda \approx \sigma^2$, то можно сделать предположение, что входящий поток требований пуассоновский. В рассматриваемой задаче $\lambda = \overline{K} = \dfrac{\sum K_i n_i}{n} = \dfrac{303}{60} \approx 5$, $\sigma^2 = \dfrac{309}{60} \approx 5$ (см. рис. 24, ячейки E13 и F13).

Теоретические частоты найдем по формуле $n'_i(K) = n\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ и округлим до целых. Для нашей задачи $n = 60$, $\lambda = 5$, $k = 2, 3, \ldots, n$. Результат представлен на рис. 24 в ячейках G2:G11.

Проверим справедливость гипотезы о пуассоновском распределении с помощью критерия Пирсона: нужно вычислить величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}. \tag{25}$$

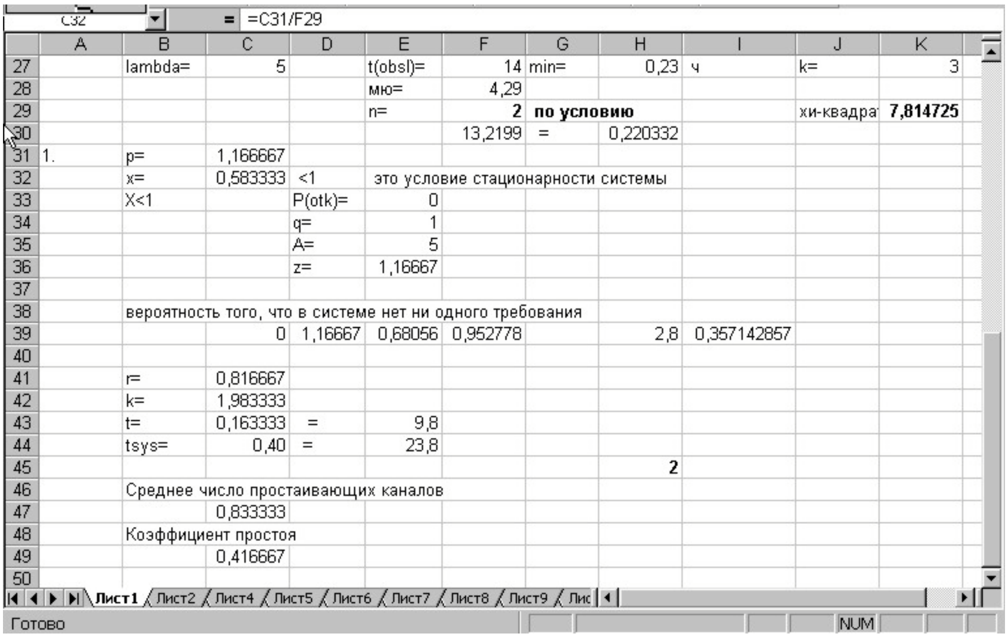
Согласно теореме Пирсона, статистика (25) имеет χ^2-распределение с $\gamma = N - r - 1$ степенями свободы, где $N = 10$ – количество интервалов выборки. По формуле (25) вычисляют χ^2, выбрав уровень значимости α критерия, по таблице χ^2-распределения находят критическую точку $\chi^2_{\alpha,\gamma}$. В Excel для этой цели можно использовать функцию ХИ2ОБР (см. рис. 24, ячейка K15). Если $\chi^2_{\text{набл}} \le \chi^2_{\alpha,\gamma}$, то рассматриваемая гипотеза не противоречит опытным данным, если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\alpha,\gamma}$, то гипотеза отвергается. Число степеней свободы в рассматриваемой задаче $\gamma = N - 2 = 10 - 2 = 8$. Для коэффициента значимости $\alpha = 0{,}05$ критическое значение $\chi^2(0{,}05; 8) = 15{,}51$. Для вычисления статистики (25) поступим следующим образом. Для каждого значения i $(i = \overline{1{,}10})$ вычислим величину $\dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ и просуммируем их (см. рис. 24, ячейки H1:H12): $\chi^2_{\text{набл}} = 7{,}308$. Так как $\chi^2_{\text{набл}} \le \chi^2_{\alpha,\gamma}$, то гипотеза о распределении входящих требований по закону Пуассона принимается. Итак, поток требований подчиняется пуассоновскому закону распределения с интенсивностью потока $\lambda = 5$ шт./ч.

Перейдем к обработке статистических данных о времени обслуживания. Все вычисления по проверке гипотезы о распределении времени обслуживания сведем также в таблицу (см. рис. 24, строки 18:24). Среднее время обслуживания $\bar{t}_{\text{обсл}}$: $\bar{t}_{\text{обсл}} = \dfrac{\sum t_i m_i}{m_i}$,

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (t_i - \bar{t})^2 m_i}{\sum m_i}}$, где t_i – середина интервала. Для нашей задачи

$$\bar{t}_{\text{обсл}} = \frac{2800}{200} = 14 \text{ мин}, \ \sigma = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2 m_i}{\sum m_i}} = \sqrt{\frac{33\,800}{200}} = 13.$$

Так как $\bar{t}_{\text{обсл}} \approx \sigma$, то выдвинем гипотезу об экспоненциальном распределении времени обслуживания. Проверим эту гипотезу с помощью критерия χ^2. Для нахождения теоретических частот по экспоненциальному закону воспользуемся формулой $m_i' = mh\mu e^{-\mu t}$, где $m = 200$ – объем выборки; $h = 10$ – длина интервала (шаг); $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{\text{обсл}}} = \dfrac{1}{14}$ (шт./мин).


C32 = =C31/F29

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
27		lambda=	5		t(obsl)=	14	min=	0,23	ч	k=	3
28					мю=	4,29					
29					n=	**2**	**по условию**			хи-квадра	**7,814725**
30						13,2199	=	0,220332			
31	1.	p=	1,166667								
32		x=	0,583333	<1	это условие стационарности системы						
33		X<1		P(otk)=	0						
34				q=	1						
35				A=	5						
36				z=	1,16667						
37											
38		вероятность того, что в системе нет ни одного требования									
39			0	1,16667	0,68056	0,952778		2,8	0,357142857		
40											
41		r=	0,816667								
42		k=	1,983333								
43		t=	0,163333	=	9,8						
44		tsys=	0,40	=	23,8						
45								**2**			
46		Среднее число простаивающих каналов									
47			0,833333								
48		Коэффициент простоя									
49			0,416667								
50											

Лист1 Лист2 Лист4 Лист5 Лист6 Лист7 Лист8 Лист9 Лис

Готово NUM

Рис. 25

Число степеней свободы для экспоненциального распределения $k = N - 2 = 5 - 2 = 3$. Примем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. По таблице χ^2 находим критическое значение $\chi^2(0{,}05; 3) = 7{,}82$. Наблюдаемое значение $\chi^2_{\text{набл}}$ найдено и равно 30,047 (см. рис. 24, ячейка К24).

Так как $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{0{,}05;3}$, то гипотезу об экспоненциальном рас пределении времени обслуживания следует отвергнуть. Как же быть с решением задачи? В таком случае заменим эмпирическое распределение теоретическим:

$$\bar{t}_{\text{обсл}} = \frac{\sum t_i m'_i}{m'_i} = \frac{2525}{191} = 13{,}21\,(\text{мин}) = 0{,}22\,(\text{ч}),\ \mu = \frac{1}{0{,}22} = 4{,}54\ (\text{шт./ч}).$$

Итак, получим $\lambda = 5$, $\mu = 4{,}54$, $n = 2$ (по условию).

1. Определим основные показатели работы системы ($\lambda = 5$, $\mu = 4{,}54$, $n = 2$) без ограничений на длину очереди.

Интенсивность нагрузки $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 1{,}16$.

Уровень загрузки системы $x = \dfrac{\rho}{n} = \dfrac{1{,}16}{2} = 0{,}58$.

Условие $x < 1$ является условием стационарности системы. В случае $x \geq 1$ система не справляется с обслуживанием, ее очередь неограниченно возрастает. В этом случае нужно увеличить количество обслуживающих устройств.

Так как $x = 0{,}55 < 1$, то вероятность получить отказ равна нулю:

$P_{\text{отк}} = 0$.

Относительная пропускная способность системы – это вероятность получить обслуживание:

$q = P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1$.

Абсолютная пропускная способность системы

$A = q\lambda = \lambda = 5$.

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = 1{,}16.$$

Вычисление всех выше перечисленных величин ρ, x, q, A, $\bar{z}$ представлено на рис. 25.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая шк., 1986.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учебник для вузов. – 5-е изд. стер. – М.: Высшая шк., 1998. – 576 с.
3. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: ДИС, 2001.
4. Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Л. С. Руководство к решению задач по математическому программированию: Учеб. пособие. – Мн.: Выш. шк., 2001.
5. Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И. Высшая математика. Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1994.
6. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. – СПб.: BHV – Санкт-Петербург, 1997.
7. Сакович В. А. Исследование операций: Справочное пособие. – Мн.: Выш. шк., 1985.
8. Федосеев В. Ф. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. – М.: Финстатинформ, 1996.
9. Шапкин А. С., Мазаева Н. П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник. – М.: Изд. торг. корп. «Дашков и К°», 2003. – 400 с.
10. Экономико-математические методы и модели / Под ред. А. В. Кузнецова. – Мн.: БГЭУ, 2000.
11. Янович В. И., Балашевич Н. В. Экономико-математические методы и модели. – Мн.: БГТУ, 2002.
12. Янович В. И., Шинкевич Е. А. Экономико-математические методы и модели. – Мн.: БГТУ, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ