УДК 519.17:512

В. В. Смелов, канд. техн. наук

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

The article is dedicated to study algebraic characteristic binary tree within the framework of designed by author to axiomatic theory. In work are worded and proved two theorems about structured characteristic binary tree, as well as is described algorithm, allowing generate the ensemble binary tree, given characteristic.

Введение. Множеством бинарных деревьев в [5] называется множество $T=\{t_1,t_2,t_3, ...\}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. Множество T включает элементы: $\mathbf{o}$ – нулевое дерево, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – единичное дерево, $\boldsymbol{\alpha}$ – левое элементарное дерево, $\boldsymbol{\beta}$ – правое элементарное дерево.

2. На множестве T задано правило умножения: $\forall t\in T \Rightarrow \{t\alpha,\ t\beta\}\subset T$. При этом предполагаются справедливыми следующие утверждения:

$$\mathrm{o}\alpha=\mathrm{o}\beta=\mathrm{o},\ \ \varepsilon\alpha=\alpha,\ \ \varepsilon\beta=\beta,$$

$$\forall t\in T\,|\,t\alpha=t\beta\Rightarrow t=\mathrm{o},$$

$$\forall\chi\in\{\alpha,\ \beta\},\{t_1\chi,\ t_2\chi\}\subset T\,|\,t_1\chi=t_2\chi_2\Rightarrow t_1=t.$$

3. На множестве T задано правило сложения: $\forall\{t_1,\ t_2\}\subset T\Rightarrow t_1\alpha+t_2\beta=t_2\beta+t_1\alpha\in T$. При этом предполагается справедливым утверждение: $\forall t\in T,\chi\in\{\mathrm{o},\ \varepsilon\}\Rightarrow t+\chi=t$. Кроме того, операция сложения задает биективное отображение

$$T\times T\leftrightarrow\widetilde{T}:$$

$$\forall t'\in\widetilde{T}\Rightarrow\exists\{t_1,\ t_2\}\in T\,|\,t'=t_1\alpha+t_2\beta\,)$$

и

$$\forall\{t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4\}\subset T\,|\,t_1\alpha+t_2\beta=t_3\alpha+t_4\beta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1=t_3,\ t_2=t_4\ \text{(инъекция)},$$

где $\widetilde{T}=T\setminus\{\varepsilon\}$.

Введенные в [5] операции пересечения и объединения бинарных деревьев обладают следующими свойствами:

1) $\forall\{t_1,\ t_2\}\subset T\Rightarrow t_1\cap t_2=t_2\cap t_1\in T;$

2) $\forall t\in T\Rightarrow t\cap\mathrm{o}=\mathrm{o};$

3) $\forall t\in T^+\Rightarrow t\cap\varepsilon=\varepsilon,\ T^+=T\setminus\{\mathrm{o}\};$

4) $\forall\{t_1,\ t_2\}\subset T^+\Rightarrow t_1\alpha\cap t_2\beta=\varepsilon;$

5) $\forall\{t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4\}\subset T\Rightarrow$
$\Rightarrow(t_1\alpha+t_2\beta)\cap(t_3\alpha+t_4\beta)=$
$=(t_1\cap t_3)\alpha+(t_2\cap t_4)\beta;$

6) $\forall\{t_1,\ t_2\}\subset T\Rightarrow t_1\cup t_2=t_2\cup t_1\in T;$

7) $\forall t\in T\Rightarrow t\cup\mathrm{o}=t;$

8) $\forall t\in T^+\Rightarrow t\cup\varepsilon=t;$

9) $\forall\{t_1,\ t_2\}\subset T^+\Rightarrow t_1\alpha\cup t_2\beta=t_1\alpha+t_2\beta;$

10) $\forall\{t_1,\ t_2\}\subset T,\chi\in\{\alpha,\ \beta\}\Rightarrow$
$\Rightarrow t_1\chi\cup t_2\chi=(t_1\cup t_2)\chi.$

Не сложно проверить справедливость следующих утверждений:

11) $\forall t\in T\Rightarrow t\cap t=t;$

12) $\forall\{t_1,\ t_2,\ t_3\}\subset T\Rightarrow$
$\Rightarrow(t_1\cap t_2)\cap t_3=t_1\cap(t_2\cap t_3);$

13) $\forall t\in T\Rightarrow t\cup t=t;$

14) $\forall\{t_1,t_2,t_3\}\subset T\Rightarrow$
$\Rightarrow(t_1\cap t_2)\cap t_3=t_1\cap(t_2\cap t_3);$

15) $\forall\{t_1,\ t_2,\ t_3\}\subset T\Rightarrow t_1\cap(t_1\cup t_2)=t_1;$
$\forall\{t_1,\ t_2,\ t_3\}\subset T\Rightarrow t_1\cup(t_1\cap t_2)=t_1.$

Обобщение операции умножения. Операция объединения (свойства 6–10) позволяет обобщить операцию умножения для любых двух бинарных деревьев, если считать, что

$$\forall t\in T\Rightarrow t\mathrm{o}=\mathrm{o}t=\mathrm{o}\,,$$

$$\forall t\in T^+\Rightarrow t\varepsilon=\varepsilon t=t\quad\text{и}$$

$$\forall\{t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4\}\subset T\Rightarrow(t_1\alpha+t_2\beta)(t_3\alpha+t_4\beta)=$$

$$=(t_1\alpha+t_2\beta)t_3\alpha+(t_1\alpha+t_2\beta)t_4\beta\,.$$

Кроме того, можно использовать следующие правила для сокращения записи: $\forall t\in T\Rightarrow t^0=\varepsilon\wedge t^1=t$, $\forall t\in T\Rightarrow t^n=t^{n-1}t$. Например, сокращенная запись любого полного бинарного дерева [2] высотой h имеет вид $(\alpha+\beta)^h$.

Обобщенная операция умножения остается ассоциативной, что позволяет теперь рассматривать множество T относительно этой операции как полугруппу [6].

Обратим внимание на то, что операции пересечения и объединения обладают свойствами идемпотентности (11, 13), коммутативности (1, 6), ассоциативности (12, 14), а также для этих операций выполняется закон поглощения (15). Эти свойства позволяют утверждать, что множество T является структурой [6]. Известно [6, 7], что всякая структура T является частично упорядоченным множеством с порядком $\le$, заданным следующим правилом:

$$\forall\{t_1,\ t_2\}\subset T\,|\,t_1\le t_2\Leftrightarrow t_1\cup t_2=t_2\,.$$

Кроме того, каждая пара элементов структуры имеет точную верхнюю и нижнюю грани:

$$\forall\{t_1,\ t_2\}\subset T\Rightarrow\sup(t_1,\ t_2)=t_1\cup t_2,$$

$$\forall\{t_1,\ t_2\}\subset T\Rightarrow\inf(t_1,\ t_2)=t_1\cap t_2\,.$$

Следовательно, любое непустое подмножество $T'\subset T$ тоже имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Очевидными являются следующие свойства структуры T:

$$\forall t \in T^{+} \Rightarrow o \leq \varepsilon \leq t,$$

$$\forall t \in T^{+},\ \chi \in \{\alpha,\ \beta\} \Rightarrow o \leq t \leq \chi t,$$

$$\forall k \leq n \Rightarrow \inf\left(\bigcup_{i=k}^{n} T_n\right) = \varepsilon,$$

$$\forall k \leq n \Rightarrow \sup\left(\bigcup_{i=k}^{n} T_n\right) = (\alpha+\beta)^{n-1}.$$

Рассмотрим, например, множество бинарных деревьев с тремя вершинами $T_3 = \{\alpha^2,\ \beta\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha\beta,\ \beta^2\}$. Ни одна пара элементов этого множества не является сравнимой. В то же время множество T_3 обладает точными верхней и нижней гранями: $\sup(T) = (\alpha+\beta)^2$, $\inf(T_3) = \varepsilon$, а все его элементы одновременно являются максимальными и минимальными [6].

Множеством бинарных цепей в [4] называется подмножество бинарных деревьев $C \subset T$, элементы которого обладают следующими свойствами:

1) $\{o,\ \varepsilon,\ \alpha,\ \beta\} \subset C$;

2) $\forall t \in T,\ \chi \in \{\alpha,\ \beta\} \mid t\alpha \in C \Rightarrow t \in C$.

Любое бинарное дерево t, имеющее $n \geq 1$ вершин ($t \in T_n$), может быть представлено в виде $t = \bigcup_{i=1}^{n} v_i$, $v_i \in C^{+}$, где $C^{+} = C \setminus \{o\}$. При этом, если все бинарные цепи v_i, $i = \overline{1,n}$ различны, то разложение $t = \bigcup_{i=1}^{n} v_i$ единственно, и существует взаимно однозначное соответствие между всеми вершинами бинарного дерева t и бинарными цепями v_i (называемыми координатами вершин) [4].

Последние утверждения можно теперь сформулировать иначе: любое бинарное дерево t является точной верхней гранью множества координат его вершин: $t = \sup\{v_1,\ v_2, \ldots, v_n\}$. Нижняя грань множества координат совпадает с единственным минимальным элементом – координатой корня:

$$\inf\{v_1, v_2,\ \ldots, v_n\} = \min\{v_1, v_2,\ \ldots, v_n\} = \varepsilon.$$

В общем случае множество координат обладает несколькими максимальными элементами.

Максимальные координаты бинарного дерева. В [4] вводится понятие ребра и символом $|t|$ обозначается количество ребер бинарного дерева t, равное сумме степеней α и β в выражении t. Обозначим символом $\|t\|$ количество вхождений символа $+$ в полном выражении дерева t.

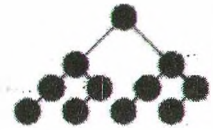

Рисунок. Бинарное дерево $(\alpha^2+\alpha\beta)(\alpha+\beta)$

Например, изображенное на рисунке бинарное дерево

$$t = (\alpha^2 + \alpha\beta)(\alpha+\beta)$$

имеет

$$|t| = |(\alpha^2+\alpha\beta)(\alpha+\beta)| =$$

$$= |(\alpha^2+\alpha\beta)\alpha + (\alpha^2+\alpha\beta)\beta| = 10 \text{ ребер},$$

$$|t| + 1 = 11 \text{ вершин}$$

и $\|t\| = \|(\alpha^2+\alpha\beta)\alpha + (\alpha^2+\alpha\beta)\beta\| = 3$ вхождения символа $+$.

Множество вершин

$$V = \{\alpha^3,\ \alpha^2,\ \alpha,\ \alpha\beta\alpha,\ \beta\alpha,\ \varepsilon,\ \alpha^2\beta,\ \alpha\beta,\ \beta,\ \alpha\beta^2,\ \beta^2\},$$

минимальный элемент $\min(V) = \varepsilon$ совпадает с точной нижней гранью $\inf(V) = \varepsilon$, множеством максимальных элементов

$$\max(V) = \{\alpha^3,\ \alpha\beta\alpha,\ \alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2\}.$$

Заметим, что это дерево t имеет $\|t\| + 1 = 4$ листьев (и столько же ветвей).

Теорема 1. Количество максимальных элементов множества координат V дерева $t \neq o$ равно $\|t\| + 1$.

Доказательство. Будем далее обозначать T_n – множество бинарных деревьев, имеющих n вершин. При этом очевидны следующие утверждения:

$$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_i,$$

$$\forall\{i,\ j\} \subset \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \mid i \neq j \Rightarrow T_i \cap T_j = \varnothing;$$

$$T_0 = \{o\},\quad T_1 = \{\varepsilon\},\quad T_2 = \{\alpha,\ \beta\},$$

$$T_3 = \{\alpha^2,\ \beta\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha\beta,\ \beta^2\}.$$

Легко убедиться в справедливости теоремы для деревьев $t \in T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для всех деревьев с числом вершин меньшим $n \geq 2$. Докажем, что из справедливости этого утверждения следует справедливость теоремы для бинарных деревьев $t \subset T_n$. В соответствии с аксиомой 3 любое бинарное дерево $t \in T_n$, $n > 1$ может быть представлено в виде: $t = t_1\alpha + t_2\beta$. Так как число вершин дерева равно $|t| + 1 = n$ [4] и $|t| = |t_1| + |t_2| + x$, где $x = 1$, если одно из поддеревьев t_1 или t_2 является нулевым деревом, и $x = 2$ в другом случае, то число вершин в каждом из поддеревьев меньше n. Но тогда на деревья t_1 и t_2 распространяется индуктивное предположение.

Пусть $\|t_1\| = k_1 > 0$, $\|t_2\| = k_2 > 0$ и, следовательно, количество максимальных элементов в множествах координат вершин деревьев $t_1\alpha$ и $t_2\beta$ будет соответственно $k_1 + 1$ и $k_2 + 1$. Координаты любых вершин дерева $t_1\alpha$, не являющихся корневой вершиной, имеют вид $c\alpha$, где $c \in C^+$, так как должны быть сравнимы с $t_1\alpha$. Аналогично координаты вершин дерева $t_2\beta$ имеют вид $c\beta$. Но тогда координаты вершин дерева $t_1\alpha$ не сравнимы с координатами вершин дерева $t_2\beta$ и, следовательно, количество максимальных элементов в множестве координат дерева $t = t_1\alpha + t_2\beta$ будет $k_1 + k_2 + 2$. С другой стороны, $\|t\| = \|t_1\alpha\| + \|t_2\beta\| + 1 = k_1 + k_2 + 1$, т. е. число максимальных элементов в множестве вершин дерева t будет $\|t\| + 1$. Аналогичный результат получается и в случае $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Множество V^* максимальных координат дерева $t \in T$ является единственным множеством цепей, имеющим минимальное число элементов и точную верхнюю грань, равную t.

Доказательство. По своему построению множество V^* является подмножеством множества V координат вершин дерева t. В [4] доказывается, что это множество V является максимальным в том смысле, что любая ненулевая бинарная цепь $c \in C$, такая что $c \cap t = c$, принадлежит множеству V. Из максимальности множества V следует его единственность. Из единственности множества V следует единственность множества V^*. Ясно, что никакое подмножество множества $V \setminus V^*$ и никакое собственное подмножество $V' \subset V$ не имеет своей точной верхней гранью дерево t. Следовательно, нет такого множества цепей $C' \subset C$ с количеством элементов, меньшим чем $|V^*|$, что $\mathbf{sup}(C') = t$. Теорема доказана.

Количество бинарных деревьев. В некоторых приложениях оказывается необходимым вычислить количество бинарных деревьев, имеющих определенные свойства, или перечислить их. Задача не является простой, если число вершин дерева больше пяти. Применение отношения $\leq$ представляется затруднительным, так как оно не обладает свойством линейности (не все элементы множества T сравнимы). Построить плотные строго возрастающие последовательности бинарных деревьев $\mathbf{0} \leq \varepsilon \leq \boldsymbol{t_2} \leq \boldsymbol{t_3} \leq \ldots$, конечно, можно, но число различных последовательностей увеличивается с каждым шагом их построения. Например, последовательность длиною 2 будет всего одна: $\mathbf{o} \leq \varepsilon$, последовательностей длиною 3 будет две: $\mathbf{o} \leq \varepsilon \leq \boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{o} \leq \varepsilon \leq \boldsymbol{\beta}$, последовательностей, состоящих из четырех элементов, – уже 5 и т. д. Кроме того, желательно иметь такое отношение линейного порядка на множестве T, которое позволило бы однозначно нумеровать вершины всех бинарных деревьев, причем в том же порядке, в котором состоят значения ключей в бинарных деревьях поиска [2].

Известно [1, 2], что количество бинарных деревьев, имеющих n вершин, равно $\frac{C_{2n}^n}{n+1}$, а числовую последовательность $\frac{C_2^1}{2}, \frac{C_4^2}{3}, \frac{C_6^3}{4}, \ldots$ называют последовательностью (или числами) Каталана. Другой известной интерпретацией чисел Каталана является количество правильных расстановок n пар скобок [2, 3].

Используя аксиоматическое определение множества T бинарных деревьев из [5] и терминологию, введенную в [4], попытаемся получить аналогичный результат.

Легко убедиться в справедливости формулы $|T_n| = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$ для небольших значений n:

$$|T_1| = \frac{C_2^1}{2} = 1,\ |T_2| = \frac{C_4^2}{3} = 2,$$

$$|T_3| = \frac{C_6^3}{4} = 5,\ |T_4| = \frac{C_8^4}{5} = 14.$$

Значительно сложней – для $n > 4$, так как $\frac{C_{10}^5}{6} = 42$, $\frac{C_{12}^6}{7} = 132$, $\frac{C_{14}^7}{8} = 439$, $\frac{C_{16}^8}{9} = 1430$ и т. д.

В соответствии с аксиомами 2 и 3 бинарное дерево t, отличное от единичного дерева, может быть представлено в виде $t = t_1\alpha + t_2\beta$. Пусть число вершин этого дерева $n = |t| + 1 > 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$0 \leq |t_1| < |t|,\ 0 \leq |t_2| < |t|,$$

$$|t_1| = \begin{cases} 0, |t_2| = |t| - 1 \\ |t| - 1,\ t_2 = \mathrm{o} \\ |t| - |t_2| - 2 \end{cases}$$

$$|t_2| = \begin{cases} 0,\ |t_1| = |t| - 1 \\ |t| - 1,\ t_1 = \mathrm{o} \\ |t| - |t_1| - 2 \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} t_2\beta,\ t_1 = \mathrm{o} \\ t_1\alpha,\ t_2 = \mathrm{o} \\ t_1\alpha + t_2\beta,\ t_1 \neq \mathrm{o},\ t_2 \neq \mathrm{o} \end{cases}$$

Если $t_1 = \mathrm{o}$, то с учетом

$$n = |t| + 1 = |t_1\alpha| + |t_2\alpha| + 1 = |t_2| + 2$$

бинарное дерево t_2 должно иметь $n - 1$ вершину. Следовательно, количество бинарных деревьев вида $t_2\beta$ равно $|T_{n-1}|$ – количеству различных $t_2 \in T_{n-1}$. Рассуждая аналогично, получим количество $|T_{n-1}|$ бинарных деревьев вида $t_1\boldsymbol{\alpha}$.

Если же $t_1 \neq t_2 \neq \text{o}$, то, учитывая соотношение $|t_1| = |t| - |t_2| - 2$, получим выражение $n_1 = n - 1 - n_2$, связывающее n_1 – число вершин бинарного дерева t_1, n_2 – число вершин бинарного дерева t_2 с общим числом вершин $n > 1$ дерева $t = t_1\alpha + t_2\beta$. Тогда число таких бинарных деревьев будет

$$|T_1||T_{n-2}| + |T_2||T_{n-3}| + \ldots + |T_{n-2}||T_1|.$$

Общее количество бинарных деревьев с числом вершин $n > 2$ равно

$$|T_n| = |T_{n-1}| + |T_1||T_{n-2}| + |T_2||T_{n-3}| +$$
$$+ \ldots + |T_{n-2}||T_1| + |T_{n-1}|.$$

Введя обозначения $b_i = |T_i|$ и договорившись, что $b_0 = 1$, получим более компактную запись:

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-i-1},\ n \geq 1. \qquad (1)$$

Рекуррентное соотношение, выражающее количество бинарных деревьев с числом вершин $n \geq 1$ через количества бинарных деревьев с меньшим числом вершин, совпадает с формулами, приведенными в [1–3]. Там же имеется вывод формулы n-го члена последовательности Каталана $\left\{\frac{C_{2n}^n}{n+1}\right\}$ с помощью метода производящих функций [3].

В силу того, что $T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$, $|T_n| = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$, ясно, что множество бинарных деревьев является счетным.

Алгоритм построения множества бинарных деревьев с заданным числом вершин. Рассмотрим алгоритм $BT(n)$, позволяющий получить множество бинарных деревьев с заданным числом вершин n. В алгоритме $BT(n)$ используются операторы B_0, B_1 и $(\cdot)(\cdot)$. Действие операторов B_0 и B_1 распространяется на любые непустые подмножества ненулевых бинарных деревьев $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ и различается в зависимости от способа записи операторов (слева или справа от подмножества):

$$B_0(\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}) = \{t_1\beta, t_2\beta, \ldots, t_k\beta\},$$
$$(\{t_1, t_2, \ldots, t_k\})B_0 = \{t_1\alpha, t_2\alpha, \ldots, t_k\alpha\},$$
$$B_1(\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}) = \{\alpha + t_1\beta, \alpha + t_2\beta, \ldots, \alpha + t_k\beta\},$$
$$(\{t_1, t_2, \ldots, t_k\})B_1 = \{t_1\alpha + \beta, t_2\alpha + \beta, \ldots, t_k\alpha + \beta\}.$$

Оператор $(\cdot)(\cdot)$ применим к паре бинарных деревьев и может быть выражен следующим образом: $(t_1)(t_2) = t_1\alpha + t_2\beta$, где $\{t_1, t_2\} \subset T$. Для обозначения подмножества $T_n \subset T$ бинарных деревьев с числом вершин $n \geq 1$ будем использовать символ (B_n), а выражение $(B_i)(B_j)$ обозначает $B_i \times B_j$ – операторное произведение соответствующих подмножеств. Кроме того, будем считать, что

$$(B_0)B_0 = (B_0B_0) = B_0(B_0) = \{\varepsilon\}.$$

Достаточно просто можно проверить справедливость утверждений

$$T_1 = (B_1) = (B_0B_0) = \{\varepsilon\},$$
$$T_2 = (B_2) = (B_1)B_0 \cup B_0(B_1) = \{\alpha, \beta\},$$
$$T_3 = (B_3) = (B_2)B_0 \cup (B_1)B_1 \cup B_0(B_2)) =$$
$$= ((B_1)B_0)B_0 \cup (B_0(B_1))B_0 \cup (B_1)B_1 \cup$$
$$\cup B_0((B_1)B_0) \cup B_0((B_0(B_1)) =$$
$$= \{\alpha\}B_0 \cup \{\beta\}B_0 \cup \{\varepsilon\}B_1 \cup B_0\{\alpha\} \cup B_1\{\beta\} =$$
$$= \{\alpha^2, \beta\alpha, \alpha + \beta, \alpha\beta, \beta^2\}.$$

Заметим, что $(B_1)B_1 = B_1(B_1) = \{\alpha + \beta\}$, но $(B_1)B_1 \neq (B_1)(B_1)$. Аналогично построим T_4 и T_5:

$$T_4 = (B_4) = (B_3)B_0 \cup (B_2)B_1 \cup B_1(B_2) \cup B_0(B_3),$$
$$T_5 = (B_4)B_0 \cup (B_3)B_1 \cup (B_2)(B_2) \cup$$
$$\cup B_1(B_3) \cup B_0(B_4).$$

Для определения T_4 можно использовать результаты вычисления T_2 и T_3:

$$T_4 = T_3B_0 \cup T_2B_1 \cup B_1T_2 \cup B_0T_3 =$$
$$= \{\alpha^3, \beta\alpha^2, (\alpha + \beta)\alpha, \alpha\beta\alpha, \beta^2\alpha\} \cup$$
$$\cup \{\alpha^2 + \beta, \beta\alpha + \beta\} \cup$$
$$\cup \{\alpha + \alpha\beta, \alpha + \beta^2\} \cup$$
$$\cup \{\alpha^2\beta, \beta\alpha\beta, (\alpha + \beta)\beta, \alpha\beta^2, \beta^3\}.$$

При нахождении T_5 тоже можно использовать результаты предыдущих вычислений. Однако для получения подмножества $(B_2)(B_2)$ необходимо выполнить следующие преобразования:

$$(B_2)(B_2) = ((B_1)B_0 \cup B_0(B_1))((B_1)B_0 \cup B_0(B_1)) =$$
$$= ((B_1)B_0)^2 \cup ((B_1)B_0)(B_0(B_1)) \cup$$
$$\cup (B_0(B_1))((B_1)B_0) \cup (B_0(B_1)^2).$$

По всей видимости, к каждому из подмножеств последнего объединения можно применить оператор $(\cdot)(\cdot)$:

$$((B_1)B_0)^2 = \alpha^2 + \alpha\beta,$$
$$((B_1)B_0)(B_0(B_1)) = \alpha^2 + \beta^2,$$
$$(B_0(B_1))((B_1)B_0) = \beta\alpha + \alpha\beta,$$
$$(B_0(B_1)^2) = \beta\alpha + \beta^2.$$

Теорема 3.

$$T_n = BT(n) = (B_n) =$$

$$= (B_{n-1})B_0 \cup (B_{n-2})B_1 \cup (B_{n-2})(B_2) \cup \ldots$$

$$\ldots \cup B_1(B_{n-2}) \cup B_0(B_{n-1}).$$

Доказательство. Доказательство осуществим методом математической индукции по числу вершин бинарного дерева. Для этого предположим, что теорема справедлива для всех T_k, где $1 \le k < n$. Исходя из этого предположения, докажем, что теорема верна для множества T_n. Рассмотрим множество T_n. В соответствии с формулой $|T_n| = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-i-1}$, где $b_i b_{n-i-1}$ – число бинарных деревьев, имеющих $0 \le i < n$ вершин в левом поддереве и $0 \le n-i-1 < n$ вершин – в правом поддереве.

Обозначим $T_{i,j}$ множество деревьев, имеющих i вершин в правом поддереве и j вершин в левом поддереве. Тогда

$$T_n = \bigcup_{i+j=n-1} T_{i,j}.$$

Поскольку $i, j < n$, то по индуктивному предположению

$$T_i = (B_i)\ \ T_j = (B_j),\ T_{n-1,0} = (B_{n-1})B_0,$$

$$T_{n-2,1} = (B_{n-2})B_1,\ T_{n-2,1} = (B_{n-3})(B_2),\ \ldots,$$

$$T_{n-2,1} = B_1(B_{n-2}),\ T_{0,n-1} = B_0(B_{n-1}).$$

Теорема доказана.

Заключение. Выполненные выше построения, а также сформулированные и доказанные теоремы являются развитием идей, опубликованных автором ранее [5, 6]. Там же был намечен план построения аксиоматической теории бинарных деревьев. Эта статья является попыткой исследовать некоторые алгебраические свойства бинарных деревьев в рамках сформулированной аксиоматической теории.

Литература

1. Кнут, Д. Э. Искусство программирования / Д. Э. Кнут. – Т. 3: Сортировка и поиск. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 832 с.

2. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Риверст. – М.: МЦНМО; БИНОМ; Лаборатория знаний, 2004. – 960 с.

3. Бронштейн, Е. М. Производящие функции / Е. М. Бронштейн // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т. 7 – № 2.

4. Смелов, В. В. Алгебраический метод представления структуры бинарного дерева/ В. В. Смелов // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2006. – Вып. XIV. – С. 16–21.

5. Смелов, В. В. Аксиоматика множества бинарных деревьев / В. В. Смелов // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 6–8 июня 2006 г. / БГТУ. – Минск, 2006.

6. Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

7. Кон, П. Универсальная алгебра / П. Кон. – М.: Мир, 1968. – 352 с.